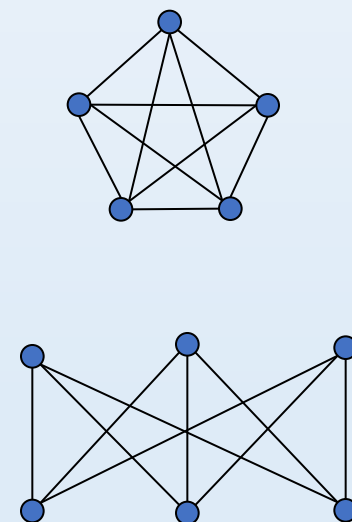
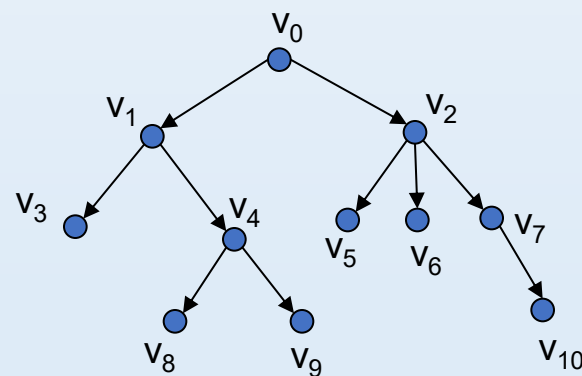
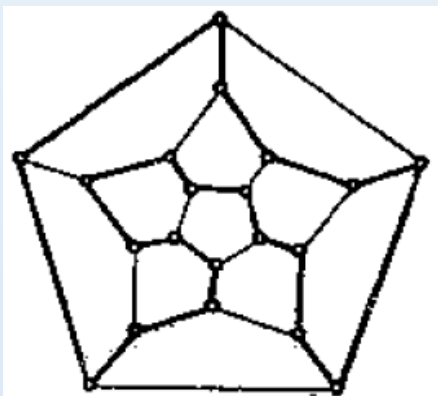
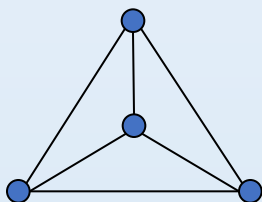


离散数学

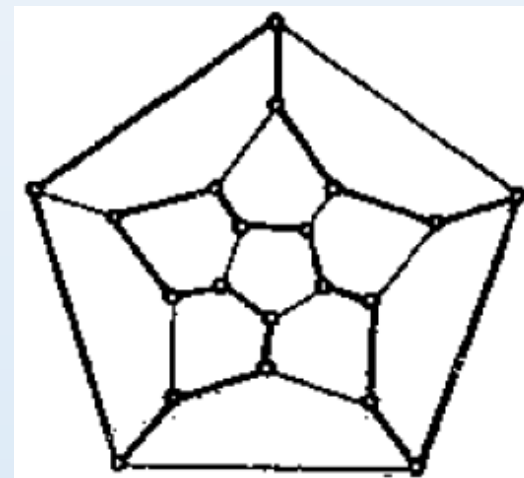
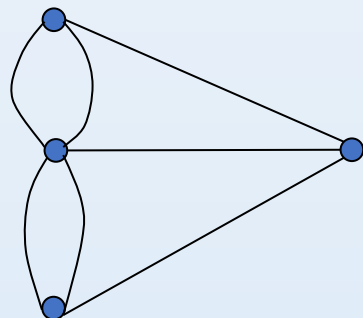
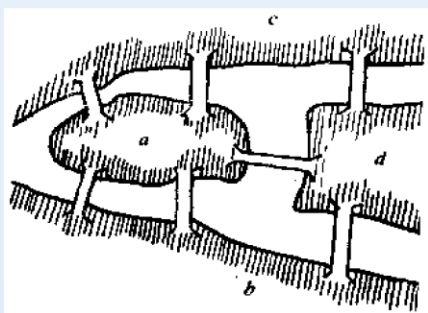
Discrete Mathematics

第八章 图论



第八章 图论

图论是一个古老的数学学科，有许多著名的古典问题：**欧拉的七桥问题**，邮递员问题，一笔画问题，**旅行商问题**，四色定理（地图染色），加权图中的最短道路等。印刷电路的布线，电子地图寻找最短道路。

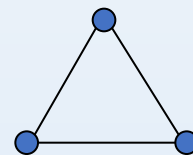
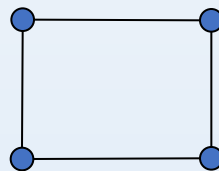
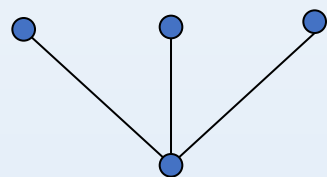


