

# 离散数学

## Discrete Mathematics

### 第九章 命题逻辑

语句：如果你走路时看书，你一定会成为近视眼。

令 P：你走路，Q：你看书，R：你成为近视眼

1. 题符号化为  $(P \wedge Q) \rightarrow R$

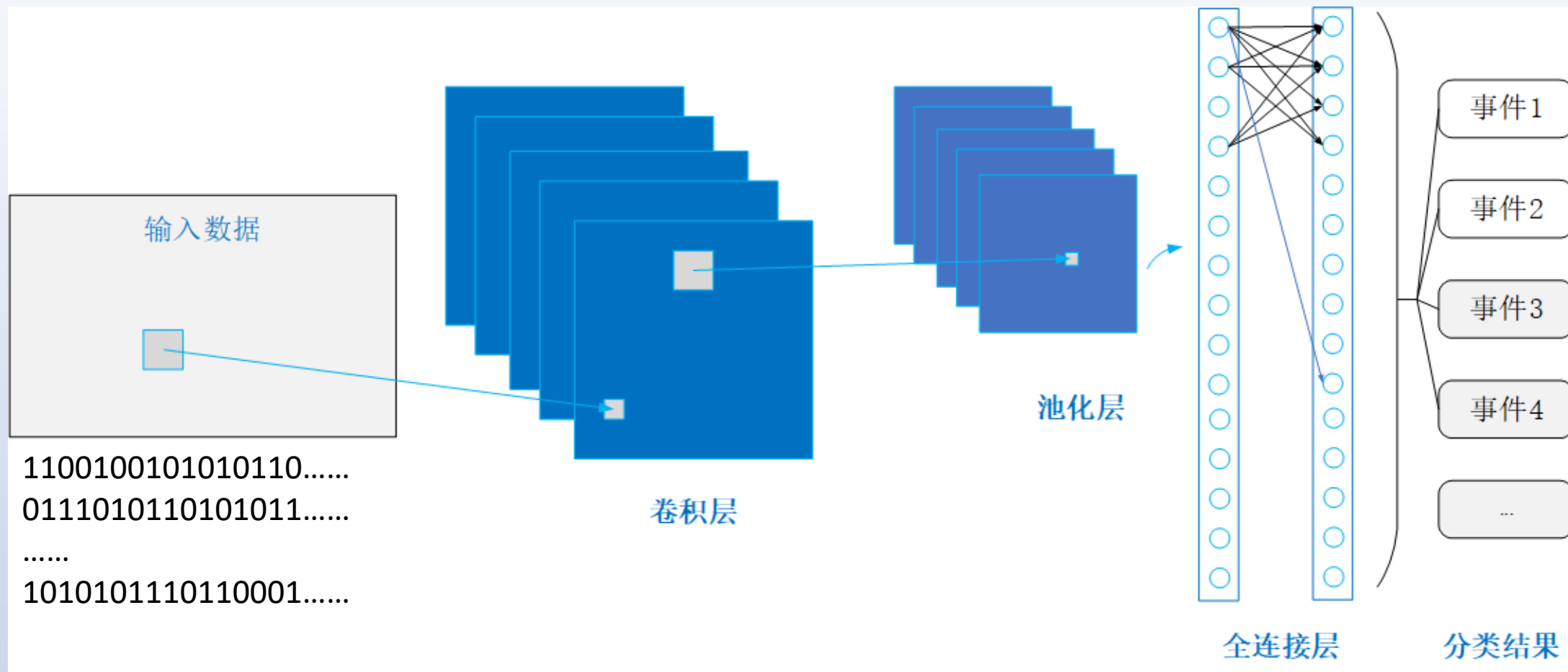
计算机：1000 (P) 1100( $\wedge$ ) 1001(Q) 1101( $\rightarrow$ ) 1010(R)

2. 逻辑运算（语句的逻辑意思）

（科幻小说）机器人三（逻辑）定律：

1. 机器人不得伤害人类，**或**坐视人类受到伤害；
2. **除非**违背第一定律，**否则**机器人必须服从人类命令；
3. **除非**违背第一或第二定律，**否则**机器人必须保护自己。

# 神经网络 处理 数字信号



## 9.1 命题和命题联结词

**命题：**能判断真假的陈述句。要点：能判断真假，陈述句。

命题一般用大写字母表示：A、B、C ...。

例

- (1) 我正在说谎。
- (2) 本命题是假的。
- (3)  $1+1=2$ 。
- (4)  $2+2\geq 5$ 。
- (5) 太阳系外有宇宙人。
- (6)  $x+y\geq 7$ 。

**原子命题：**能判断真假的简单陈述句。

为了进行逻辑判断和推理，常常需要将若干简单陈述句用**联结词**构成复合句，例如：

A：他既会跳舞，又会唱歌。

不仅…，而且…；既…，又…。

B：如果图中任意两点间有唯一一条真路相连，那么它是树。

如果…，那么…。若…，则…。

C： $x \in A$ 或 $x \in B$ 。

或者…，或者…。

D：当且仅当一个图没有在度2结点内与库氏图同构的子图时，它是平面图。

当且仅当…。

这些词称**逻辑联结词**，复合句为**复合命题**。

**复合命题**：由若干**原子命题**通过**逻辑联结词**构成的新命题。

## 常用的逻辑联结词

(1) **否定** $\neg$ : P为命题时, P的否定为新命题, 记 $\neg P$ , 读作“非P”。表示“没有”、“不”、“非”等否定词。

**Q: 你看书;  $\neg Q$ : 你没有看书**

(2) **合取** $\wedge$ : 当且仅当命题P和Q为真时, 新命题 $P \wedge Q$ 为真。读作“P且Q”。表示“不仅..., 而且...”、“既..., 又...”等。

**P: 你走路, Q: 你看书;  $P \wedge Q$ : 你走路时看书**

(3) **析取** $\vee$ : 当且仅当命题P和Q中一个为真时, 新命题 $P \vee Q$ 为真。读作“P或Q”。

表示“或者..., 或者...”。

**P: 我去图书馆, Q: 我去体育馆;  $P \vee Q$ : 我去图书馆或去体育馆**

## 常用的逻辑联结词

(4) **蕴含** $\rightarrow$ : 当且仅当命题P为真和Q为假时, 新命题 $P \rightarrow Q$ 为假。读作“如果P, 则Q”。  
表示“如果..., 那么...”、“若..., 则...”, P可看作Q成立的充分条件, Q可看作P成立的必要条件。

**P: 今天下雨, Q: 我去体育馆;**

**$P \rightarrow Q$ : 如果今天下雨, 我去体育馆**

(5) **等值** $\leftrightarrow$ : 当且仅当命题P和Q同为真或同为假时, 新命题 $P \leftrightarrow Q$ 为真。读作“P当且仅当Q”。

表示“当且仅当...”、“...和...一样”, P和Q互为充分必要条件。

**P: 今天下雨, Q: 我去体育馆;**

**$P \leftrightarrow Q$ : 今天下雨, 我就去体育馆, 否则不去。**

逻辑联结词从代数系统角度看, 就是运算, 称**逻辑运算**。

**真值表：**五种联结词为五种运算，命题有两个值真和假，用1和0表示，则运算表就是大家非常熟悉的真值表

| P | Q | $\neg P$ | $P \wedge Q$ | $P \vee Q$ | $P \rightarrow Q$ | $P \leftrightarrow Q$ |
|---|---|----------|--------------|------------|-------------------|-----------------------|
| 1 | 1 | 0        | 1            | 1          | 1                 | 1                     |
| 1 | 0 | 0        | 0            | 1          | 0                 | 0                     |
| 0 | 1 | 1        | 0            | 1          | 1                 | 0                     |
| 0 | 0 | 1        | 0            | 0          | 1                 | 1                     |

除前述五种运算外，还有“异或”、“或非”、“与非”等。实际上，在域  $B=\{0,1\}$  上可定义16种运算：

| P | Q | $\neg P$ | $P \wedge Q$ | $P \vee Q$ | $P \rightarrow Q$ | $P \leftrightarrow Q$ | $P \forall Q$ | $\neg Q$ | $Q \rightarrow P$ | T | F | P | Q | $P \nrightarrow Q$ | $Q \nrightarrow P$ | $P \uparrow Q$ | $P \downarrow Q$ |
|---|---|----------|--------------|------------|-------------------|-----------------------|---------------|----------|-------------------|---|---|---|---|--------------------|--------------------|----------------|------------------|
| 1 | 1 | 0        | 1            | 1          | 1                 | 1                     | 0             | 0        | 1                 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0                  | 0                  | 0              | 0                |
| 1 | 0 | 0        | 0            | 1          | 0                 | 0                     | 1             | 0        | 1                 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1                  | 0                  | 1              | 0                |
| 0 | 1 | 1        | 0            | 1          | 1                 | 0                     | 1             | 1        | 0                 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0                  | 1                  | 1              | 0                |
| 0 | 0 | 1        | 0            | 0          | 1                 | 1                     | 0             | 1        | 1                 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0                  | 0                  | 1              | 1                |

