

离散数学

Discrete Mathematics

第10章 谓词逻辑 Predicate logic

所有的人都是会犯错误的。

张三是人，

所以张三是会犯错误的。

（科幻小说）机器人三（逻辑）定律：

1. 机器人不得伤害人类，或坐视人类受到伤害；
2. 除非违背第一定律，否则机器人必须服从人类命令；
3. 除非违背第一或第二定律，否则机器人必须保护自己。

第10章 谓词逻辑

在命题逻辑演算中，原子命题是基本研究单位，不能再进行分解，研究由原子命题和联结词所组成的复合命题。具有局限性，如：

所有的人都是要死的。

张三是人，

所以张三是要死的。

但用命题逻辑推理理论却得不出来。

又如，

李芳是大学生。

张岗是大学生。

在命题逻辑中只能用两个命题来表示，但这样不能表示出两个命题的联系。

在谓词逻辑中，将原子命题分解为谓词和个体；‘李芳’是个体，‘是大学生’为谓词。

10.1 谓词、个体和量词

定义 10-1 可以独立存在的物体称为**个体**（它可以是抽象的，也可以是具体的）。

在谓词逻辑中，个体通常在一个命题里表示思维对象。

定义 10-2 用来刻画个体的性质或关系的词称为**谓词**。刻画一个个体性质的词称为一元谓词；刻画n个个体之间关系的词称为**n元谓词**。

例如，“张三是人”，“是人”为一元谓词；

“张明和张亮是兄弟”，“...和...是兄弟”是二元谓词。

用大写字母表示谓词，小写字母表示个体。

例如，Q表示谓词“是大学生”，a和b分别表示“李芳”和“张岗”，则命题“李芳是大学生”和“张岗是大学生”分别可以写成Q(a)和Q(b)。

一般地，一个由n个个体和n元谓词所组成的命题可表示为 $G(a_1, a_2, \dots, a_n)$ ，n个个体的排列次序有时是重要的。

在命题逻辑中引入的联结词，在这里仍然可以用来构成复合命题。

例如，用 $Q(a)$ 表示“李芳是大学生”； $G(b, c)$ 表示“张琦比小红高”