§ 8.1 基本概念

图由点和边构成，点和边是图的两个要素。

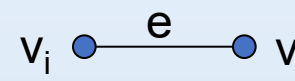
定义

定义8-1 图： 设 V 是一个非空有限集合， E 是 V 上的一个二元关系，则有序二元组 (V, E) ，记 $G=(V, E)$ ，称为**图**。其中 V 称为**结点集**， E 称为**边集**。



(n, m) 图： $\#V=n$ ， $\#E=m$ 。 $(n, 0)$ **零图**， $(1, 0)$ **平凡图**。

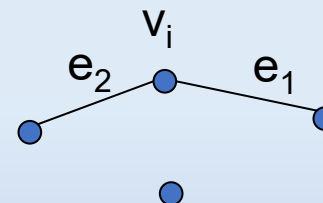
邻接点： 点 v_i 与点 v_j 邻接



关联： 边 e 与点 v_i 及 v_j 关联

邻接边： 两条边关联同一个点

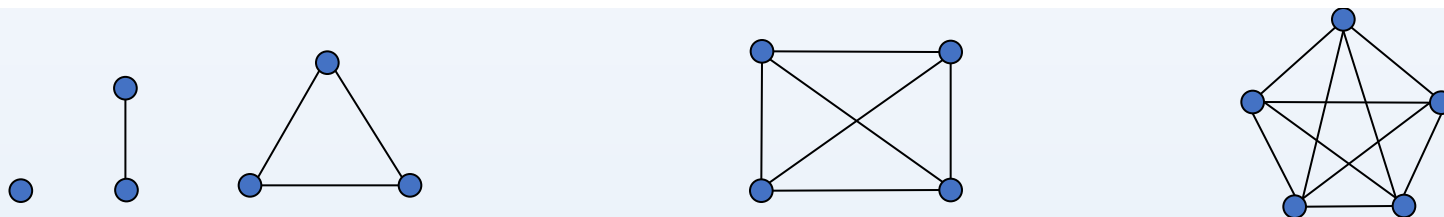
孤立点： 没有点与之邻接，或没有边与之关联。



孤立边： 没有边与之邻接。

定义

定义8-2 完全图：任意两点都是邻接的（任意两点都有边相连）。N个结点的完全图记为 K_n 。



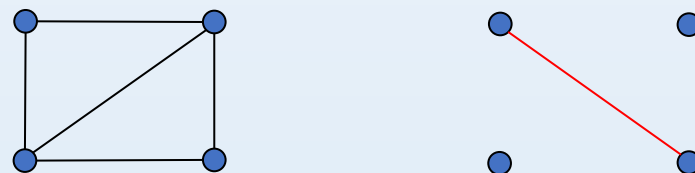
完全图的边数结点数关系

$$m = C_n^2 = n(n-1)/2$$

定义

定义8-3 补图：由图G的所有结点和为了使图G成为完全图所需添加的所有边构成的图，记 $\overline{G}$ 。

图与补图互为补图。



若将完全图的边集看作全集的话，图与补图的边集互为补集。

$$K_n = (V, E), \quad G = (V, E_1), \quad \overline{G} = (V, E_2) \Rightarrow E_1' = E_2$$

结点度：与一个点(v_i)相关联的边数—— $\text{deg}(v_i)$ 。

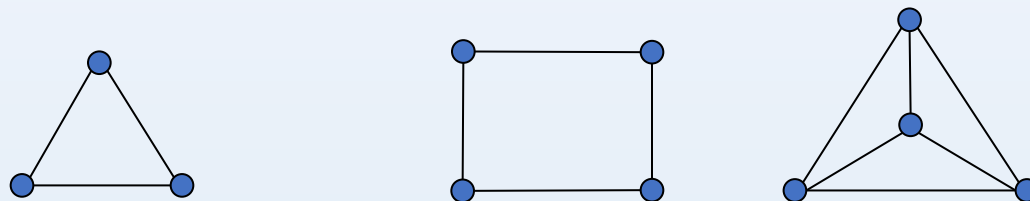
对 (n,m) 图，有

$$\sum_{i=1}^n \text{deg}(v_i) = 2m$$

定义

定义8-4 正则图：所有的结点的度相同，称正则图。若度为 d ，称 d 次正则图。

完全图是正则图。

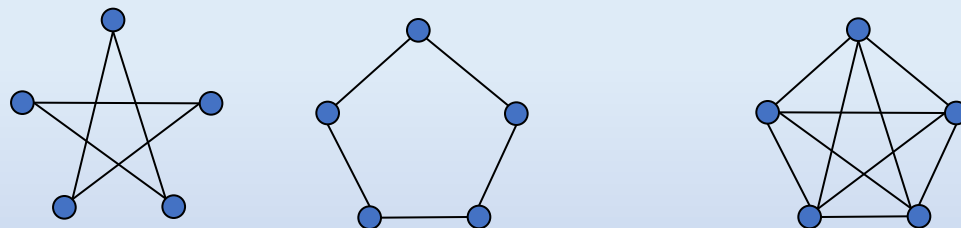


定义

定义8-6 子图： $G_1=(V_1,E_1)$ ， $G_2=(V_2,E_2)$ ， 若 $V_2 \subseteq V_1$ ， $E_2 \subseteq E_1$ ， 则称 G_2 是 G_1 的子图，
记 $G_2 \subseteq G_1$ 。