有了命题和逻辑联结词，可将逻辑问题符号化，变为数学问题，

本章的中心内容就是如何将逻辑问题变为数学问题，逻辑推理变为数学运算。

例 如果你走路时看书，你一定会成为近视眼。

令 P：你走路，Q：你看书，R：你成为近视眼

命题符号化为  $(P \wedge Q) \rightarrow R$

## 9.2 命题公式

**命题常元：**具有确定真值的命题。

A: 月球上有外星人。

**命题变元：**真值不确定的、表示任意命题的标示符。

X: 某星球上有人。

命题变元不是命题，只有赋值以后才是命题。

**命题公式（逻辑表达式）：**

- (1) B中的元素**0**、**1**是命题公式；
- (2) **命题变元**是命题公式；
- (3) 若P是命题公式，则 **$\neg P$** 是命题公式；
- (4) 若P和Q是命题公式，则 **$(P \wedge Q)$ 、 $(P \vee Q)$ 、 $(P \rightarrow Q)$ 、 $(P \leftrightarrow Q)$** 也是命题公式；
- (5) 只有有限次使用(1),(2),(3),(4)定义的字符串才是命题公式。

命题公式的定义与布尔表达式的定义完全一样。

命题公式不是命题，只有赋值以后能确定真假，即有确定的真值，才是命题。

定义9-7 **真值指派**：对命题公式中的每一个命题变元都赋一确定的值。

**真值表**：命题公式在所有真值指派下的取值表。

例  $\neg(P \rightarrow Q) \wedge Q$

| P | Q | $P \rightarrow Q$ | $\neg(P \rightarrow Q)$ | $\neg(P \rightarrow Q) \wedge Q$ |
|---|---|-------------------|-------------------------|----------------------------------|
| 1 | 1 | 1                 | 0                       | 0                                |
| 1 | 0 | 0                 | 1                       | 0                                |
| 0 | 1 | 1                 | 0                       | 0                                |
| 0 | 0 | 1                 | 0                       | 0                                |

例  $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg P \vee Q)$

| P | Q | $\neg P$ | $P \rightarrow Q$ | $\neg P \vee Q$ | $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg P \vee Q)$ |
|---|---|----------|-------------------|-----------------|-----------------------------------------------------|
| 1 | 1 | 0        | 1                 | 1               | 1                                                   |
| 1 | 0 | 0        | 0                 | 0               | 1                                                   |
| 0 | 1 | 1        | 1                 | 1               | 1                                                   |
| 0 | 0 | 1        | 1                 | 1               | 1                                                   |

定义9-8 **永真式**（**重言式**）：命题公式在任意的真值指派下，取值恒为真，称永真式。

$$P \vee \neg P$$

**永假式**（**矛盾式**）：命题公式在任意的真值指派下，取值恒为假，称永假式。

$$P \wedge \neg P$$

定理9-1 若A和B为重言式，则 $A \wedge B$ 和 $A \vee B$ 仍是重言式。

## 9.3 命题公式的等值关系和蕴含关系

**定义9-9 等值公式**（相等）：若P和Q两公式对任意的真值指派具有相同的值，即两公式的真值表相同，称P和Q等值，记 $P \Leftrightarrow Q$ 。

**定理（等价定义）**：当且仅当 $P \Leftrightarrow Q$ 是永真式时，P和Q等值。

**当且仅当  $P \Leftrightarrow Q \Leftrightarrow 1$ ,  $P \Leftrightarrow Q$**

判断两公式P和Q是否等值，(1)可用真值表，(2)也可证明 $P \Leftrightarrow Q$ 是永真式。

例如，当且仅当 $(P \rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \Leftrightarrow 1$ ,  $(P \rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee Q)$

显然公式间的**等值关系是等价关系**，即满足如下三条性质：

- (1) 自反性：对任意的公式A，有 $A \Leftrightarrow A$
- (2) 对称性：对任意的公式A、B，若 $A \Leftrightarrow B$ ，则 $B \Leftrightarrow A$
- (3) 可传递性：对任意的公式A、B、C，若 $A \Leftrightarrow B$ ， $B \Leftrightarrow C$ ，则 $A \Leftrightarrow C$

## 重要的等值关系

|    |                                                                      |     |
|----|----------------------------------------------------------------------|-----|
| 1  | $P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$                                  | 交换律 |
| 2  | $P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$                              |     |
| 3  | $P \vee (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \vee R$                | 结合律 |
| 4  | $P \wedge (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \wedge R$        |     |
| 5  | $P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ | 分配律 |
| 6  | $P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$   |     |
| 7  | $P \vee 0 \Leftrightarrow P$                                         | 同一律 |
| 8  | $P \wedge 1 \Leftrightarrow P$                                       |     |
| 9  | $P \vee \neg P \Leftrightarrow 1$                                    | 互否律 |
| 10 | $P \wedge \neg P \Leftrightarrow 0$                                  |     |

|    |                                                                                  |      |
|----|----------------------------------------------------------------------------------|------|
| 11 | $P \vee P \Leftrightarrow P$                                                     | 等幂律  |
| 12 | $P \wedge P \Leftrightarrow P$                                                   |      |
| 13 | $P \vee 1 \Leftrightarrow 1$                                                     | 零一律  |
| 14 | $P \wedge 0 \Leftrightarrow 0$                                                   |      |
| 15 | $P \vee (P \wedge Q) \Leftrightarrow P$                                          | 吸收律  |
| 16 | $P \wedge (P \vee Q) \Leftrightarrow P$                                          |      |
| 17 | $\neg(\neg P) \Leftrightarrow P$                                                 | 双重否定 |
| 18 | $\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$                            | 摩根定律 |
| 19 | $\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$                            |      |
| 20 | $P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$                                  | 蕴含等值 |
| 21 | $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$ | 等价等值 |
| 22 | $P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg Q \rightarrow \neg P$                      | 逆否命题 |
| 23 | $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \leftrightarrow \neg Q$              | 等价否定 |

有了前述基本等式，不用真值表法就可以推出更多的等值关系式。

**等值演算：**根据已知等值关系式推出另外一些等值关系式的过程称**等值演算**。

$$P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q \Leftrightarrow \neg(P \wedge \neg Q)$$

**定义9-10** 设A是一个命题公式， $P_1, P_2, \dots, P_n$ 是其中出现的所有**命题变元**。

(1) 用某些公式代换A中的某些**命题变元**；

(2) 若用公式 $Q_i$ 代换 $P_i$ ，则必须用 $Q_i$ 代换A中所有的 $P_i$ ，

那么，由此得到的新公式B称为公司A的一个**代换实例**。

例如，公式 $A_1 = P \rightarrow (R \wedge P)$ 用 $Q \leftrightarrow S$ 代换其中P，

可得公式 $B_1 = (Q \leftrightarrow S) \rightarrow (R \wedge (Q \leftrightarrow S))$ ，公式B1是A1的一个代换实例；

而 $B_3 = (Q \leftrightarrow S) \rightarrow (R \wedge P)$ 不是A1的代换实例。

定理9-2 代换规则：对重言式中的任意命题变元出现的每一处均用同一命题公式代入，得到的仍然是重言式。

等值公式在代换规则下仍然是等值公式。  $P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$

$$(M \wedge N) \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg(M \wedge N) \vee Q$$

-----子公式、置换规则-----

定义9-11 如果C是公式A的一部分（即C是公式A中连续的几个符号），而C本身也是一个公式，则称C为A的子公式。

例如，设公式A为

$$(P \vee Q) \rightarrow (Q \vee (R \wedge P)),$$

则  $(P \vee Q)$ 、 $(R \wedge P)$ 、 $(Q \vee (R \wedge P))$  都是A的子公式。而  $(P \vee Q) \rightarrow$ 、 $(Q \vee (R \wedge$ 、 $(R \wedge P))$  都不是A的子公式。因为它们本身不是公式。

**定理9-3 置换规则：** 设C是等值公式A的一个子公式， $C \Leftrightarrow D$ 。将公式A中的子公式C置换成公式D后得到的公式B与A等值，即 $A(C) \Leftrightarrow B(D)$ 。

**证明** 设  $P_1, P_2, \dots, P_n$  是公式 A 和公式 B 中出现的全部命题变元。因为 C 和 D 分别是 A 和 B 的子公式，所以 C 和 D 中所出现的命题变元都包含在  $P_1, P_2, \dots, P_n$  之中。由于  $C \Leftrightarrow D$ ，因此对于命题变元  $P_1, P_2, \dots, P_n$  的任意一组指派，C 与 D 的取值均相同，于是 A 与 B 的取值也必然相同。按照公式等值的定义，有  $A \Leftrightarrow B$ 。证完。

由于等值关系具有传递性，因此，公式 A 按照置换规则进行任意多次置换后，所得到的公式仍与公式 A 等值。

例如， $P \wedge (P \vee Q) \Leftrightarrow P$

$P \wedge (\neg P \rightarrow Q) \Leftrightarrow P$

等值演算实际就是布尔函数（表达式）的演算。

例  $(P \wedge (Q \wedge S)) \vee (\neg P \wedge (Q \wedge S)) \Leftrightarrow Q \wedge S$

证明：  $(P \wedge (Q \wedge S)) \vee (\neg P \wedge (Q \wedge S)) \Leftrightarrow (P \vee \neg P) \wedge (Q \wedge S) \Leftrightarrow 1 \wedge (Q \wedge S) \Leftrightarrow Q \wedge S$

**例 3** 证明  $Q \vee \neg((\neg P \vee Q) \wedge P)$  是一个重言式.

**证明**  $Q \vee \neg((\neg P \vee Q) \wedge P)$

$$\iff Q \vee (\neg(\neg P \vee Q) \vee \neg P) \quad \text{由 } E_{10}'$$

$$\iff Q \vee ((P \wedge \neg Q) \vee \neg P) \quad \text{由 } E_{10}$$

$$\iff Q \vee ((P \vee \neg P) \wedge (\neg Q \vee \neg P)) \quad \text{由 } E_1, E_3'$$

$$\iff Q \vee (1 \wedge (\neg Q \vee \neg P)) \quad \text{由 } E_5$$

$$\iff Q \vee (\neg Q \vee \neg P) \quad \text{由 } E_1', E_4'$$

$$\iff (Q \vee \neg Q) \vee \neg P \quad \text{由 } E_2$$

$$\iff 1 \vee \neg P \quad \text{由 } E_5$$

$$\iff 1 \quad \text{由 } E_1, E_8$$

因为公式  $Q \vee \neg((\neg P \vee Q) \wedge P)$  与重言式等值, 所以公式  $Q \vee \neg((\neg P \vee Q) \wedge P)$  是重言式.