则 $Q(a) \wedge G(b, c)$ 李芳是大学生 且 张琦比小红高

$Q(a) \vee G(b, c)$ 李芳是大学生 或则 张琦比小红高

$Q(a) \rightarrow G(b, c)$ 如果李芳是大学生 则 张琦比小红高

$Q(a) \leftrightarrow G(b, c)$ 李芳是大学生 当且仅当 张琦比小红高

个体常元：具体的确定的个体。 e.g. 月亮上有外星人

个体变元：抽象的或泛指（或者说取值不确定的）个体。 e.g. 某星球上有外星人

例如， $Q(x)$ 表示“ x 是大学生”。

定义10-3 简单命题函数：由一个谓词和若干个个体变元组成的表达式。

e.g. $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 。

复合命题函数：由一个或若干个简单命题函数以及逻辑联结词组成的命题形。

e.g. $P(x_1, x_2, \dots, x_n) \wedge Q(y_1, y_2, \dots, y_n)$

命题函数：简单命题函数和复合命题函数统称。 e.g. $Q(x) \wedge G(y, z)$

可将不带个体变元的谓词称为**0元谓词**。

例如， $Q(a)$, $G(b, c)$ ；当 Q , G 表示具体的性质或关系时，**0元谓词**为命题。

命题逻辑中的命题可表示为**0元谓词**。 e.g. 月亮上有外星人。

命题函数并不是一个命题，只有当其中所有的个体变元都分别代之以确定的个体才表示一个命题。 e.g. $P(x)$: x 星球上有外星人。

定义10-4 在命题函数中，个体变元的取值范围称为**个体域**。

实际上就是命题函数的定义域，命题函数一般需指明个体域。

例如， $P(x)$ 表示 $x^2+1=0$ ，若 x 的个体域为实数集，则这是矛盾式；

若 x 的个体域为复数集，则除了 $P(i)$ 和 $P(-i)$ 是真值为真的命题外，其余情形均为真值为假的命题。

谓词也有谓词常元和谓词变元：

谓词常元——有确定意义的谓词；

谓词变元——未赋予确定意义的谓词。在下面的讨论中一般是谓词常元。

量词：在命题里表示个体数量的词。有全称量词、存在量词和存在唯一量词。

全称量词——表示对所有个体，用符号“ $\forall x$ ”表示，用来表示“所有的”“对任一个”“凡是”“一切”；

例如， $B(x)$ ：x是圆的。

$\forall x B(x)$ （个体域为球的集合）

存在量词——表示对某些个体，用符号“ $\exists x$ ”表示，用来表示“有某一个”“至少存在一个”“某些”；

例如， $S(x)$ ：x是红的。

$\exists x S(x)$ （个体域为苹果的集合）

存在唯一量词——表示对唯一个体，用符号“ $\exists! x$ ”表示，用来表示“存在着唯一的一个”“恰有一个”；

例如， $P(x)$ ：x是素数； $T(x)$ ：x是偶数

$\exists! x (P(x) \wedge T(x))$ （个体域为整数集合）

含有量词的命题表达式的含义和真值与个体域的指定有关。e.g. x星球上有外星人。

定义10-5 所有的个体聚集在一起所构成的集合，称为**全总个体域**。实际上就是一切事物构成的集合。

在下面的讨论中，均使用**全总个体域**。

而对于个体变化的真正取值范围，用特性谓词加以限制：

对于全称量词，特性谓词常作为蕴含的前件； $\forall x (A(x) \rightarrow B(x))$

对于存在量词，此特性谓词常作为合取项。 $\exists x (A(x) \wedge B(x))$

例如：(1) 人总要犯错误的。(2) 有的人用左手写字。

特性谓词M(x)：x是人；

F(x)：x犯错误； G(x)：x用左手写字。

则：(1) $\forall x (M(x) \rightarrow F(x))$ (2) $\exists x (M(x) \wedge G(x))$

10.2 谓词逻辑公式及解释

为在谓词逻辑（也称一阶逻辑）中进行演算和推理，还必须给出谓词逻辑中公式的抽象定义及解释。为此，首先给出一阶语言的概念：用于一阶逻辑的形式语言。

定义10-6 一阶语言 F 的字母表定义如下：

- (1) 个体变元： $x, y, z, \dots, x_i, y_i, \dots, i \geq 1$.
- (2) 个体常元： $a, b, c, \dots, a_i, b_i, \dots, i \geq 1$.
- (3) 函数符号： $f, g, h, \dots, f_i, g_i, h_i, \dots, i \geq 1$.
- (4) 谓词符号： $F, G, H, \dots, F_i, G_i, H_i, \dots, i \geq 1$.
- (5) 量词符号： $\forall, \exists, \exists!$
- (6) 连接词符号： $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$
- (7) 逗号和圆括号。 $, ()$

一个符号化的命题是由这些符号所组成的表达式，
但并不是任意一个由此类符号组成的表达式就是命题。

定义10-7 **F的项**的定义如下:

- (1) 任何一个**个体变元或常元**是项.
- (2) 若**f**是任意的**n元函数**, $t_1, t_2, \dots, t_n$ 是任意的n个项, 则 **$f(t_1, t_2, \dots, t_n)$** 是项。
- (3) 所有的项都是有限次使用(1)(2)得到的。

例如, $x, a, b, f(x, a), f(g(a, b), h(x))$ 都是项。

其中, f, g 是二元函数, h 是一元函数; 而 $h(x, a)$ 不是二元函数。

定义10-8 设P是F的任意n元谓词, $t_1, t_2, \dots, t_n$ 是F的任意n个项, 则 $P(t_1, t_2, \dots, t_n)$ 是**原子公式**, 也称为谓词演算中的**原子谓词公式**。

一个命题或一个命题变元也称为谓词演算中的原子谓词公式。也就是说,
原子谓词公式是不包含联结词和量词的命题函数。

$n=0$ 时, $P(t_1, t_2, \dots, t_n)$ 也称为**原子命题P**。

谓词公式（合式公式）的递归定义：

定义10-9

- (1) 每个原子谓词公式都是谓词公式.
- (2) 如果A是谓词公式，则 $\neg A$ 也是谓词公式。
- (3) 如果A和B是谓词公式，则 $(A \vee B)$ ， $(A \wedge B)$ ， $(A \rightarrow B)$ ， $(A \leftrightarrow B)$ 也是谓词公式。
- (4) 如果A是谓词公式，x是A中的个体变元，则 $\forall xA$ 和 $\exists xA$ 也是谓词。
- (5) 只有由使用上述四条规则有限次而得到的才是谓词公式。

个体变元有自由变元和约束变元之分。

自由变元：没有确定值的个体变元；

约束变元：被**量词**所约束的个体变元。

例如，“ x 是整数”是一命题函数。

“ $x > y$ ”也不是命题，而是一个命题函数。

$\forall x$ (如果 x 是苹果，则 x 是红的)

$\exists x$ (x 是偶数 $\wedge x > 101$)

定义10-10 在谓词公式 $\forall xA(x)$ 和 $\exists xA(x)$ 中， x 称为**量词的指导变元（作用元）**，而公式 $A(x)$ 称为**量词的辖域（作用域）**。在 $\forall x$ 和 $\exists x$ 的辖域中， x 的所有出现都称为**约束出现**，且 x 称为**约束变元**， $A(x)$ 中不是约束出现的其他变元的出现均称为**自由出现**，且称 x 为**自由变元**。

对于约束变元改名，须符合

换名规则：

(1) 约束变元换名时，该变元在量词及其辖域中的**所有出现均须同时更改**，

公式的其余部分不变； e.g. $\forall x(x > y \wedge x < z) \vee A \rightarrow \forall m(m > y \wedge m < z) \vee A$

(2) 换名时一定要**更改为该量词辖域中没有出现过的符号**。最好是公式中未出现过的符号。

对于自由变元，

代入规则：

(1) 对于谓词公式中的自由变元，可以代入，代入时须对该自由变元的**所有出现同时进行代入**；

(2) 代入时所选用的**变元符号与原公式中所有变元的符号不能相同**。

e.g. $(x > y \wedge x < z) \vee A \rightarrow (m > y \wedge m < z) \vee A \quad (A > y \wedge A < z) \vee A \quad \times$

在谓词公式中，如果没有自由变元出现，则该公式就成为一个命题。

定义10-11 设A是任意的公式，若A中不含自由变元，则A为**闭式**。

10.3 谓词演算的永真公式

定义10-13：**永真公式**（简称永真式）：设A为一公式，若A在任何解释下的值总为真(1)，则称A为；**矛盾式**（**永假公式**）：若A在任何解释下的值总为假(0)，则称A为；如果至少存在一个解释使A的值为真，则称A为**可满足的公式**（简称可满足式）。

定义10-14 若 $A(P_1, P_2, \dots, P_n)$ 是含命题变元 $(P_1, P_2, \dots, P_n)$ 的命题公式， $B(M_1, M_2, \dots, M_n)$ 是以一阶公式 $M_1, M_2, \dots, M_n$ 分别代替 $P_1, P_2, \dots, P_n$ 在A中的所有出现后得到的谓词公式，则称B是A的一个**代换实例**。

定理10-2 重言式的代换实例都是永真式，矛盾式的代换实例都是矛盾式。

定义10-15 设A和B是公式，若 $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow 1$ ，则称A与B等值，记作 $A \Leftrightarrow B$ ， $A \Leftrightarrow B$ 称为**等值（关系）式**。

定义10-6 对于公式A和B，若 $A \rightarrow B \Leftrightarrow 1$ ，则称A蕴含B，记作 $A \Rightarrow B$ ， $A \Rightarrow B$ 称为**蕴含（关系）式**。

当个体域是有限集合的时候, 原则上来说, 可以用真值表的方法来验证一个公式是否为永真公式, 或者验证两个公式是否等值.