真子图： 若 $V_2 \subseteq V_1$ ， $E_2 \subset E_1$ ， 则称 G_2 是 G_1 的真子图。

生成子图： 若 $V_2 = V_1$ ， $E_2 \subseteq E_1$ ， 则称 G_2 是 G_1 的**生成子图**。



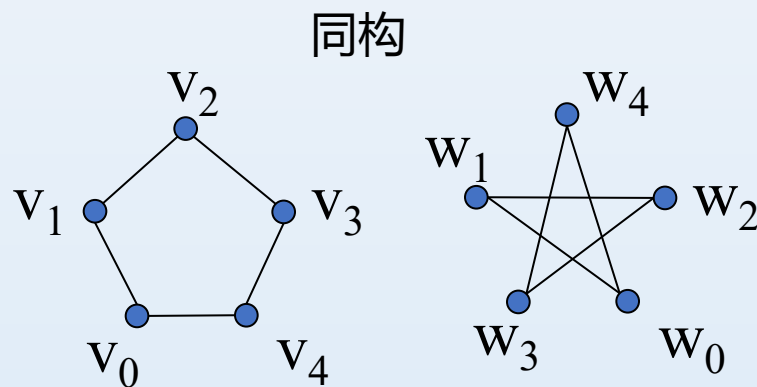
生成子图

定义8-5 两图同构: $G_1=(V_1,E_1)$, $G_2=(V_2,E_2)$, 若存在一个双射

$$h: V_1 \rightarrow V_2,$$

使得当且仅当 $\{v_i, v_j\}$ 是 G_1 中的边时, $\{h(v_i), h(v_j)\}$ 是 G_2 中的边,

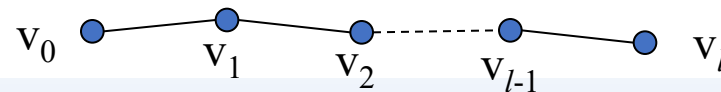
则称 G_2 同构与 G_1 。



定义

路：图G中相邻边的序列 $\{v_0, v_1\}, \{v_1, v_2\}, \dots, \{v_{l-1}, v_l\}$ 称为 v_0 到 v_l 的路，边的数目 l 称为路的长度。

路也可表示为： $v_0, v_1, v_2, \dots, v_{l-1}, v_l$

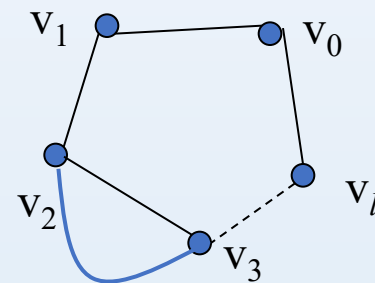


开路：起点和终点不相同 $v_0, v_1, v_2, \dots, v_{l-1}, v_l$

回路：起点和终点相同 $v_0, v_1, v_2, v_3, v_2, v_3, \dots, v_l, v_0$

环：回路上除了起点和终点外，没有相同的结点。

$v_0, v_1, v_2, v_3, \dots, v_l, v_0$



真路：路上没有相同的**结点**。

v_0, v_1, v_2, v_3, v_4

真路必为开路。

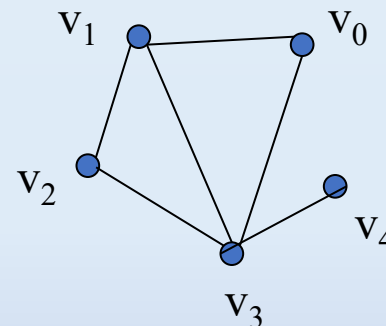
简单道路：路上无相同的**边**。

$v_0, v_3, v_1, v_2, v_3, v_4$

短程：两点间最短的道路。短程的长度称**距离** $d(v_i, v_j)$ 。

v_0, v_3, v_4 ✓

v_0, v_1, v_2, v_3, v_4 ✗



定理8-1: n 个结点的图 G 中, 若 v_i 到 v_j 有路, 则其短程是一条长度 $l \leq n-1$ 的真路。

证明: 设 v_i 到 v_j 的路为

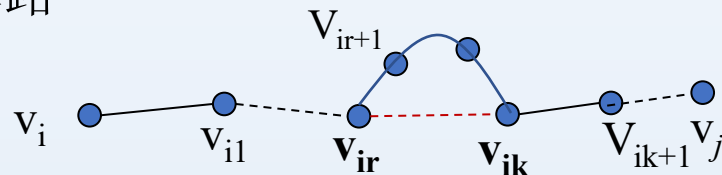
$$v_i, v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{ir}, v_{r+1}, \dots, v_{ik}, v_{ik+1}, \dots, v_{il-1}, v_j$$