命题公式中的联结词 $\rightarrow$ 和 $\leftrightarrow$ 可以用联结词 $\neg$ 、 $\wedge$ 和 $\vee$ 来代替：

$$P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q \quad E_{11}$$

$$P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q) \quad E_{12}$$

所以， $\neg$ 、 $\wedge$ 和 $\vee$ 是三种基本的联结词。

由德.摩根定律可说明， $\{\neg$ 和 $\vee\}$ 或 $\{\neg$ 和 $\wedge\}$ 就是功能完备的联结词。

|     |    |                                                                               |             |
|-----|----|-------------------------------------------------------------------------------|-------------|
| 例 4 | 证明 | $P \rightarrow (Q \rightarrow R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \rightarrow R$  | $E_{13}$    |
| 证明  |    | $P \rightarrow (Q \rightarrow R) \Leftrightarrow \neg P \vee (\neg Q \vee R)$ | 由 $E_{11}$  |
|     |    | $\Leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q) \vee R$                                 | 由 $E_2$     |
|     |    | $\Leftrightarrow \neg (P \wedge Q) \vee R$                                    | 由 $E'_{10}$ |
|     |    | $\Leftrightarrow (P \wedge Q) \rightarrow R$                                  | 由 $E_{11}$  |

**例 5** 证明  $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$   $E_{14}$

**证明**  $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P) \Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P)$  由  $E_{11}$

$\Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge P) \vee (Q \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge P)$  由  $E_3$

$\Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q) \vee 0 \vee 0$  由  $E_1, E'_5$

$\Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$  由  $E_4$

$\Leftrightarrow P \leftrightarrow Q$  由  $E_{12}$

# 蕴含关系

命题公式之间的另一个重要关系是蕴含关系。

定义9-12 设A、B是两个公式，若公式 $A \rightarrow B$ 是重言式，即 $A \rightarrow B \Leftrightarrow 1$ ，则称公式A蕴含公式B，记为 $A \Rightarrow B$

蕴含关系是偏序关系，满足：

- (1) 自反性：对任意的公式A，有 $A \Rightarrow A$
- (2) 反对称性：对任意的公式A、B，若 $A \Rightarrow B$ ， $B \Rightarrow A$ ，则 $A \Leftrightarrow B$
- (3) 可传递性：对任意的公式A、B、C，若 $A \Rightarrow B$ ， $B \Rightarrow C$ ，则 $A \Rightarrow C$

定理9-4 设A、B是两个命题公式， $A \Leftrightarrow B$ 当且仅当 $A \Rightarrow B$ 且 $B \Rightarrow A$

证明：设 $A \Leftrightarrow B$ ，则 $A \leftrightarrow B$ 是重言式，

由于 $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$

所以， $A \rightarrow B$ 和 $B \rightarrow A$ 是重言式，即 $A \Rightarrow B$ 且 $B \Rightarrow A$

反之，设 $A \Rightarrow B$ 且 $B \Rightarrow A$ ，则 $A \rightarrow B$ 和 $B \rightarrow A$ 是重言式，因此 $A \leftrightarrow B$ 是重言式，即有 $A \Leftrightarrow B$ 。

**定理9-5** 设A、B、C是命题公式，若 $A \Rightarrow B$ ，且 $B \Rightarrow C$ ，则 $A \Rightarrow C$

证明：因为 $A \Rightarrow B$ ，且 $B \Rightarrow C$ ，那么按定义， $A \rightarrow B$ 和 $B \rightarrow C$ 是重言式，即

$$\neg A \vee B \Leftrightarrow \neg B \vee C \Leftrightarrow 1$$

因此， $\neg A \vee C \Leftrightarrow (\neg A \vee C) \vee 0$

$$\Leftrightarrow (\neg A \vee C) \vee (B \wedge \neg B)$$

$$\Leftrightarrow (\neg A \vee B \vee C) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee C)$$

$$\Leftrightarrow (1 \vee C) \wedge (\neg A \vee 1)$$

$$\Leftrightarrow 1 \wedge 1$$

$$\Leftrightarrow 1$$

所以， $A \rightarrow C$ 是重言式，因此 $A \Rightarrow C$

一些重要的蕴含关系：这些关系可按照定义直接证明。

---

$$\begin{aligned} P \rightarrow Q &\Leftrightarrow \neg P \vee Q \\ &\Leftrightarrow \neg(P \wedge \neg Q) \end{aligned}$$



$$[1] \quad P \wedge Q \Rightarrow P$$

$$[2] \quad P \wedge Q \Rightarrow Q$$

$$[3] \quad P \Rightarrow P \vee Q$$

$$[4] \quad Q \Rightarrow P \vee Q$$

$$[5] \quad \neg P \Rightarrow P \rightarrow Q$$

$$[6] \quad Q \Rightarrow P \rightarrow Q$$

$$[7] \quad \neg(P \rightarrow Q) \Rightarrow P$$

$$[8] \quad \neg(P \rightarrow Q) \Rightarrow \neg Q$$

$$[9] \quad \underline{P \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow Q}$$

三段论

$$[10] \quad \underline{\neg Q \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow \neg P}$$

$$[11] \quad \neg P \wedge (P \vee Q) \Rightarrow Q$$

$$[12] \quad (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R) \Rightarrow P \rightarrow R$$

$$[13] \quad (P \vee Q) \wedge (P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R) \Rightarrow R$$

(1) 为了证明给定的蕴含关系，可以假定相应的蕴含式命题的前件为真，检查在此情况下，其后件是否也为真，如果后件也为真，则说明此蕴含式命题公式是重言式，因而也就证明了该蕴含关系成立。例如在蕴含关系式[11]中，若假定 $\neg P \wedge (P \vee Q)$ 的值为真，则 $\neg P$ 和 $P \vee Q$ 的值皆为真，于是 $P$ 的值为假，从而 $Q$ 的值为真。因此蕴含关系式[11]成立。

(2) 证明蕴含关系的另一种方法是，假定其后件为假，检查在此情况下，其前件是否有可能为真，如果前件不可能为真，则该蕴含关系成立。例如在蕴含关系式[10]中，假定 $\neg P$ 的值为假，则 $P$ 的值为真。若 $Q$ 的值为真，则 $\neg Q$ 的值为假，从而 $\neg Q \wedge (P \rightarrow Q)$ 的值为假；若 $Q$ 的值为假，则 $P \rightarrow Q$ 的值为假，也得到 $\neg Q \wedge (P \rightarrow Q)$ 的值为假，因此说明蕴含关系式[10]成立。

定理9-6 设A、B、C是命题公式，若 $A \Rightarrow B$ ，且 $A \Rightarrow C$ ，那么 $A \Rightarrow (B \wedge C)$

证明：由假设知， $A \rightarrow B$ 和 $A \rightarrow C$ 是重言式，因此，若A的真值为真，则B和C的真值均为真，所以 $B \wedge C$ 的真值为真，故 $A \Rightarrow (B \wedge C)$

定理9-7 设A、B为公式，若 $A \Rightarrow B$ 且A是重言式，则B一定也是重言式

证明：由假设知， $A \rightarrow B$ 是重言式，因此，若A的真值为真，则B真值必为真，所以B一定是重言式。

定义9-13 在给定的公式A中，若用联结词 $\vee$ 代换 $\wedge$ ，用 $\wedge$ 代换 $\vee$ ，用0代换1，用1代换0，则所得的公式称为A的对偶，记作 $A^D$

显然，A和 $A^D$ 互为对偶。

$$\begin{aligned} & ((P \vee \neg Q) \wedge R) \vee (S \wedge P) \\ & ((P \wedge \neg Q) \vee R) \wedge (S \vee P) \end{aligned}$$

定理 9-8 A和 $A^D$ 互为对偶的两个公式， $P_1, P_2, \dots, P_n$ 是其命题变元，则

$$\neg A(P_1, P_2, \dots, P_n) \Leftrightarrow A^D(\neg P_1, \neg P_2, \dots, \neg P_n) \quad (*)$$

(证明请见书)。

定理 9-9 (对偶原理) 设 $A(P_1, P_2, \dots, P_n)$ 和 $B(P_1, P_2, \dots, P_n)$ 是两个公式,  
若 $A \Leftrightarrow B$ , 则 $A^D \Leftrightarrow B^D$

**证明** 因为  $A(P_1, P_2, \dots, P_n) \Leftrightarrow B(P_1, P_2, \dots, P_n)$ ,  
所以  $\neg A(P_1, P_2, \dots, P_n) \Leftrightarrow \neg B(P_1, P_2, \dots, P_n)$ .  
由定理 9-1  $\neg A(P_1, P_2, \dots, P_n) \Leftrightarrow A^D(\neg P_1, \neg P_2, \dots, \neg P_n)$ ,  
 $\neg B(P_1, P_2, \dots, P_n) \Leftrightarrow B^D(\neg P_1, \neg P_2, \dots, \neg P_n)$ .  
于是  $A^D(\neg P_1, \neg P_2, \dots, \neg P_n) \Leftrightarrow B^D(\neg P_1, \neg P_2, \dots, \neg P_n)$ .  
从而  $A^D(P_1, P_2, \dots, P_n) \Leftrightarrow B^D(P_1, P_2, \dots, P_n)$ . 证完.