例如, 设个体域 $E = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, 则包含有全称量词的谓词公式 $\forall x A(x)$ 表示 a_1 有性质 A , a_2 有性质 A , $\dots$, a_n 有性质 A . 因此

$$\underline{\forall x A(x) \iff A(a_1) \wedge A(a_2) \wedge \dots \wedge A(a_n)}.$$

因为 $A(a_i)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 中都没有个体变元, 也没有量词, 所以上一合取式实际上是命题演算中的命题公式.

包含有存在量词的谓词公式 $\exists x A(x)$ 表示 a_1 有性质 A , 或者 a_2 有性质 A , $\dots$, 或者 a_n 有性质 A . 因此

$$\underline{\exists x A(x) \iff A(a_1) \vee A(a_2) \vee \dots \vee A(a_n)}.$$

同样地, 这一析取式也是命题演算中的命题公式.

命题逻辑中的重言式的代换实例都是谓词逻辑中的永真公式，因此命题逻辑中的等值式和蕴含式，也是谓词逻辑的。

例如，在 $P \vee \neg P$ 和 $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg P \vee Q)$ 中，若用 $\forall xP(x)$ 代替 P ，用 $\exists xQ(x)$ 代替 Q ，就得到永真公式

$$\forall xP(x) \vee \neg \forall xP(x),$$

$$(\forall xP(x) \rightarrow \exists xQ(x)) \leftrightarrow (\neg \forall xP(x) \vee \exists xQ(x)).$$

若将每一命题变元分别代换为不包含联结词的原子谓词公式，则又可得到谓词演算中的一类永真公式。例如

$$(A(x) \rightarrow B(x, y)) \leftrightarrow (\neg A(x) \vee B(x, y)),$$

$$(A(x) \vee B(x, y)) \leftrightarrow (B(x, y) \vee A(x)),$$

$$\neg(\neg C(x, y)) \leftrightarrow C(x, y).$$

公式中出现的全称量词和存在量词，可相互转换。

$$\neg \exists x A(x) \leftrightarrow \forall x \neg A(x)$$
$$\neg \forall x A(x) \leftrightarrow \exists x \neg A(x)$$

量词转换律

还有一些常用的等价和蕴含关系式。

$$\exists x (A(x) \vee B(x)) \leftrightarrow \exists x A(x) \vee \exists x B(x)$$
$$\forall x (A(x) \wedge B(x)) \leftrightarrow \forall x A(x) \wedge \forall x B(x)$$

量词分配律

$$\forall x A(x) \vee \forall x B(x) \Rightarrow \forall x (A(x) \vee B(x))$$
$$\exists x (A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow \exists x A(x) \wedge \exists x B(x)$$

量词分配蕴含律

$$\forall x (A \vee B(x)) \leftrightarrow A \vee \forall x B(x)$$
$$\exists x (A \wedge B(x)) \leftrightarrow A \wedge \exists x B(x)$$
$$\forall x A(x) \rightarrow B \leftrightarrow \exists x (A(x) \rightarrow B)$$
$$\exists x A(x) \rightarrow B \leftrightarrow \forall x (A(x) \rightarrow B)$$
$$A \rightarrow \forall x B(x) \leftrightarrow \forall x (A \rightarrow B(x))$$
$$A \rightarrow \exists x B(x) \leftrightarrow \exists x (A \rightarrow B(x))$$

量词辖域的扩张
和收缩律

多个量词连续出现,它们之间无括号分隔时,后面的量词在前面量词的辖域之中,且量词对变元的约束与量词的次序有关,一般不能随意调动,但也有例外,两个量词间的排列次序有如下常用公式:

$$E_{31} \quad \forall x \forall y A(x, y) \Leftrightarrow \forall y \forall x A(x, y);$$

$$E_{32} \quad \exists x \exists y A(x, y) \Leftrightarrow \exists y \exists x A(x, y);$$

$$I_{18} \quad \forall x \forall y A(x, y) \Rightarrow \exists y \forall x A(x, y);$$

$$I_{19} \quad \forall x \exists y A(x, y) \Rightarrow \exists y \exists x A(x, y);$$

$$I_{20} \quad \exists y \forall x A(x, y) \Rightarrow \forall x \exists y A(x, y).$$

注意 由 E_{31} 和 E_{32} 知相同量词的次序可以任意调动.

定义10-17： 设A是不含联结词“ $\rightarrow$ ”和“ $\leftrightarrow$ ”的谓词公式，则在其中以联结词 $\wedge$ 、 $\vee$ 分别代换 $\vee$ 、 $\wedge$ ，以量词 $\exists$ 、 $\forall$ 分别代换 $\forall$ 、 $\exists$ ，以常量0、1分别代换1、0后所得到的公式称为**A的对偶公式**，记作 A^D 。

定理10-3（对偶定理） 设A、B是两个不含联结词“ $\rightarrow$ ”和“ $\leftrightarrow$ ”的谓词公式，**若 $A \leftrightarrow B$ ，则 $A^D \leftrightarrow B^D$ 。**