若有相同的结点, 即 $v_{ir} = v_{ik}$, 则去掉路

$$v_{ir+1}, v_{ir+2}, \dots, v_{ik}$$

后, 路

$$v_i, v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{ir}, v_{ik+1}, \dots, v_{il-1}, v_j$$



仍为 v_i 到 v_j 的路, 只是长度较短。因此, 去掉所有回路后, 路上没有相同的结点, 为真路, 而真路的长度必不大于 $n-1$ 。若 $l \geq n$, 则路上结点的数目为 $l+1 \geq n+1$, 但不同的结点数只有 n 个, 因此必有两个是相同的, 与真路矛盾。

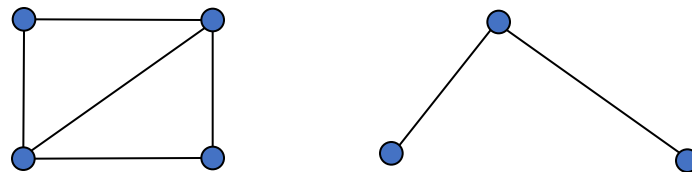
推论: n 个结点的图 G 中, 环的长度不大于 n 。

连接性 (可达的): 若 v_i 到 v_j 有路, 称 v_i 与 v_j 是连通的 (可达的)。

定义

定义8-7 连通图与不连通图：图中任意两点都是连通的，或任意两点有路相连，称图是连通的，否则，称不连通的。

分图：

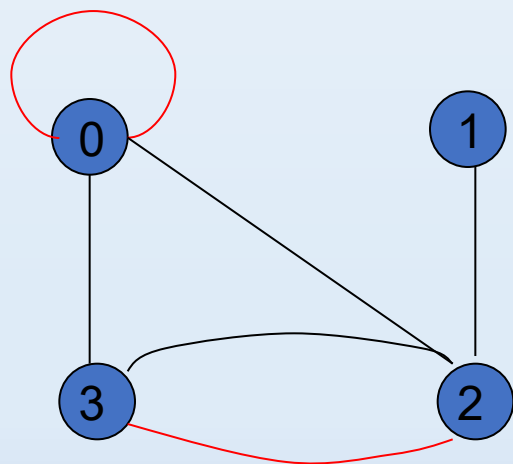


定义

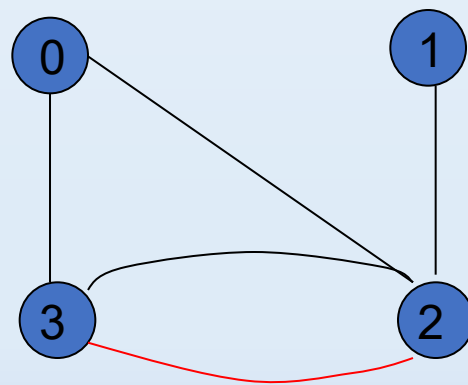
伪图： $G=(V, E)$ ， V 有限， E 是多重集。即有自回路，多重边(两点间有多条边)。

多重图：无自回路，有多重边。

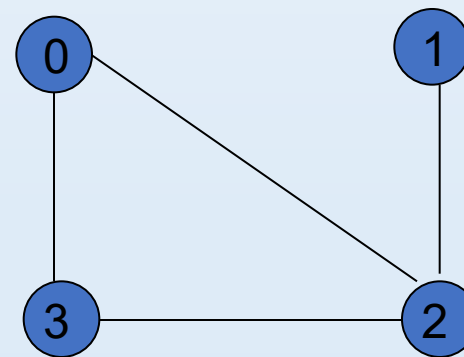
简单图：无自回路，无多重边。



伪图



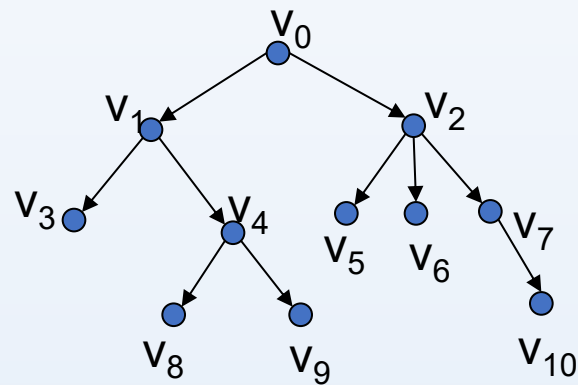
多重图



简单图

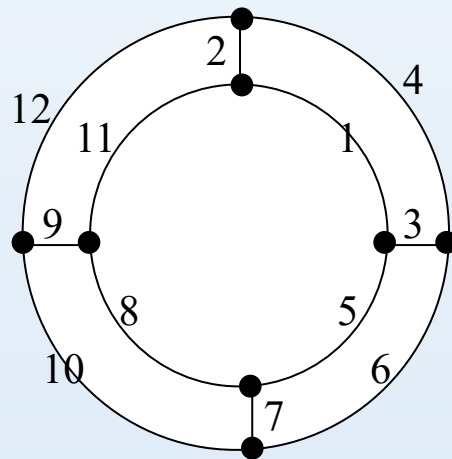
有向图：边是有向边，即 $\{v_i, v_j\}$ 是有序对， $\{v_i, v_j\} \neq \{v_j, v_i\}$ 。