## 9.5 命题演算的推理理论

考虑所有命题的集合 $S$ ，显然，这个集合和三个运算构成一个代数系统

$$(S; \neg, \vee, \wedge)$$

由于这些运算满足交换律、分配率、同一律和互否律，因此代数系统 $(S; \neg, \vee, \wedge)$ 是一个布尔代数，称为**命题代数**。

**定义9-21** 设 $A$ 、 $B$ 是两个命题公式，如果 $A \Rightarrow B$ ，即如果命题公式 $A \rightarrow B$ 为重言式，则称 **$B$ 是前提 $A$ 的结论或从 $A$ 推出结论 $B$** 。

一般地，设 $H_1, H_2, \dots, H_n$ 和 $C$ 是一些命题公式，如果

$$H_1 \wedge H_2 \wedge \dots \wedge H_n \Rightarrow C$$

则称从前提 $H_1, H_2, \dots, H_n$ 推出结论 $C$ ，有时也记为 $H_1, H_2, \dots, H_n \Rightarrow C$ ，并称 $\{H_1, H_2, \dots, H_n\}$ 为 $C$ 的**前提集合**。

**例 1** 确定结论  $C$  是否可以从前提  $H_1$  及  $H_2$  推出。

(1)  $H_1: P \rightarrow Q, H_2: P, C: Q$

(2)  $H_1: P \rightarrow Q, H_2: Q, C: P$

**解** 构造上述命题公式的真值表

| $P$ | $Q$ | $P \rightarrow Q$ | $(P \rightarrow Q) \wedge P$ | $(P \rightarrow Q) \wedge Q$ |
|-----|-----|-------------------|------------------------------|------------------------------|
| 0   | 0   | 1                 | 0                            | 0                            |
| 0   | 1   | 1                 | 0                            | 1                            |
| 1   | 0   | 0                 | 0                            | 0                            |
| 1   | 1   | 1                 | 1                            | 1                            |

例如，将某些具体的命题代入命题变元  $P$  和  $Q$ ，根据 (1) 我们得到下述两个断言：

(1) 如果今天出太阳，他就进城，  
今天出了太阳，  
所以他进城了。

(1) 如果狗有翅膀，则狗会飞上天，  
狗有翅膀，  
所以狗飞上天了。

(2) 如果  $n$  是素数，则  $n$  一定是整数，  
 $n$  是整数，  
所以  $n$  是素数。

判断 $H_1 \wedge H_2 \wedge \dots \wedge H_n \rightarrow C$ 是否为重言式，可利用已知的一些等值式推导出等值式  
 $(H_1 \wedge H_2 \wedge \dots \wedge H_n \rightarrow C) \Leftrightarrow 1$ ，从而证明C是前提 $H_1, H_2, \dots, H_n$ 的结论。

**例 2** 证明C： $\neg P$ 是前提 $H_1: P \rightarrow Q$ 和 $H_2: \neg(P \wedge Q)$ 的结论。

$$\begin{aligned} \text{证明 } H_1 \wedge H_2 \rightarrow C &\Leftrightarrow ((P \rightarrow Q) \wedge \neg(P \wedge Q)) \rightarrow \neg P \\ &\Leftrightarrow ((\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q)) \rightarrow \neg P \\ &\Leftrightarrow (\neg P \vee (Q \wedge \neg Q)) \rightarrow \neg P \\ &\Leftrightarrow \neg P \rightarrow \neg P \\ &\Leftrightarrow P \vee \neg P \\ &\Leftrightarrow 1 \end{aligned}$$

由定义可知，C是前提 $H_1$ 和 $H_2$ 的结论。

为了证明  $C$  是前提  $H_1, H_2, \dots, H_n$  的结论，我们需要证明  $(H_1 \wedge H_2 \wedge \dots \wedge H_n) \rightarrow C$  是一个重言式，也就是要证明当前提  $H_1, H_2, \dots, H_n$  均为真时， $C$  必为真。为了描述这样一个推理过程，我们可以构造一个命题序列，其中每个命题或者是已知的命题，或者是由某些前提所推得的结论，序列中最后一个命题就是所要求的结论，这样一个描述推理过程的命题序列称为是形式证明。要想进行正确的推理，就必须构造一个逻辑结构严谨的形式证明，这就需要使用一些推理规则。

| 证明 | 编 号 | 公 式                          | 依 据                     |
|----|-----|------------------------------|-------------------------|
|    | (1) | $\neg R \vee S$              | 前 提                     |
|    | (2) | $\neg S$                     | 前 提                     |
|    | (3) | $\neg R$                     | (1), (2), $I_{10}$      |
|    | (4) | $(P \wedge Q) \rightarrow R$ | 前 提                     |
|    | (5) | $\neg (P \wedge Q)$          | (3), (4), $I_{12}$      |
|    | (6) | $\neg P \vee \neg Q$         | (5), $E_{10}'$          |
|    | (7) | $P$                          | 假 设                     |
|    | (8) | $\neg Q$                     | (6), (7), $I_{10}, E_6$ |

定义9-22 一个描述推理过程的命题序列，其中每个命题或者是已知的命题，或者是由某些前提所推得的结论，序列中最后一个命题就是所要求的结论，这样的命题序列称为**形式证明**。

| 编 号 | 公 式                          | 依 据                     |
|-----|------------------------------|-------------------------|
| (1) | $\neg R \vee S$              | 前 提                     |
| (2) | $\neg S$                     | 前 提                     |
| (3) | $\neg R$                     | (1), (2), $I_{10}$      |
| (4) | $(P \wedge Q) \rightarrow R$ | 前 提                     |
| (5) | $\neg (P \wedge Q)$          | (3), (4), $I_{12}$      |
| (6) | $\neg P \vee \neg Q$         | (5), $E_{10}$           |
| (7) | $P$                          | 假 设                     |
| (8) | $\neg Q$                     | (6), (7), $I_{10}, E_6$ |

进行正确的推理，必须构造一个逻辑结构严谨的形式证明，这需要使用一些推理规则：

- (1) **前提引入规则**：在证明的任何步骤上都可以引用前提。
- (2) **结论引用规则**：在证明的任何步骤上所得到的**结论**都可以在其后的证明中引用。

(3) **置换规则**：在证明的任何步骤上，命题公式的**子公式**都可以用与之等值的其他命题公式置换。

(4) **代换规则**：在证明的任何步骤上，重言式的任一**命题变元**都可以用一个命题公式代入，得到的仍是重言式。

在 §9.2 中列出的  $E_1 \sim E_{14}$ ，以及

$$\mathbf{E}_{15} \quad \neg(P \rightarrow Q) \Leftrightarrow P \wedge \neg Q$$

$$\mathbf{E}_{16} \quad P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg Q \rightarrow \neg P$$

$$\mathbf{E}_{17} \quad \neg(P \leftrightarrow Q) \Leftrightarrow P \leftrightarrow \neg Q$$

都是在推理过程中经常使用的一些等值关系式。

在推理过程中经常使用的蕴含关系式有：

$$I_1 \quad P \wedge Q \Rightarrow P$$

$$I_2 \quad P \wedge Q \Rightarrow Q$$

$$I_3 \quad P \Rightarrow P \vee Q$$

$$I_4 \quad Q \Rightarrow P \vee Q$$

$$I_5 \quad \neg P \Rightarrow P \rightarrow Q$$

$$I_6 \quad Q \Rightarrow P \rightarrow Q$$

$$I_7 \quad \neg (P \rightarrow Q) \Rightarrow P$$

$$I_8 \quad \neg (P \rightarrow Q) \Rightarrow \neg Q$$

$$I_9 \quad P, Q \Rightarrow P \wedge Q$$

$$I_{10} \quad \neg P, P \vee Q \Rightarrow Q$$

$$I_{11} \quad P, P \rightarrow Q \Rightarrow Q$$

$$I_{12} \quad \neg Q, P \rightarrow Q \Rightarrow \neg P$$

$$I_{13} \quad P \rightarrow Q, Q \rightarrow R \Rightarrow P \rightarrow R$$

$$I_{14} \quad P \vee Q, P \rightarrow R, Q \rightarrow R \Rightarrow R$$

这些蕴含式也被称为推理定律，因为它们给出了正确的推理形式。

蕴含关系式  $I_{11}$  称为假言推理，它表示：若两个命题为真，其中一个为蕴含式命题，而另一个是这个蕴含式命题的前件，那么这个蕴含式命题的后件一定也是真命题。在证明过程中，如果出现了某个推理定律的前件，则根据  $I_{11}$ ，立刻可得到由这个前件所推出的后件。因此， $I_{11}$  也被称为是分离规则。