10.5 谓词演算的推理理论

利用谓词公式间的各种等值关系和蕴含关系，通过一些推理规则，从一些谓词公式推出另一些谓词公式，这就是谓词演算中的推理。

要进行正确的推理，也必须构造一个结构严谨的**形式证明**，依据一些相应的推理规则。命题演算中的推理规则，都可应用于谓词演算的推理。

还有与量词相关的推理规则：

1. **US（全称特定化规则）**

$$\forall x A(x) \Rightarrow A(y)$$

这里自由变元y也可写成个体常元c

2. **ES（存在特定化规则）**

$$\exists x A(x) \Rightarrow A(c)$$

但是，公式中有其他自由变元出现，且x是随其他自由个体变元的值而变，那么就不存在唯一的c使得A(c)对自由变元的任意值都是成立的，不能应用ES。

例如， $\exists x (x = y)$ ，x、y的个体域是实数。

3. UG (全称一般化规则)

$$A(x) \Rightarrow \forall y A(y)$$

这里要求x必须是自由变元，并且y不出现在A(x)中。

2. EG (存在一般化规则)

$$A(c) \Rightarrow \exists y A(y)$$

这里要求y不出现在A(c)中。

例 1 证明 $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) / \wedge P(c) \Rightarrow Q(c)$

证明

$$(1) \quad \forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$$

前提

$$(2) \quad P(c) \rightarrow Q(c)$$

(1), US

$$(3) \quad P(c)$$

前提

$$(4) \quad Q(c)$$

(2), (3); I_{11}

这就是逻辑中的“三段论方法”。例如，“所有的人都是要死的，张三是人，所以张三是要死的”。

例 2 证明 $\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xQ(x)$

证明

(1) $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$	前提
(2) $P(c) \wedge Q(c)$	(1), ES
(3) $P(c)$	(2), I_1
(4) $Q(c)$	(2), I_2
(5) $\exists xP(x)$	(3), EG
(6) $\exists xQ(x)$	(4), EG
(7) $\exists xP(x) \wedge \exists xQ(x)$	(5), (6), I_6

在使用US、ES、UG、EG这四条规则时，要注意严格按照它们的规定去使用，并且，从整体上考虑个体变元和常元符号的选择，尤其对EG和ES规则的应用，要

避免选择已在前面公式中出现过的符号进行取代。

例如，指出下面推理的错误之处：

例如 要求证明 $\exists xP(x) \wedge \exists xQ(x) \Rightarrow \exists x(P(x) \wedge Q(x))$

我们作如下推导：

(1) $\exists xP(x) \wedge \exists xQ(x)$	前提
(2) $\exists xP(x)$	(1), I_1
(3) $\exists xQ(x)$	(1), I_2
(4) $P(c)$	(2), ES
(5) $Q(c)$	(3), ES
(6) $P(c) \wedge Q(c)$	(4), (5), I_0
(7) $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$	(6), EG

例 3 证明 $\forall x(P(x) \vee Q(x))$ 、 $\forall x \neg P(x) \Rightarrow \exists x Q(x)$

证明 用反证法，假设 $\neg \exists x Q(x)$ 成立。

(1) $\forall x \neg P(x)$	前提
(2) $\neg P(y)$	(1); US
(3) $\neg \exists x Q(x)$	假设
(4) $\forall x \neg Q(x)$	(3); E ₂₀
(5) $\neg Q(y)$	(4); US
(6) $\neg P(y) \wedge \neg Q(y)$	(2); (5); I ₀
(7) $\neg (P(y) \vee Q(y))$	(6); E ₁₀
(8) $\forall x (P(x) \vee Q(x))$	前提
(9) $P(y) \vee Q(y)$	(8); US
(10) $(P(y) \vee Q(y)) \wedge \neg (P(y) \vee Q(y))$	(7); (9); I ₁

因为 $(P(y) \vee Q(y)) \wedge \neg (P(y) \vee Q(y))$ 是永假公式，所以

$\forall x(P(x) \vee Q(x))$ 、 $\forall x \neg P(x) \Rightarrow \exists x Q(x)$ 。

作业

5(1)(2), 9(2)(3), 10(1)(4), 14(1), 15(1)(3), 16(1)

内容提要

1. 基本论述

- 个体、谓词、量词；
- 命题函数、个体域、全总个体域、特性谓词.

2. 谓词公式的有关概念

- 原子公式(原始公式)、谓词公式；
- 量词的辖域、约束变元、自由变元；
- 换名规则、代入规则；
- 谓词公式、谓词公式的指派；
- 永真公式、永假公式、可满足公式.

3. 谓词公式间的关系

- 谓词公式间的等值关系($A \Leftrightarrow B$);
- 谓词公式间的蕴涵关系($A \Rightarrow B$);
- 等值定律,即一些基本的等值式;
- 推理定律,即一些基本的蕴涵式.

4. 谓词演算的推理理论

在谓词演算中,命题演算的推理理论仍然成立,另外还用到与量词有关的推理规则.

- 全称特定化规则(US);
- 存在特定化规则(ES);
- 全称一般化规则(UG);
- 存在一般化规则(EG).

$$\begin{array}{ll}
 E_{18} & \neg(\forall x A(x)) \Leftrightarrow \exists x(\neg A(x)); \\
 E_{19} & \neg(\exists x A(x)) \Leftrightarrow \forall x(\neg A(x)); \left. \vphantom{\begin{array}{l} E_{18} \\ E_{19} \end{array}} \right\} \text{量词转换律} \\
 E_{20} & \forall x(A(x) \wedge B) \Leftrightarrow \forall x A(x) \wedge B; \\
 E_{21} & \forall x(A(x) \vee B) \Leftrightarrow \forall x A(x) \vee B; \\
 E_{22} & \exists x(A(x) \wedge B) \Leftrightarrow \exists x A(x) \wedge B; \\
 E_{23} & \exists x(A(x) \vee B) \Leftrightarrow \exists x A(x) \vee B; \left. \vphantom{\begin{array}{l} E_{20} \\ E_{21} \\ E_{22} \\ E_{23} \end{array}} \right\} \begin{array}{l} \text{量词辖域} \\ \text{的扩张与} \\ \text{收缩律} \end{array} \\
 E_{24} & \forall x(A(x) \wedge B(x)) \Leftrightarrow \forall x A(x) \wedge \forall x B(x); \\
 E_{25} & \exists x(A(x) \vee B(x)) \Leftrightarrow \exists x A(x) \vee \exists x B(x); \left. \vphantom{\begin{array}{l} E_{24} \\ E_{25} \end{array}} \right\} \text{量词分配律} \\
 E_{26} & \exists x(A(x) \rightarrow B) \Leftrightarrow \forall x A(x) \rightarrow B; \\
 E_{27} & \forall x(A(x) \rightarrow B) \Leftrightarrow \exists x A(x) \rightarrow B; \\
 E_{28} & \exists x(A \rightarrow B(x)) \Leftrightarrow A \rightarrow \exists x B(x); \\
 E_{29} & \forall x(A \rightarrow B(x)) \Leftrightarrow A \rightarrow \forall x B(x); \\
 E_{30} & \exists x(A(x) \rightarrow B(x)) \Leftrightarrow \forall x A(x) \rightarrow \exists x B(x).
 \end{array}$$