集合的关系图就是一个有向图。



有权图：每一条边都指定了权。

如交通图，计算机网络，自来水管网。



有权图可用三元有序组表示： $G=(V, E, f)$ 。

f 是权的集合， $f=f(E)$ 。

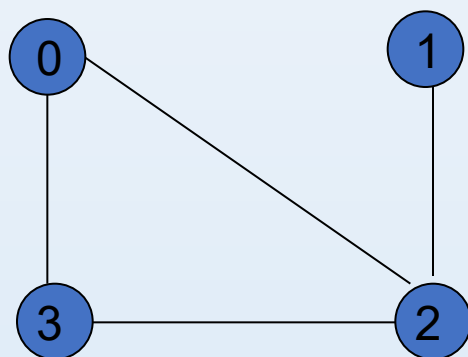
§8.2 图的矩阵表示

定义8-8 **邻接矩阵**: 同**关系矩阵**。 $G=(V, E)$, $V=\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 。 定义**邻接矩阵**

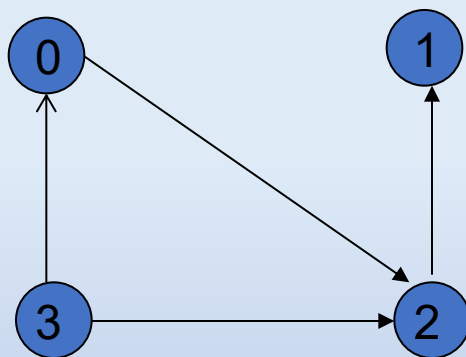
定义

$$A = (a_{ij})_{n \times n} \quad a_{ij} = \begin{cases} 1 & \{v_i, v_j\} \in E \\ 0 & \{v_i, v_j\} \notin E \end{cases}$$

若不是有向图，则矩阵必然对称。



$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



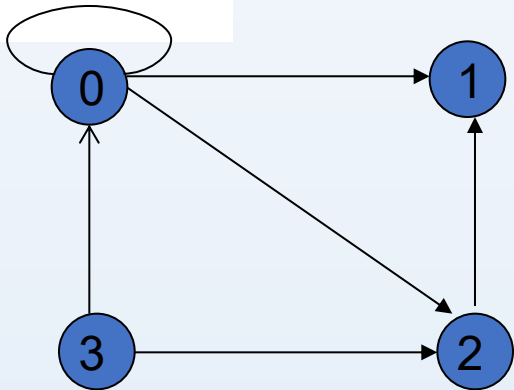
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

矩阵相乘

$$A^l = A \times A \times \cdots \times A = (a_{ij}^{(l)})$$

定理8-2 元素 $(a_{ij}^{(l)})$ 是连接 v_i 到 v_j 、长度为 l 的路的总数。
使 $(a_{ij}^{(l)}) \neq 0$ 的最小 l 为距离。

$$A^2 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \times \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$



矩阵: $\tilde{A} = A^1 + A^2 + \cdots + A^{n-1} = (\tilde{a}_{ij})$

的元素 $\tilde{a}_{ij}$ 为连接 v_i 到 v_j 的路的总数，若 $\tilde{a}_{ij}$ 为0，则无路相通。

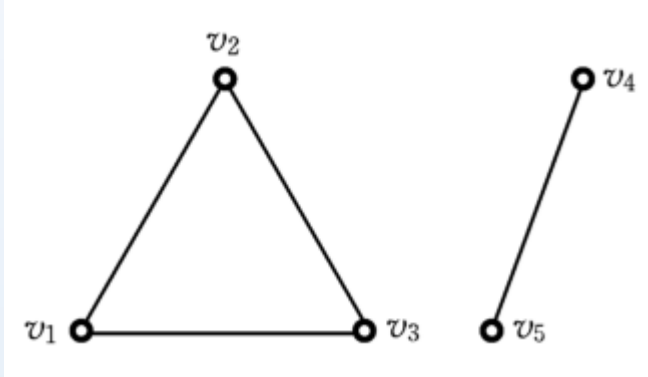
定义8-9 连接矩阵 $C = A[+]A^{(2)}[+] \cdots [+]A^{(n)}$