**有效的结论：**如果证明过程中的**每一步**所得到的结论都是根据推理规则得到的，则这样的证明称为是**有效的**。通过有效的证明而得到的结论，称为是有效的结论。

**合理的结论：**如果所有的前提都是真的，那么通过有效的证明所得到的结论也是真的，这样的证明称为是**合理的**。通过合理的证明而得到的结论称为是合理的结论。

在形式证明中，为了得到一组给定前提的有效结论，一般采用两类基本方法，即**直接证法**和**间接证法**。

### 1. 直接证明法

由一组前提，利用一些公认的推理规则，根据已知的蕴含式和等值式推导出有效结论的方法称为**直接证法**。

**例 3** 证明 $\neg P$  是前提  $\neg(P \wedge \neg Q)$ 、 $\neg Q \vee R$ 、 $\neg R$  的结论.

证明

| 编 号 | 公 式                     | 依 据                 |
|-----|-------------------------|---------------------|
| (1) | $\neg Q \vee R$         | 前 提                 |
| (2) | $\neg R$                | 前 提                 |
| (3) | $\neg Q$                | (1), (2), $I_{10}$  |
| (4) | $\neg(P \wedge \neg Q)$ | 前 提                 |
| (5) | $\neg P \vee Q$         | (4), $E'_{10}, E_6$ |
| (6) | $\neg P$                | (3), (5), $I_{10}$  |

表格中间一列是依次推导出来的命题公式，最后一行的命题公式 $\neg P$  是要证明的结论。左边一列是推导出来的命题公式的编号，右边一列是推导的依据。

**例 4** 证明  $P \vee Q$  是  $S \rightarrow Q$ 、 $R \rightarrow P$ 、 $S \vee R$  的结论。

证明

| 编 号 | 公 式                    | 依 据                |
|-----|------------------------|--------------------|
| (1) | $S \vee R$             | 前 提                |
| (2) | $\neg S \rightarrow R$ | (1), $E_6, E_{11}$ |
| (3) | $R \rightarrow P$      | 前 提                |
| (4) | $\neg S \rightarrow P$ | (2), (3), $I_{13}$ |
| (5) | $\neg P \rightarrow S$ | (4), $E_{16}, E_6$ |
| (6) | $S \rightarrow Q$      | 前 提                |
| (7) | $\neg P \rightarrow Q$ | (5), (6), $I_{13}$ |
| (8) | $P \vee Q$             | (7), $E_{11}, E_6$ |

**例 6** “如果电影已开演，那么大门关着；如果他们八点钟以前到达，那么大门开着；他们八点钟以前到达。所以，电影没有开演”。证明这些语句构成一个正确的推理。

令  $P$ ：电影已开演。

$Q$ ：大门关着。

$R$ ：他们八点钟以前到达。

我们只需证明从前提  $P \rightarrow Q$ 、 $R \rightarrow \neg Q$ 、 $R$  可以推出 结论  $\neg P$ （请读者自己完成这一证明）。

蕴含证明规则：如果能够从（假设）**Q**和前提**P**中推导出**R**来，则就能够从**P**中推导出 **$Q \rightarrow R$** 来。

$$Q, P \Rightarrow R \quad \Leftrightarrow \quad P \Rightarrow Q \rightarrow R$$

**例 5**    证明  $(P \wedge Q) \rightarrow R, \neg R \vee S, \neg S \Rightarrow P \rightarrow \neg Q$ 。

| 证明 | 编 号 | 公 式                          | 依 据                     |
|----|-----|------------------------------|-------------------------|
|    | (1) | $\neg R \vee S$              | 前 提                     |
|    | (2) | $\neg S$                     | 前 提                     |
|    | (3) | $\neg R$                     | (1), (2); $I_{10}$      |
|    | (4) | $(P \wedge Q) \rightarrow R$ | 前 提                     |
|    | (5) | $\neg (P \wedge Q)$          | (3), (4); $I_{12}$      |
|    | (6) | $\neg P \vee \neg Q$         | (5); $E_{10}'$          |
|    | (7) | $P$                          | 假 设                     |
|    | (8) | $\neg Q$                     | (6), (7); $I_{10}, E_6$ |

2. 间接证明法：就是反证法，把结论的否定作为附加前提与给定前提一起推证，若能推导出矛盾，则说明结论是有效的。

**定义9-23** 如果对于出现在公式 $H_1, H_2, \dots, H_n$ 中的命题变元的任何一组真值指派，公式 $H_1, H_2, \dots, H_n$ 中至少有一个为假，即它们的合取式 $H_1 \wedge H_2 \wedge \dots \wedge H_n \Leftrightarrow 0$ 是矛盾式，则称公式 $H_1, H_2, \dots, H_n$ 是不相容的。否则 $H_1, H_2, \dots, H_n$ 是相容的。

当且仅当存在着一个命题 $R$ ，使得 $H_1 \wedge H_2 \wedge \dots \wedge H_n \Rightarrow R \wedge \neg R \Leftrightarrow 0$ 时， $H_1, H_2, \dots, H_n$ 是不相容的，这里 $R$ 是任一公式。

不相容的概念用在称为反证法或间接证明法的证明过程中。为了证明结论 $C$ 可以从前提 $H_1, H_2, \dots, H_n$ 推出，我们把 $\neg C$ 添加到这组前提中去，如果有某个公式 $R$ 使得 $H_1 \wedge H_2 \wedge \dots \wedge H_n \wedge \neg C \Rightarrow R \wedge \neg R$ ，则这组新的前提是不相容的。于是，当 $H_1 \wedge H_2 \wedge \dots \wedge H_n$ 为真时， $\neg C$ 必为假，也就是当 $H_1 \wedge H_2 \wedge \dots \wedge H_n$ 为真时， $C$ 必为真。于是， $C$ 可以由前提 $H_1, H_2, \dots, H_n$ 推出。

**例 7** 证明  $P \rightarrow \neg Q$ 、 $Q \vee \neg R$ 、 $R \wedge \neg S \Rightarrow \neg P$

**证明** 用反证法。把  $\neg(\neg P)$  作为添加的前提加入到前提的集合中去，证明由此导致矛盾。

| 编 号 | 公 式                              | 依 据                |
|-----|----------------------------------|--------------------|
| (1) | <u><math>\neg(\neg P)</math></u> | 假 设                |
| (2) | $P$                              | (1); $E_0$         |
| (3) | $P \rightarrow \neg Q$           | 前 提                |
| (4) | $\neg Q$                         | (2), (3); $I_{11}$ |
| (5) | $Q \vee \neg R$                  | 前 提                |
| (6) | $\neg R$                         | (4), (5); $I_{10}$ |
| (7) | $R \wedge \neg S$                | 前 提                |
| (8) | $R$                              | (7); $I_1$         |
| (9) | $R \wedge \neg R$                | (6), (8); $I_9$    |

所以从前提  $P \rightarrow \neg Q$ 、 $Q \vee \neg R$ 、 $R \wedge \neg S$  可以推出结论  $\neg P$ 。

# 作业

2, 4(5), 7(1)(2)(3), 8(1), 11(1)(4), 12(1)

# 内容提要

## 1. 命题及其联结词

- 命题、命题的真值；
- 原子命题和复合命题；
- 命题联结词：否定( $\neg$ )、合取( $\wedge$ )、析取( $\vee$ )、异或( $\oplus$ )、蕴涵( $\rightarrow$ )、等值( $\leftrightarrow$ )，以及分别由这些联结词构成的复合命题的真值表。

## 2. 命题公式的有关概念

- 命题常元、命题变元、命题公式(或称公式)；
- 命题公式  $F$  关于命题变元  $P_1, P_2, \dots, P_n$  的一组真值指派，以及公式的真值表；
- 重言式(或永真式)、矛盾式(或永假式)和可满足公式；
- 公式的析取范式和合取范式，以及主析取范式和主合取范式。

### 3. 命题公式间的关系

- 命题公式间的等值关系( $A \Leftrightarrow B$ );
- 命题公式间的蕴涵关系( $A \Rightarrow B$ );
- 等值定律,即一些基本的等值式;
- 推理定律,即一些基本的蕴涵式.