以上各式中的 B 表示任意一个不含有约束变元 x 的公式.

$$E_{31} \quad \forall x \forall y A(x, y) \Leftrightarrow \forall y \forall x A(x, y);$$

$$E_{32} \quad \exists x \exists y A(x, y) \Leftrightarrow \exists y \exists x A(x, y);$$

$$I_{18} \quad \forall x \forall y A(x, y) \Rightarrow \exists y \forall x A(x, y);$$

$$I_{19} \quad \forall x \exists y A(x, y) \Rightarrow \exists y \exists x A(x, y);$$

$$I_{20} \quad \exists y \forall x A(x, y) \Rightarrow \forall x \exists y A(x, y).$$

注意 由 E_{31} 和 E_{32} 知相同量词的次序可以任意调动.

例题讲解

例 10-1 用个体、谓词表示下列命题：

(1) 武汉位于重庆与上海之间；

(2) 如果王英坐在李红的后面，则王英比李红高.

解 (1) 个体 a, b, c 分别表示武汉、重庆和上海，谓词 $P(x, y, z)$ 表示 x 位于 y 与 z 之间，则命题(1)可表示为 $P(a, b, c)$.

(2) 令 a :王英; b :李红; $P(x, y)$: x 坐在 y 的后面; $G(x, y)$: x 比 y 高. 于是(2)可表示为 $P(a, b) \rightarrow G(a, b)$.

例 10-2 将下列命题符号化：

(1) 每个母亲都爱自己的孩子；

(2) 有某些实数是有理数；

(3) 对任何整数 x, y , 若 $xy=0$, 则 $x=0$ 或 $y=0$.

解 (1) 令 $L(x):x$ 爱自己的孩子. x 的个体域为全体母亲组成的集合, 于是 (1) 可表示为 $\forall x L(x)$.

(2) 令 $Q(x):x$ 是有理数. x 的个体域为实数集, 则 (2) 可表示为 $\exists x Q(x)$.

(3) 令 $Z(x):x=0; E(x, y, z):x \cdot y=z$, 其中 x, y, z 的个体域为整数集. 这样 (3) 可表示为

$$\forall x \forall y (\exists z (E(x, y, z) \wedge Z(z)) \rightarrow (Z(x) \vee Z(y))).$$

对例 10-2 中命题使用全总个体域, 引入相应的特性谓词 $M(x):x$ 是母亲; $R(x):x$ 是实数; $I(x):x$ 是整数. 于是前面的命题可表示为

(1) $\forall x (M(x) \rightarrow L(x))$;

(2) $\exists x (R(x) \wedge Q(x))$;

(3) $\forall x \forall y ((I(x) \wedge I(y)) \rightarrow \exists z ((I(z) \wedge E(x, y, z) \wedge Z(z)) \rightarrow (Z(x) \vee Z(y))))$.

例 10-5 设 x, y 的个体域为自然数集合, 定义其中的原子公式如下:
 $P(x)$: x 是素数; $E(x)$: x 是偶数; $O(x)$: x 是奇数; $D(x, y)$: x 可以整数 y .
 试将下列各式译成自然语言:
 (1) $\exists x(E(x) \wedge D(x, 6))$;
 (2) $\forall x(O(x) \rightarrow \forall y(P(x) \rightarrow \neg D(x, y)))$.

解 (1) 有某个偶数能整除 6.
 (2) 任何奇数不能整除每个素数.

例 10-8 对公式 $\forall x(P(x, y) \wedge \exists yQ(y) \wedge M(x, y)) \wedge (\forall xR(x) \rightarrow Q(x))$ 中的约束变元进行换名, 使每个变元在公式中只呈一种出现形式(即约束出现或自由出现).

解 在该公式中, 将 $P(x, y)$ 和 $M(x, y)$ 中的约束变元 x 换名为 z , $R(x)$ 中的 x 换名为 v , $Q(y)$ 中的 y 换名为 u , 换名后为

$$\forall z(P(z, y) \wedge \exists uQ(u) \wedge M(z, y)) \\ \wedge (\forall vR(v) \rightarrow Q(x)).$$

注意 若将公式换名为 $\forall z(P(z, y) \wedge \exists uQ(u) \wedge M(x, y)) \wedge (\forall vR(v) \rightarrow Q(x))$ 则是错误的, 这是因为它未将 $\forall x$ 辖域 $(P(x, y) \wedge \exists yQ(y) \wedge M(x, y))$ 中 x 的所有出现同时换名.

例 10-9 对公式 $(\exists y A(x, y) \rightarrow (\forall x B(x, z) \wedge C(x, y, z))) \wedge \exists x \forall z C(x, y, z)$ 中的自由变元进行代入, 使每个变元在公式中只呈一种出现形式.

解 将该公式中的自由变元 x 用 t 代入, y 用 u 代入, z 用 v 代入, 代入后变为

$$(\exists y A(t, y) \rightarrow (\forall x B(x, v) \wedge C(t, u, v))) \wedge \exists x \forall z C(x, u, z).$$

注意 (1) 若将公式代入成

$$(\exists y A(t, y) \rightarrow (\forall x B(x, z) \wedge C(x, u, v))) \wedge \exists x \forall z C(x, u, z)$$

则是错误的, 这是因为这一代入过程 未将公式中 x 和 z 的所有自由出现同时进行代入.