矩阵运算为布尔运算，同关系矩阵的运算。

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

连接矩阵可用于判断两点间的连通性和图的连通性。连接矩阵就是求传递闭包。

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



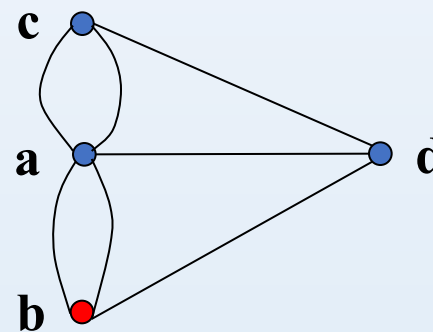
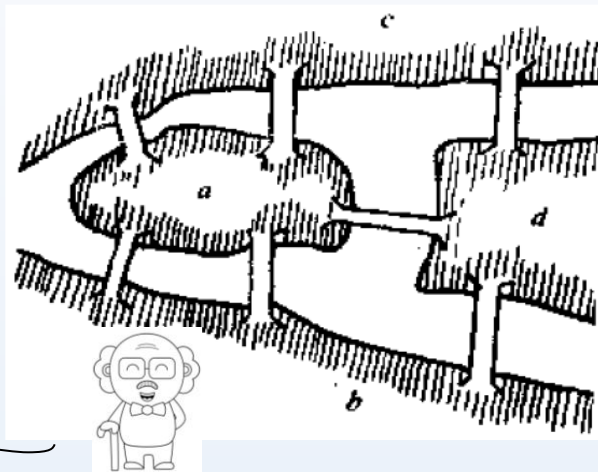
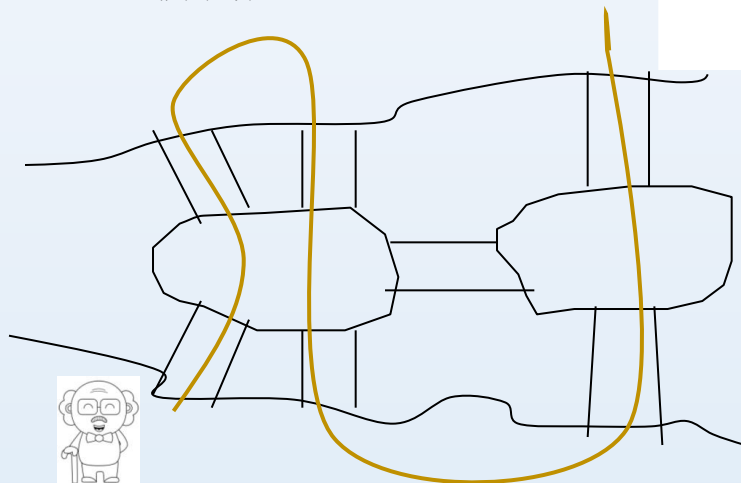
$$\mathbf{C} = \mathbf{A} [+] \mathbf{A}^{(2)} [+] \mathbf{A}^{(3)} [+] \mathbf{A}^{(4)} [+] \mathbf{A}^{(5)}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