### 4. 命题演算的推理理论

- 形式证明、有效证明、有效结论、合理证明、合理结论;
- 前提引入规则、结论引入规则、置换规则、代入规则、蕴涵证明规则.

| 编号     | 公 式                                                                                                                                                                                                 |
|--------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $E_1$  | $\left. \begin{aligned} P \vee Q &\Leftrightarrow Q \vee P \\ P \wedge Q &\Leftrightarrow Q \wedge P \end{aligned} \right\} \text{交换律}$                                                             |
| $E'_1$ |                                                                                                                                                                                                     |
| $E_2$  | $\left. \begin{aligned} (P \vee Q) \vee R &\Leftrightarrow P \vee (Q \vee R) \\ (P \wedge Q) \wedge R &\Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R) \end{aligned} \right\} \text{结合律}$                     |
| $E'_2$ |                                                                                                                                                                                                     |
| $E_3$  | $\left. \begin{aligned} P \wedge (Q \vee R) &\Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R) \\ P \vee (Q \wedge R) &\Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R) \end{aligned} \right\} \text{分配律}$ |
| $E'_3$ |                                                                                                                                                                                                     |
| $E_4$  | $\left. \begin{aligned} P \vee Q &\Leftrightarrow P \\ P \wedge 1 &\Leftrightarrow P \end{aligned} \right\} \text{同一律}$                                                                             |
| $E'_4$ |                                                                                                                                                                                                     |
| $E_5$  | $\left. \begin{aligned} P \vee \neg P &\Leftrightarrow 1 \\ P \wedge \neg P &\Leftrightarrow 0 \end{aligned} \right\} \text{互否律}$                                                                   |
| $E'_5$ |                                                                                                                                                                                                     |
| $E_6$  | $\neg(\neg P) \Leftrightarrow P$ 双重否定律                                                                                                                                                              |
| $E_7$  | $\left. \begin{aligned} P \vee P &\Leftrightarrow P \\ P \wedge P &\Leftrightarrow P \end{aligned} \right\} \text{等幂律}$                                                                             |
| $E'_7$ |                                                                                                                                                                                                     |
| $E_8$  | $\left. \begin{aligned} P \vee 1 &\Leftrightarrow 1 \\ P \wedge 0 &\Leftrightarrow 0 \end{aligned} \right\} \text{零一律}$                                                                             |
| $E'_8$ |                                                                                                                                                                                                     |

|           |                                                                                  |        |
|-----------|----------------------------------------------------------------------------------|--------|
| $E_9$     | $P \vee (P \wedge Q) \Leftrightarrow P$                                          | 吸收律    |
| $E'_9$    | $P \wedge (P \vee Q) \Leftrightarrow P$                                          |        |
| $E_{10}$  | $\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$                            | 德·摩根定律 |
| $E'_{10}$ | $\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$                            |        |
| $E_{11}$  | <u><math>P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q</math></u>                |        |
| $E_{12}$  | $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$   |        |
| $E_{13}$  | $P \rightarrow (Q \rightarrow R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \rightarrow R$     |        |
| $E_{14}$  | $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$ |        |
| $E_{15}$  | $P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg Q \rightarrow \neg P$                      |        |
| $E_{16}$  | $\neg(P \leftrightarrow Q) \Leftrightarrow P \leftrightarrow \neg Q$             |        |
| $E_{17}$  | $\neg(P \rightarrow Q) \Leftrightarrow P \wedge \neg Q$                          |        |

| 编 号      | 公 式                                                            |
|----------|----------------------------------------------------------------|
| $I_1$    | $P \wedge Q \Rightarrow P$                                     |
| $I_2$    | $P \wedge Q \Rightarrow Q$                                     |
| $I_3$    | $P \Rightarrow P \vee Q$                                       |
| $I_4$    | $Q \Rightarrow P \vee Q$                                       |
| $I_5$    | $\neg P \Rightarrow P \rightarrow Q$                           |
| $I_6$    | $Q \Rightarrow P \rightarrow Q$                                |
| $I_7$    | $\neg(P \rightarrow Q) \Rightarrow P$                          |
| $I_8$    | $\neg(P \rightarrow Q) \Rightarrow \neg Q$                     |
| $I_9$    | $P, Q \Rightarrow P \wedge Q$                                  |
| $I_{10}$ | $\neg P, P \vee Q \Rightarrow Q$                               |
| $I_{11}$ | <u><math>P, P \rightarrow Q \Rightarrow Q</math></u>           |
| $I_{12}$ | $\neg Q, P \rightarrow Q \Rightarrow \neg P$                   |
| $I_{13}$ | $P \rightarrow Q, Q \rightarrow R \Rightarrow P \rightarrow R$ |
| $I_{14}$ | $P \vee Q, P \rightarrow R, Q \rightarrow R \Rightarrow R$     |

# 例题讲解

**例 9-1** 判断下列语句是否为命题：

- (1) 北京是中国的首都；
- (2) 所有的树木都是植物；
- (3) 雪是黑色的；
- (4) 请勿吸烟；
- (5) 明天开会吗？
- (6) 这朵花多好看呀！

**解** (1),(2),(3)是命题,其中(1),(2)是真命题,(3)是假命题;(4)是祈使句,(5)是疑问句,(6)是感叹句,它们都无真假可言,因此,它们都不是命题.

一个语句本身是否能分辨真假与我们是否知道它的真假是两回事. 也就是说,对于一个句子,有时可能无法判定它的真假,但它本身却是有真假的,那么这个语句是命题,否则就不是命题.

### 例 9-2 判断下列语句是否为命题：

- (1) 地球外的星球上也有人；
- (2) 小王是我的同学，也是我的好朋友；
- (3)  $11+1=100$ ；
- (4) 我正在说谎.

**解** (1),(2),(3)是命题. 对于(1),目前还无法确定其真假,但就事物的本质而论,句子本身是可以分辨真假的. 随着科学技术的发展,其真值会知道的.

(2) 真假取决于“我”与“小王”的关系,若“我”与“小王”是同学,且关系很好,则(2)是真的,否则就是假的. 但一般来说,这句话总是出现在某一具体情况下,总可根据当时的情况来确定它的真假.

(3) 真假取决于采用哪一种进制,若是二进制,则是真的,否则就是假的.

(4) “我”是在说谎还是在说真话呢? 如果“我”是说谎,那么“我”说的是假话;因为“我”承认他是说谎,所以他实际上是在说真话,易得出结论:如果“我”是说谎,那么他是讲真话. 另一方面,如果“我”讲真话,那么“我”所说的是真话,也就是他在说谎. 易得出结论:如果“我”讲真话,那么他是在说谎. 因此,我们不能分辨这个语句的真假,它不是命题. 这种产生自相矛盾的语句叫悖论.

**例 9-3** 将下列命题符号化：

- (1) 小李虽然聪明,但不用功;
- (2) 派小王或小李出差;
- (3) 小王现在在宿舍或在图书馆里;
- (4) 我既不看电视也不外出,我睡觉;
- (5) 他钓了 20 或 30 条鱼;
- (6) 如果天下大雨,他就乘公共汽车上班;
- (7) 只有天下大雨,他才乘公共汽车上班;
- (8)  $n$  是偶数当且仅当它能被 2 整除;
- (9) 我们不能既走路又划船.

**解** (1) 令  $P$ : 小李聪明;  $Q$ : 小李用功.

命题可表示为  $P \wedge \neg Q$ .

(2) 令  $P$ : 派小王出差;  $Q$ : 派小李出差.

命题符号化为  $P \vee Q$ .

(3) 令  $P$ : 小王在宿舍;  $Q$ : 小王在图书馆里.

由于小王不可能既在宿舍又在图书馆,所以这里的“或”是不可兼或,于是命题

可表示为  $P \vee Q$ , 或者为  $(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$ .

(4) 令  $P$ : 我看电视;  $Q$ : 我外出;  $R$ : 我睡觉.

命题可表示为  $\neg P \wedge \neg Q \wedge R$ .

(5) 中的“或”是“或许”、“大概”的意思, 表示“他大概钓了二三十条鱼”. 此命题不能再分解, 故可表示为  $P$ , 其中  $P$ : 他钓了 20 或 30 条鱼.

(6) 令  $P$ : 天下大雨;  $Q$ : 他乘公共汽车上班.

命题可表示为  $P \rightarrow Q$ .

(7) 令  $P$ : 天下大雨;  $Q$ : 他乘公共汽车上班.

“他乘公共汽车上班”的前提条件是天下大雨. 命题符号化为  $Q \rightarrow P$ .

(8) 令  $P$ :  $n$  是偶数;  $Q$ :  $n$  能被 2 整除.

该命题符号化为  $P \leftrightarrow Q$ .

(9) 令  $P$ : 我们走路;  $Q$ : 我们划船.

命题可表示为  $\neg(P \wedge Q)$ .

例 9-6 下列字符串是否为命题公式,若是,给出其真值表.

(1)  $P \rightarrow (Q \wedge PR)$ ;

(2)  $(P \vee Q) \rightarrow (\neg (Q \wedge R))$ .

解 (1) 不是命题公式.

(2) 是公式,该公式含三个命题变元,其真值表如表 9-1 所示.

表 9-1

| $P \ Q \ R$ | $P \vee Q$ | $Q \wedge R$ | $\neg (Q \wedge R)$ | $(P \vee Q) \rightarrow (\neg (Q \wedge R))$ |
|-------------|------------|--------------|---------------------|----------------------------------------------|
| 0 0 0       | 0          | 0            | 1                   | 1                                            |
| 0 0 1       | 0          | 0            | 1                   | 1                                            |
| 0 1 0       | 1          | 0            | 1                   | 1                                            |
| 0 1 1       | 1          | 1            | 0                   | 0                                            |
| 1 0 0       | 1          | 0            | 1                   | 1                                            |
| 1 0 1       | 1          | 0            | 1                   | 1                                            |
| 1 1 0       | 1          | 0            | 1                   | 1                                            |
| 1 1 1       | 1          | 1            | 0                   | 0                                            |

**例 9-8** 判断下列等值式是否成立：

(1)  $(P \rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg P \rightarrow \neg Q)$ ;

(2)  $P \rightarrow (Q \rightarrow R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \rightarrow R$ .

**解** (1) 构造公式  $A = P \rightarrow Q$  与  $B = \neg P \rightarrow \neg Q$  以及  $A \leftrightarrow B$  的真值表, 如表 9-4 所示. 由表 9-4 知  $A \leftrightarrow B$  不是重言式, 所以  $A$  与  $B$  不等值.