(2) 若将公式代入成

$$(\exists y A(t, y) \rightarrow (\forall x B(x, x) \wedge C(t, x, v))) \wedge \exists x \forall z C(x, x, z)$$

也是错误的, 这是因为在代入过程中 选用了公式中约束出现的变元符号, 改变了原公式的含义.

例 10-14 证明下列等值式：

$$(1) \quad \forall x A(x) \wedge \forall x (\neg B(x)) \Leftrightarrow \neg \exists x (A(x) \rightarrow B(x));$$

$$(2) \quad \forall x \forall y (P(x) \rightarrow Q(y)) \Leftrightarrow (\exists x P(x) \rightarrow \forall y Q(y)).$$

分析 同证明命题演算中的等值式一样,证明两个公式等值时,可以从其中任一公式开始进行演算,一般从较复杂的公式开始.另外,还可以对两个公式 F_1 和 F_2 分别进行等值演算,如果能将公式 F_1 和 F_2 都等值演算为同一公式 F_3 ,那么由等值关系的传递性,即可知 $F_1 \Leftrightarrow F_2$.

$$\begin{aligned} \text{证} \quad (1) \quad & \neg \exists x (A(x) \rightarrow B(x)) \\ & \Leftrightarrow \forall x \neg (A(x) \rightarrow B(x)) & E_{19} \\ & \Leftrightarrow \forall x \neg (\neg A(x) \vee B(x)) & E_{11} \\ & \Leftrightarrow \forall x (A(x) \wedge \neg B(x)) & E_{10} \\ & \Leftrightarrow \forall x A(x) \wedge \forall x (\neg B(x)), & E_{24} \end{aligned}$$

$$\text{故 } \forall x A(x) \wedge \forall x (\neg B(x)) \Leftrightarrow \neg \exists x (A(x) \rightarrow B(x)).$$

$$\begin{aligned}
(2) \quad & \text{因 } \forall x \forall y (P(x) \rightarrow Q(y)) \\
& \Leftrightarrow \forall x \forall y (\neg P(x) \vee Q(y)) & E_{11} \\
& \Leftrightarrow \forall x (\forall y Q(y) \vee \neg P(x)) & E_1, E_{21} \\
& \Leftrightarrow \forall x (\neg P(x)) \vee \forall y Q(y) & E_1, E_{21} \\
& \Leftrightarrow \neg \exists x P(x) \vee \forall y Q(y) & E_{19} \\
& \Leftrightarrow \exists x P(x) \rightarrow \forall y Q(y), & E_{11}
\end{aligned}$$

例 10-17 下列蕴涵关系是否成立？若成立，给出证明，否则给出反例.

$$(1) \quad \exists x A(x) \rightarrow B \Rightarrow \forall x A(x) \rightarrow B;$$

$$(2) \quad \forall x \exists y P(x, y) \Rightarrow \exists y \forall x P(x, y).$$

解 (1) 假定后件假, 即 $\forall x A(x) \rightarrow B$ 为假, 则 $\forall x A(x)$ 为真, B 为假. 于是 $\exists x A(x)$ 也为真, 从而 $\exists x A(x) \rightarrow B$ 为假, 所以, $\exists x A(x) \rightarrow B \Rightarrow \forall x A(x) \rightarrow B$.

(2) 此蕴涵式不成立.

反例, 设 x, y 的个体域均为自然数集 $\mathbf{N}$, $P(x, y): x < y$. 因为对于任何 x , 总有 $y = x + 1$, 使 $P(x, y)$ 为真, 所以, $\forall x \exists y P(x, y)$ 为真. 但是在 $\mathbf{N}$ 中不存在一个 y_0 , 使得对任意的 x 均有 $x < y_0$ (如 $x_1 = y_0 + 1$, 就不满足 $P(x_1, y_0)$), 从而 $\exists y \forall x P(x, y)$ 为假, 因此蕴涵式不成立.

例 10-20 用形式证明的方法证明：

$$(1) \exists x A(x) \rightarrow \forall x B(x) \Rightarrow \forall x (A(x) \rightarrow B(x));$$

$$(2) \forall x (P(x) \rightarrow \neg Q(x)), \forall x (Q(x) \vee R(x)), \exists x \neg R(x) \Rightarrow \exists x \neg P(x).$$

证 (1) 其推导过程如表 10-8 所示.

表 10-8

编 号	公 式	依 据
(1)	$\exists xA(x) \rightarrow \forall xB(x)$	前提
(2)	$\neg \forall x(A(x) \rightarrow B(x))$	附加前提
(3)	$\exists x \neg (A(x) \rightarrow B(x))$	(2); E_{18}
(4)	$\neg (A(c) \rightarrow B(c))$	(3); ES
(5)	$A(c) \wedge \neg B(c)$	(4); E_{11}, E_{10}
(6)	$A(c)$	(5); I_1
(7)	$\exists xA(x)$	(6); EG
(8)	$\forall xB(x)$	(7), (1); I_{11}
(9)	$B(c)$	(8); US
(10)	$\neg B(c)$	(5); I_2
(11)	$B(c) \wedge \neg B(c)$	(9), (10); I_9 (矛盾)

浙江大学信息学院信电系电子信息技术与系统研究所宋牟平

(2) 方法一 其推导过程如表 10-9 所示.