§ 8.4 欧拉图和哈密顿图

欧拉图

七桥问题：

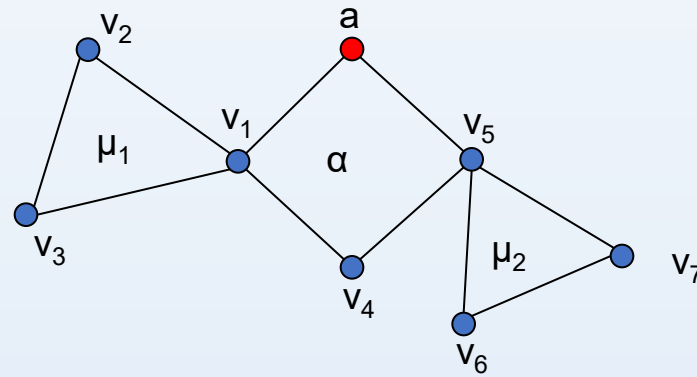


欧拉回路：所有的边都在出现回路上，且出现一次。或从一点出发经过所有的边，且只经过一次，然后回到起点。

欧拉图：具有欧拉回路的图。

考察一个回路，回路上所有的点都和两条边关联，即一个点的度为2，考虑到回路上有相同的点，每个点的度应为偶数。

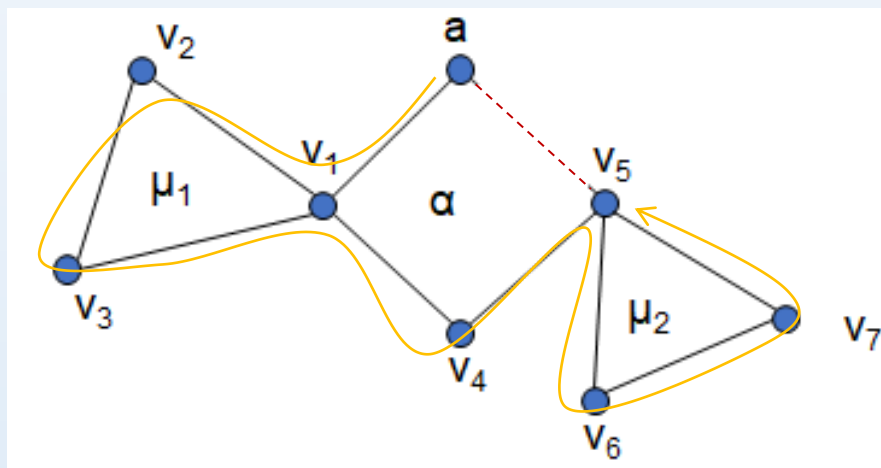
定理8-6 欧拉定理：一个连通图G为欧拉图的充要条件是G的每一个结点的度均为偶数。



$$\begin{aligned}
 av_1v_2v_3v_1v_4v_5v_6v_7v_5a &= av_1v_4v_5a + v_1v_2v_3v_1 + v_5v_6v_7v_5 \\
 &= \alpha [a, v_1] + \mu_1 + \alpha [v_1, v_5] + \mu_2 + \alpha [v_5, a] \\
 v_1 \text{ 和 } v_5 &\text{ 是回路的公共结点。}
 \end{aligned}$$

欧拉路：通过所有边，且只通过一次的开路。

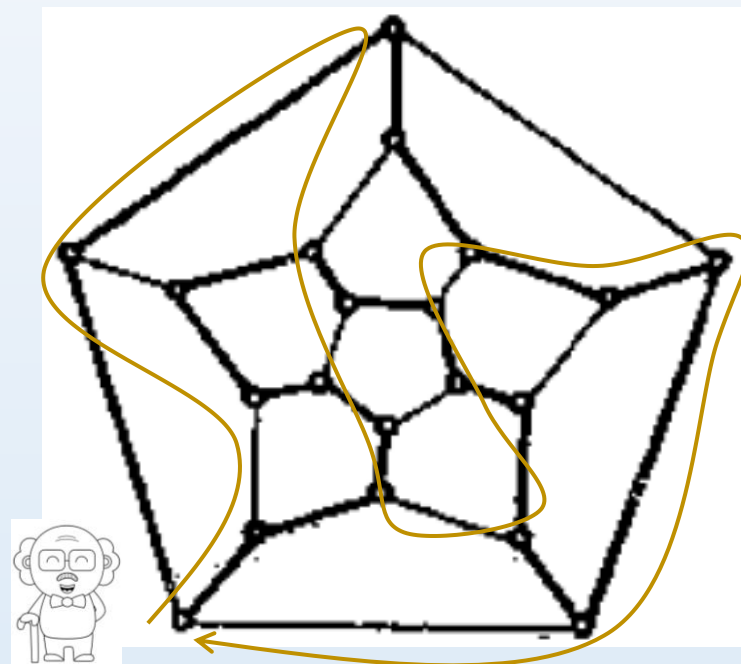
定理8-7：连通图具有欧拉路的条件充要条件是仅有两个奇数结点，其中一个奇数结点为起点，另一个奇数结点为终点。



证明：将两奇数结点用一条边连接起来，图的所有结点的度都成为偶数，该图必然有一欧拉回路，再将回路中增加上去、连接两奇数结点的边去掉，回路成为一条经过所有边的开路，即欧拉路。

哈密顿图

周游世界问题：将一个正十二面体看成地球，它的二十个结点看成地球上的城市，能否找到一条旅行线路，从一个城市出发，经过每一个城市，且只经过一次，最后回到原城市。答案是存在的。



哈密顿环：经过图中所有的点，且经过一次的回路，该回路上所有的点都不相同，也是环。

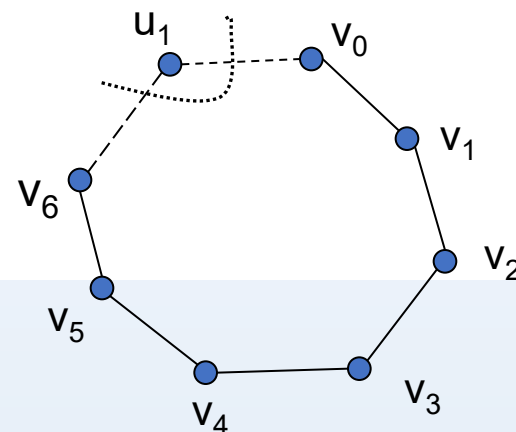
哈密顿图：存在哈密顿环的图。

哈密顿图是否有欧拉图那样的充分必要条件？答案是不存在。

定理8-8（必要条件）：若图 $G=(V,E)$ 是哈密顿图，则对于 V 的任意一个非空子集 S ，有

$$W(G-S) \leq \#S \quad (\text{剩余分图数小于删去的点数})$$

$W(G-S)$ 是 $G-S$ 中分图的数目。



证明： 设

$$\alpha = v_0 v_1 v_2 \dots v_{n-1} v_0$$

是图 G 的哈密顿环，在 α 中删去 S 中的任意一个节点 u_1 ，则 $\alpha - u_1$ 是一条开路，所以 $W(\alpha - u_1) = 1$ ；若再删去 S 中的一个结点 u_2 ，则 $W(\alpha - \{u_1, u_2\}) \leq 2, \dots$ ，当删去 S 中的第 r 个结点时， $W(\alpha - \{u_1, u_2, \dots, u_r\}) \leq r$ ，