**表 9-4**

| $P$ | $Q$ | $P \rightarrow Q$ | $\neg P \rightarrow \neg Q$ | $A \leftrightarrow B$ |
|-----|-----|-------------------|-----------------------------|-----------------------|
| 0   | 0   | 1                 | 1                           | 1                     |
| 0   | 1   | 1                 | 0                           | 0                     |
| 1   | 0   | 0                 | 1                           | 0                     |
| 1   | 1   | 1                 | 1                           | 1                     |

(2) 构造公式  $A = P \rightarrow (Q \rightarrow R)$  与  $B = (P \wedge Q) \rightarrow R$  以及  $A \leftrightarrow B$  的真值表, 如表 9-5 所示. 由于  $A \leftrightarrow B$  所标记列全为 1, 故  $A \leftrightarrow B$  为重言式, 所以  $A \Leftrightarrow B$ .

表 9-5

| $P$ | $Q$ | $R$ | $Q \rightarrow R$ | $P \wedge Q$ | $A$ | $B$ | $A \leftrightarrow B$ |
|-----|-----|-----|-------------------|--------------|-----|-----|-----------------------|
| 0   | 0   | 0   | 1                 | 0            | 1   | 1   | 1                     |
| 0   | 0   | 1   | 1                 | 0            | 1   | 1   | 1                     |
| 0   | 1   | 0   | 0                 | 0            | 1   | 1   | 1                     |
| 0   | 1   | 1   | 1                 | 0            | 1   | 1   | 1                     |
| 1   | 0   | 0   | 1                 | 0            | 1   | 1   | 1                     |
| 1   | 0   | 1   | 1                 | 0            | 1   | 1   | 1                     |
| 1   | 1   | 0   | 0                 | 1            | 0   | 0   | 1                     |
| 1   | 1   | 1   | 1                 | 1            | 1   | 1   | 1                     |

**例 9-10** 化简公式 $((\neg P \rightarrow \neg P) \rightarrow Q) \rightarrow ((\neg P \rightarrow \neg P) \rightarrow R)$ .

解 原式 $\Leftrightarrow (\neg(\neg(\neg P) \vee \neg P) \vee Q) \rightarrow (\neg(\neg(\neg P) \vee \neg P) \vee R) \quad E_{11}$

$$\Leftrightarrow \neg(\neg(P \vee \neg P) \vee Q) \vee (\neg(P \vee \neg P) \vee R) \quad E_6, E_{11}$$
$$\Leftrightarrow ((P \vee \neg P) \wedge \neg Q) \vee (\neg(P \vee \neg P) \vee R) \quad E_{10}, E_6$$
$$\Leftrightarrow (1 \wedge \neg Q) \vee (0 \vee R) \quad E_5$$
$$\Leftrightarrow \neg Q \vee R. \quad E_4, E'_4$$

另外,用等值演算的方法可以判别命题公式的类型.

**例 9-11** 判别下列公式的类型：

$$(1) Q \wedge \neg(\neg P \rightarrow (\neg P \wedge Q));$$

$$(2) (P \rightarrow Q) \wedge \neg P.$$

**解** (1) 因  $Q \wedge \neg(\neg P \rightarrow (\neg P \wedge Q))$

$$\Leftrightarrow Q \wedge \neg(P \vee (\neg P \wedge Q)) \quad E_{11}, E_6$$

$$\Leftrightarrow Q \wedge \neg((P \vee \neg P) \wedge (P \vee Q)) \quad E'_3$$

$$\Leftrightarrow Q \wedge \neg(1 \wedge (P \vee Q)) \quad E_5$$

$$\Leftrightarrow Q \wedge \neg P \wedge \neg Q \quad E'_4, E_{10}$$

$$\Leftrightarrow \neg P \wedge (Q \wedge \neg Q) \quad E'_1, E'_2$$

$$\Leftrightarrow 0. \quad E'_5, E'_8$$

(2) 因  $(P \rightarrow Q) \wedge \neg P$

$$\Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \wedge \neg P \quad E_{11}$$

$$\Leftrightarrow \neg P, \quad E'_9 \text{ (吸收律)}$$

而  $(0, 1)$  是使公式  $(P \rightarrow Q) \wedge \neg P$  取值为真的真值指派 (其中  $(0, 1)$  表示  $P, Q$  的取值分别为 0 和 1). 于是该公式是可满足式.

**例 9-12** 证明 $((P \vee Q) \wedge (P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R)) \Rightarrow R$ .

**证法一** 列公式 $F_1 = ((P \vee Q) \wedge (P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R)) \rightarrow R$ 的真值表,如表 9-8 所示.

表 9-8

| $P$ | $Q$ | $R$ | $P \vee Q$ | $P \rightarrow R$ | $Q \rightarrow R$ | $(P \vee Q) \wedge (P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R)$ | $F_1$ |
|-----|-----|-----|------------|-------------------|-------------------|----------------------------------------------------------------|-------|
| 0   | 0   | 0   | 0          | 1                 | 1                 | 0                                                              | 1     |
| 0   | 0   | 1   | 0          | 1                 | 1                 | 0                                                              | 1     |
| 0   | 1   | 0   | 1          | 1                 | 0                 | 0                                                              | 1     |
| 0   | 1   | 1   | 1          | 1                 | 1                 | 1                                                              | 1     |
| 1   | 0   | 0   | 1          | 0                 | 1                 | 0                                                              | 1     |
| 1   | 0   | 1   | 1          | 1                 | 1                 | 1                                                              | 1     |
| 1   | 1   | 0   | 1          | 0                 | 0                 | 0                                                              | 1     |
| 1   | 1   | 1   | 1          | 1                 | 1                 | 1                                                              | 1     |

由表 9-8 知,公式 $F_1$ 对任意的一组真值指派取值均为 1,故 $F_1$ 是重言式.

证法二 因  $((P \vee Q) \wedge (P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R)) \rightarrow R$

$$\Leftrightarrow \rightarrow((P \vee Q) \wedge (\neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee R)) \vee R \quad E_{11}$$

$$\Leftrightarrow \rightarrow((P \vee Q) \wedge ((\neg P \wedge \neg Q) \vee R)) \vee R \quad E'_3$$

$$\Leftrightarrow (\neg(P \vee Q) \vee \neg(\neg(P \vee Q) \vee R)) \vee R \quad E_{10}, E'_{10}$$

$$\Leftrightarrow (\neg(P \vee Q) \vee ((P \vee Q) \wedge \neg R)) \vee R \quad E_6, E_{10}$$

$$\Leftrightarrow ((\neg(P \vee Q) \vee (P \vee Q)) \wedge (\neg(P \vee Q) \vee \neg R)) \vee R \quad E'_3$$

$$\Leftrightarrow (1 \wedge (\neg(P \vee Q) \vee \neg R)) \vee R \quad E_5$$

$$\Leftrightarrow \rightarrow(P \vee Q) \vee (\neg R \vee R) \quad E'_4, E_2$$

$$\Leftrightarrow \rightarrow(P \vee Q) \vee 1 \quad E_5$$

$$\Leftrightarrow 1, \quad E_8$$

所以  $(P \vee Q) \wedge (P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R) \Rightarrow R$ .

**证法三** 假定蕴涵式的前件  $(P \vee Q) \wedge (P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R)$  为真, 则  $(P \vee Q)$ ,  $(P \rightarrow R)$ ,  $(Q \rightarrow R)$  分别为真. 由  $P \vee Q$  真, 可得  $P$  真或  $Q$  为真, 分以下情况讨论:

(1) 若  $P$  为真, 则由  $P \rightarrow R$  为真, 得  $R$  为真;

(2) 若  $Q$  为真, 则由  $Q \rightarrow R$  为真, 得  $R$  为真.

因此, 假定前件  $(P \vee Q) \wedge (P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R)$  为真时, 可推断出后件  $R$  也为真, 故  $(P \vee Q) \wedge (P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R) \Rightarrow R$ .

用真值表和等值演算的方法证明蕴涵式有时较繁, 但使用前面介绍的方法(3)和方法(4)时, 要根据具体的公式选择用方法(3)或方法(4), 如下例中用方法(4)比方法(3)简单.

**例 9-14** 对任意的公式  $A, B$ , 判断下述结论.

(1) 如果  $A \Leftrightarrow B$ , 是否有  $\neg A \Leftrightarrow \neg B$ ?

(2) 如果  $A \Rightarrow B$ , 是否有  $\neg A \Rightarrow \neg B$ ?

**解** (1) 设  $P_1, P_2, \dots, P_n$  是公式  $A$  和  $B$  中出现的全部命题变元, 显然,  $\neg A$ ,  $\neg B$  中所出现的全部命题变元也包含在  $P_1, P_2, \dots, P_n$  中. 由于  $A \Leftrightarrow B$ , 所以对于  $P_1, P_2, \dots, P_n$  的任意一组真值指派,  $A$  与  $B$  的取值均相同, 于是  $\neg A$  与  $\neg B$  的取值也必然相同. 因此, 由定义知  $\neg A \Leftrightarrow \neg B$ .

(2) 不一定有  $\neg A \Rightarrow \neg B$  成立. 例如令  $A = P \wedge Q, B = P$ , 可以验证  $P \wedge Q \Rightarrow P$  为重言式, 则  $P \wedge Q \Rightarrow P$ , 但  $\neg(P \wedge Q) \Rightarrow \neg P$  不是重言. 因为当  $P$  为真,  $Q$  为假时,  $\neg(P \wedge Q)$  为真, 而  $\neg P$  为假, 所以  $\neg(P \wedge Q) \not\Rightarrow \neg P$ , 即  $\neg A \Rightarrow \neg B$  不成立.