表 10-9

编 号	公 式	依 据
(1)	$\forall x(P(x) \rightarrow \neg Q(x))$	前提
(2)	$\neg \exists x \rightarrow P(x)$	附加前提
(3)	$\forall x P(x)$	(1); E_{19}
(4)	$\forall x(Q(x) \vee R(x))$	前提
(5)	$\exists x \rightarrow R(x)$	前提
(6)	$\neg R(c)$	(5); ES
(7)	$Q(c) \vee R(c)$	(4); US
(8)	$Q(c)$	(6), (7); I_{10}
(9)	$P(c)$	(3); US
(10)	$P(c) \rightarrow \neg Q(c)$	(1); US
(11)	$\neg Q(c)$	(9), (10); I_{11}
(12)	$Q(c) \wedge \neg Q(c)$	(8), (11); I_9 (矛盾)

方法二 其推导过程如表 10-10 所示.

表 10-10

编 号	公 式	依 据
(1)	$\forall x(Q(x) \vee R(x))$	前提
(2)	$\exists x \rightarrow R(x)$	前提
(3)	$\rightarrow R(c)$	(2); ES
(4)	$Q(c) \vee R(c)$	(1); US
(5)	$Q(c)$	(3), (4); I_{10}
(6)	$\forall x(P(x) \rightarrow \rightarrow Q(x))$	前提
(7)	$P(c) \rightarrow \rightarrow Q(c)$	(6); US
(8)	$\rightarrow P(c)$	(5), (7); I_{12}
(9)	$\exists x \rightarrow P(x)$	(8); EG

例 10-24 下述推导是否正确,若不正确,请指出其推理过程中的错误.

(1) 其推导过程如表 10-11 所示.

因此, $\exists x(A(x) \rightarrow B(x)) \Rightarrow \exists xA(x) \rightarrow \exists xB(x)$.

表 10-11

编 号	公 式	依 据
(1)	$\exists x(A(x) \rightarrow B(x))$	前提
(2)	$\exists xA(x)$	附加前提
(3)	$A(c)$	(2); ES
(4)	$A(c) \rightarrow B(c)$	(1); ES
(5)	$B(c)$	(3), (4); I_{11}
(6)	$\exists xB(x)$	(5); EG

(2) 其推导过程如表 10-12 所示.

表 10-12

编 号	公 式	依 据
(1)	$\forall x(A(x) \rightarrow B(x))$	前提
(2)	$\forall xA(x) \rightarrow \forall xB(x)$	(1); I_{17}
(3)	$A(c) \rightarrow \forall xB(x)$	(2); US
(4)	$\exists xA(x) \rightarrow \forall xB(x)$	(3); EG

因此, $\forall x(A(x) \rightarrow B(x)) \Rightarrow \exists xA(x) \rightarrow \forall xB(x)$.

解 (1) 推理不正確.

若 x 的个体域为自然数集 $\mathbf{N}$, $A(x): x$ 是奇数; $B(x): x < 0$, 则 $\exists x(A(x) \rightarrow B(x))$ 为真(如 $2 \in \mathbf{N}$, $A(2)$ 假, $A(2) \rightarrow B(2)$ 为真), 却推出了假命题 $\exists x A(x) \rightarrow \exists x B(x)$ (其前件真, 后件总假). 其出错原因是在第(3)步已引入个体常元 c , 而在第(4)步应用 ES 时, 又引入个体常元 c , 结果由真前件, 推出了假命题.

(2) 推理不正確.

若 x 的个体域为实数集 $\mathbf{R}$, $A(x): x$ 是整数; $B(x): x$ 是有理数. 那么, $\forall x(A(x) \rightarrow B(x))$ 为真, $\exists x A(x)$ 也为真, 但 $\forall x B(x)$ 为假, 于是 $\exists x A(x) \rightarrow \forall x B(x)$ 为假, 即由真前件推出了假命题. 其出错原因是在第(3), (4)步对部分公式错误地使用 US 和 EG.

例 10-25 证明下列各式：

$$(1) \quad \forall x(P(x) \vee Q(x)), \forall x(Q(x) \rightarrow \neg R(x)) \Rightarrow \forall xR(x) \rightarrow \forall xP(x);$$

$$(2) \quad \forall x((P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow \exists y(R(y) \wedge S(x, y))) \Rightarrow \neg \exists yR(y) \rightarrow \neg \exists x(P(x) \wedge Q(x)).$$

分析 由于命题演算中的推理理论在谓词演算中均成立,故此类结论为蕴涵形式表达式的形式证明,通常采用蕴涵规则,即 CP.

浙江大学信息学院信电系电子信息技术与系统研究所宋牟平

证 (1) 其推导过程如表 10-13 所示.

表 10-13

编 号	公 式	依 据
(1)	$\forall xR(x)$	附加前提
(2)	$\forall x(Q(x)\rightarrow\rightarrow R(x))$	前提
(3)	$R(c)$	(1);US
(4)	$Q(c)\rightarrow\rightarrow R(c)$	(2);US
(5)	$\rightarrow Q(c)$	(3),(4); I_{12}
(6)	$\forall x(P(x)\vee Q(x))$	前提
(7)	$P(c)\vee Q(c)$	(6);US
(8)	$P(c)$	(5),(7); I_{10}
(9)	$\forall xP(x)$	(8);UG
(10)	$\forall xR(x)\rightarrow\forall xP(x)$	(1),(9);CP

(2) **方法一** 其推导过程如表 10-14 所示.

说明 (1) 不能直接对第(4)步中的公式使用 ES, 因为那样是将对部分公式使用 ES.

(2) 不是对任意的个体变元均能使用 UG, 这里第(11)步中的 c 原本是在第(4)步用 US 得到的, 即它对个体域中的每个个体均成立, 所以在第(12)步可以使用 UG.

(3) 若将此题的结论先作一等值变换, 可使推理过程简化.

浙江大学信息学院信电系电子信息技术与系统研究所宋牟平

编 号	公 式	依 据
(1)	$\rightarrow \exists y R(y)$	附加前提
(2)	$\forall y \rightarrow R(y)$	(1); E_{19}
(3)	$\forall x((P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow \exists y(R(y) \wedge S(x, y)))$	前提
(4)	$(P(c) \wedge Q(c)) \rightarrow \exists y(R(y) \wedge S(c, y))$	(3); US
(5)	$\rightarrow (P(c) \wedge Q(c)) \vee \exists y(R(y) \wedge S(c, y))$	(4); E_{11}
(6)	$\exists y(\rightarrow (P(c) \wedge Q(c)) \vee (R(y) \wedge S(c, y)))$	(5); E_{23}
(7)	$\rightarrow (P(c) \wedge Q(c)) \vee (R(d) \wedge S(c, d))$	(6); ES
(8)	$\rightarrow R(d)$	(2); US
(9)	$\rightarrow R(d) \vee \rightarrow S(c, d)$	(8); I_3
(10)	$\rightarrow (R(d) \wedge S(c, d))$	(9); E_{10}
(11)	$\rightarrow (P(c) \wedge Q(c))$	(7), (10); I_{10}
(12)	$\forall x \rightarrow (P(x) \wedge Q(x))$	(11); UG
(13)	$\rightarrow \exists x(P(x) \wedge Q(x))$	(12); E_{19}
(14)	$\rightarrow \exists y R(y) \rightarrow \rightarrow \exists x(P(x) \wedge Q(x))$	(1), (13); CP

方法二

因

$$\begin{aligned} & \rightarrow \exists y R(y) \rightarrow \rightarrow \exists x (P(x) \wedge Q(x)) \\ & \Leftrightarrow \exists x (P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow \exists y R(y), \end{aligned}$$

故原命题转化为证明

$$\begin{aligned} & \forall x ((P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow \exists y (R(y) \wedge S(x, y))) \\ & \Rightarrow \exists x (P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow \exists y R(y). \end{aligned}$$

其推导过程如表 10-15 所示.

编 号	公 式	依 据
(1)	$\exists x (P(x) \wedge Q(x))$	附加前提
(2)	$P(c) \wedge Q(c)$	(1); ES
(3)	$\forall x ((P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow \exists y (R(y) \wedge S(x, y)))$	前提
(4)	$(P(c) \wedge Q(c)) \rightarrow \exists y (R(y) \wedge S(c, y))$	(3); US
(5)	$\exists y (R(y) \wedge S(c, y))$	(2), (4); I_{11}
(6)	$\exists y R(y) \wedge \exists y S(c, y)$	(5); I_{15}
(7)	$\exists y R(y)$	(6); I_1
(8)	$\exists x (P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow \exists y R(y)$	(1), (7); CP
(9)	$\rightarrow \exists y R(y) \rightarrow \rightarrow \exists x (P(x) \wedge Q(x))$	(8); E_{15}

浙江大学信息学院信电系电子信息技术与系统研究所宋牟平

例 10-27 用构造推理过程的方法证明

$$\begin{aligned} &\exists x F(x), \exists x(R(x) \wedge \neg T(x)), \forall z((F(z) \wedge \forall x \exists y Q(x, y)) \\ &\rightarrow \forall y(R(y) \rightarrow T(y))) \Rightarrow \forall y \exists x \neg Q(x, y). \end{aligned}$$

证 其推导过程如表 10-20 所示.

编 号	公 式	依 据
(1)	$\exists x F(x)$	前提
(2)	$F(c)$	(1); ES
(3)	$\exists x(R(x) \wedge \neg T(x))$	前提
(4)	$R(d) \wedge \neg T(d)$	(3); ES
(5)	$\neg(\neg R(d) \vee T(d))$	(4); E_{10}
(6)	$\neg(R(d) \rightarrow T(d))$	(5); E_{11}
(7)	$\exists y \neg(R(y) \rightarrow T(y))$	(6); EG
(8)	$\neg \forall y(R(y) \rightarrow T(y))$	(7); E_{18}
(9)	$\forall z((F(z) \wedge \forall x \exists y Q(x, y))$ $\rightarrow \forall y(R(y) \rightarrow T(y)))$	前提
(10)	$(F(c) \wedge \forall x \exists y Q(x, y)) \rightarrow \forall y(R(y) \rightarrow T(y))$	(9); US

编 号	公 式	依 据
(1)	$\exists x F(x)$	前提
(2)	$F(c)$	(1); ES
(3)	$\exists x (R(x) \wedge \neg T(x))$	前提
(4)	$R(d) \wedge \neg T(d)$	(3); ES
(5)	$\neg (\neg R(d) \vee T(d))$	(4); E_{10}
(6)	$\neg (R(d) \rightarrow T(d))$	(5); E_{11}
(7)	$\exists y \neg (R(y) \rightarrow T(y))$	(6); EG
(8)	$\neg \forall y (R(y) \rightarrow T(y))$	(7); E_{18}
(9)	$\forall z ((F(z) \wedge \forall x \exists y Q(x, y)) \rightarrow \forall y (R(y) \rightarrow T(y)))$	前提
(10)	$(F(c) \wedge \forall x \exists y Q(x, y)) \rightarrow \forall y (R(y) \rightarrow T(y))$	(9); US

(10)	$(F(c) \wedge \forall x \exists y Q(x, y)) \rightarrow \forall y (R(y) \rightarrow T(y))$	(9); US
(11)	$\rightarrow (F(c) \wedge \forall x \exists y Q(x, y))$	(8), (10); I_{12}
(12)	$\rightarrow F(c) \vee \rightarrow \forall x \exists y Q(x, y)$	(11); E_{10}
(13)	$\rightarrow \forall x \exists y Q(x, y)$	(2), (12); I_{10}
(14)	$\exists x \rightarrow (\exists y Q(x, y))$	(13); E_{18}
(15)	$\rightarrow \exists y Q(e, y)$	(14); ES
(16)	$\forall y \rightarrow Q(e, y)$	(15); E_{19}
(17)	$\exists x \forall y \rightarrow Q(x, y)$	(16); EG
(18)	$\forall y \exists x \rightarrow Q(x, y)$	(17); I_{20}