例 9-17 形式证明  $S \rightarrow \neg Q$  是  $\neg P \vee \neg Q, \neg P \rightarrow R, R \rightarrow \neg S$  的有效结论.

分析 要证的结论是一个含蕴涵联结词的公式,因此,很容易想到采用蕴涵证明规则证.

证 证明过程如表 9-12 所示.

表 9-12

| 编 号 | 公 式                         | 依 据                |
|-----|-----------------------------|--------------------|
| (1) | $\neg P \rightarrow R$      | 前提                 |
| (2) | $R \rightarrow \neg S$      | 前提                 |
| (3) | $\neg P \rightarrow \neg S$ | (1), (2); $I_{13}$ |
| (4) | $S \rightarrow P$           | (3); $E_{15}$      |
| (5) | $S$                         | <u>附加前提</u>        |
| (6) | $P$                         | (4), (5); $I_{11}$ |
| (7) | $\neg P \vee \neg Q$        | 前提                 |
| (8) | $\neg Q$                    | (6), (7); $I_{10}$ |
| (9) | $S \rightarrow \neg Q$      | (5), (8); $CP$ 规则  |

例 9-17 的另一证明方法如表 9-13 所示.

表 9-13

| 编 号 | 公 式                         | 依 据                |
|-----|-----------------------------|--------------------|
| (1) | $\neg P \rightarrow R$      | 前提                 |
| (2) | $R \rightarrow \neg S$      | 前提                 |
| (3) | $\neg P \rightarrow \neg S$ | (1), (2); $I_{13}$ |
| (4) | $\neg P \vee \neg Q$        | 前提                 |
| (5) | $Q \rightarrow \neg P$      | (4); $E_1, E_{11}$ |
| (6) | $Q \rightarrow \neg S$      | (3), (5); $I_{13}$ |
| (7) | $S \rightarrow \neg Q$      | (6); $E_{15}$      |

**例 9-18** 试证 $\neg S$  是  $P \rightarrow (\neg Q \rightarrow R), Q \rightarrow \neg P, S \rightarrow \neg R, P$  的有效结论.

**分析** 用反证法证明. 将 $\neg(\neg S)$ 作为附加前提, 添加到前提集合中, 然后推导出矛盾.

**证** 证明过程如表 9-14 所示.

表 9-14

| 编 号  | 公 式                                    | 依 据                     |
|------|----------------------------------------|-------------------------|
| (1)  | $\neg(\neg S)$                         | <u>附加前提</u>             |
| (2)  | $S$                                    | (1); $E$                |
| (3)  | $S \rightarrow \neg R$                 | 前提                      |
| (4)  | $\neg R$                               | (2), (3); $I_{11}$      |
| (5)  | $P \rightarrow (\neg Q \rightarrow R)$ | 前提                      |
| (6)  | $P$                                    | 前提                      |
| (7)  | $\neg Q \rightarrow R$                 | (5), (6); $I_{11}$      |
| (8)  | $Q$                                    | (4), (7); $I_{12}, E_6$ |
| (9)  | $Q \rightarrow \neg P$                 | 前提                      |
| (10) | $\neg P$                               | (8), (9); $I_{11}$      |
| (11) | $P \wedge \neg P$                      | (4), (10); $I_9$        |

例 9-18 的另一证明方法如表 9-15 所示.

表 9-15

| 编 号 | 公 式                                    | 依 据                |
|-----|----------------------------------------|--------------------|
| (1) | $P \rightarrow (\neg Q \rightarrow R)$ | 前提                 |
| (2) | $P$                                    | 前提                 |
| (3) | $\neg Q \rightarrow R$                 | (1), (2); $I_{11}$ |
| (4) | $Q \rightarrow \neg P$                 | 前提                 |
| (5) | $\neg Q$                               | (2); $E_6, I_{12}$ |
| (6) | $R$                                    | (5), (3); $I_{11}$ |
| (7) | $S \rightarrow \neg R$                 | 前提                 |
| (8) | $\neg(\neg R)$                         | (6); $E_6$         |
| (9) | $\neg S$                               | (8), (7); $I_{12}$ |

**例 9-21** 试证 $\neg B$  是 $\neg B \vee D, (E \rightarrow \neg F) \rightarrow \neg D, \neg E$  的有效结论.

**分析**  $\neg B$  是前提公式 $\neg B \vee D$  的一析取项, 又 $\neg E$  既不是公式 $(E \rightarrow \neg F) \rightarrow \neg D$  的前件, 也不是其后件的非, 因此, 用直接证法不易着手推导, 故采用间接证法.

| 编 号  | 公 式                                         | 依 据                     |
|------|---------------------------------------------|-------------------------|
| (1)  | $\neg(\neg B)$                              | <u>附加前提</u>             |
| (2)  | $\neg B \vee D$                             | 前提                      |
| (3)  | $D$                                         | (1), (2); $I_{10}$      |
| (4)  | $(E \rightarrow \neg F) \rightarrow \neg D$ | 前提                      |
| (5)  | $\neg(E \rightarrow \neg F)$                | (3), (4); $E_6, I_{12}$ |
| (6)  | $\neg(\neg E \vee \neg F)$                  | (5); $E_{11}$           |
| (7)  | $E \wedge F$                                | (6); $E_{10}$           |
| (8)  | $E$                                         | (7); $I_1$              |
| (9)  | $\neg E$                                    | 前提                      |
| (10) | $E \wedge \neg E$                           | (8), (9); $I_9$         |

例 9-22 用两种以上方法证明

$$(P \rightarrow Q) \rightarrow R \Rightarrow (R \rightarrow P) \rightarrow (S \rightarrow P).$$

证法一  $((P \rightarrow Q) \rightarrow R) \rightarrow ((R \rightarrow P) \rightarrow (S \rightarrow P))$

$$\Leftrightarrow \neg(\neg(\neg P \vee Q) \vee R) \vee (\neg(\neg R \vee P) \vee (\neg S \vee P)) \quad E_{11}$$

$$\Leftrightarrow ((\neg P \vee Q) \wedge \neg R) \vee (R \wedge \neg P) \vee (\neg S \vee P) \quad E_6, E_{10}$$

$$\Leftrightarrow [((\neg P \vee Q) \vee (R \wedge \neg P)) \wedge (\neg R \vee (R \wedge \neg P))] \vee (\neg S \vee P) \quad E'_3$$

$$\Leftrightarrow [(Q \vee (\neg P \vee (R \wedge \neg P))) \wedge (\neg R \vee R) \wedge (\neg R \vee \neg P)] \vee (\neg S \vee P) \quad E_1, E_2, E'_3$$

$$\Leftrightarrow [(Q \vee \neg P) \wedge (\neg R \vee \neg P)] \vee (\neg S \vee P) \quad E_9, E_5, E'_4$$

$$\Leftrightarrow (Q \wedge \neg R) \vee \neg P \vee (\neg S \vee P) \quad E'_3$$

$$\Leftrightarrow (Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \vee P) \vee \neg S \quad E_1, E_2$$

$$\Leftrightarrow 1. \quad E_5, E_8$$

**证法二** 假定后件 $(R \rightarrow P) \rightarrow (S \rightarrow P)$ 为假, 则 $(R \rightarrow P)$ 为真且 $(S \rightarrow P)$ 为假. 由 $S \rightarrow P$ 为假可得 $S$ 为真,  $P$ 为假; 再根据 $R \rightarrow P$ 为真可得 $R$ 为假, 于是 $P \rightarrow Q$ 为真,  $(P \rightarrow Q) \rightarrow R$ 为假, 因此,  $(P \rightarrow Q) \rightarrow R \Rightarrow (R \rightarrow P) \rightarrow (S \rightarrow P)$ .

**证法三** 用形式证明如表 9-17 所示.

| 编 号 | 公 式                                               | 依 据                |
|-----|---------------------------------------------------|--------------------|
| (1) | $(P \rightarrow Q) \rightarrow R$                 | 前提                 |
| (2) | $R \rightarrow P$                                 | 附加前提               |
| (3) | $(P \rightarrow Q) \rightarrow P$                 | (1), (2); $I_{13}$ |
| (4) | $\neg(\neg P \vee Q) \vee P$                      | (3); $E_{11}$      |
| (5) | $(P \wedge \neg Q) \vee P$                        | (4); $E_{10}, E_6$ |
| (6) | $P$                                               | (5); $E_9$         |
| (7) | $S \rightarrow P$                                 | (6); $I_6$         |
| (8) | $(R \rightarrow P) \rightarrow (S \rightarrow P)$ | (2), (7); $CP$     |

例 9-26 形式证明  $P \rightarrow (Q \rightarrow R), S \rightarrow Q \Rightarrow P \rightarrow (S \rightarrow R)$ .

证 其推导过程如表 9-18 所示.

表 9-18

| 编 号 | 公 式                               | 依 据                |
|-----|-----------------------------------|--------------------|
| (1) | $P \rightarrow (Q \rightarrow R)$ | 前提                 |
| (2) | $P$                               | 附加前提               |
| (3) | $Q \rightarrow R$                 | (1), (2); $I_{11}$ |
| (4) | $S \rightarrow Q$                 | 前提                 |
| (5) | $S \rightarrow R$                 | (3), (4); $I_{13}$ |
| (6) | $P \rightarrow (S \rightarrow R)$ | (2), (5); $CP$ 规则  |

# END