因此当删去 S 中所有的结点后， $W(\alpha - S) \leq \#S$ ，而 $\alpha - S$ 是 $G-S$ 的一个生成子图，必有 $W(G-S) \leq W(\alpha - S)$ ，于是得到 $W(G-S) \leq \#S$

定理8-9: 设 G 是有 n 个结点的图, 若对于图中任意不相邻的结点 u 和 v , 有

$$\deg(u) + \deg(v) \geq n$$

则, 当且仅当图 $G + \{u, v\}$ 是哈密顿图时, 图 G 是哈密顿图。

证明:

必要性: 设 G 是哈密顿图, 则增加一条边, 不影响哈密顿环, $G + \{u, v\}$ 显然是哈密顿图。

充分性: 设 $G + \{u, v\}$ 是哈密顿图, 则存在哈密顿环

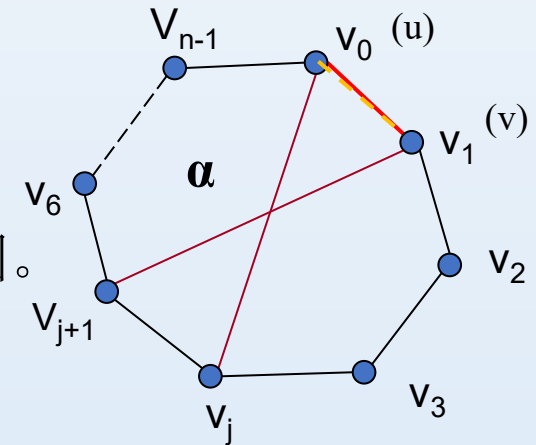
$$\alpha = v_0 v_1 v_2 \dots v_{n-1} v_0$$

(1) 若边 $\{u, v\}$ 不在环 α 上, 则 α 也是图 G 的哈密顿环, 图 G 是哈密顿图。

(2) 若边 $\{u, v\}$ 在哈密顿环上, 设 $v_0 = u$, $v_1 = v$, 哈密顿环可写为

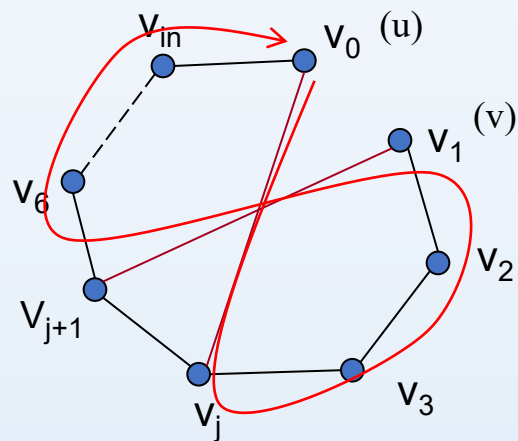
$$\alpha = u v v_2 \dots v_{n-1} u$$

此时若存在 j , 使得 u 与 v_j 相邻, v 与 v_{j+1} 相邻



使得去掉边 $\{u,v\}$ 后, 仍可重构哈密顿环

$$\beta = uv_j v_{j-1} \dots v_2 v v_{j+1} v_{j+2} \dots v_{n-1} u$$



即图G是哈密顿图。

若不存在, 因u与 $\deg(u)$ 个结点相邻, 则v与 $\deg(u)$ 个结点不相邻, 故

$$\deg(v) \leq n-1 - \deg(u)$$

$$\deg(v) + \deg(u) \leq n-1$$

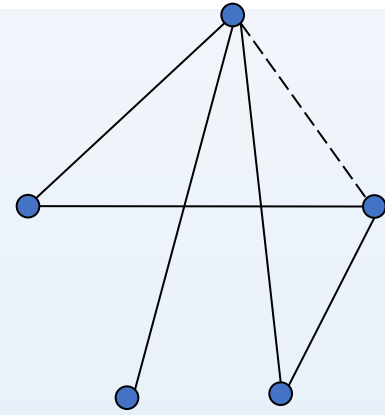
与前提 $\deg(u) + \deg(v) \geq n$ 矛盾。

因此可重构哈密顿环。

定义8-8 闭图： 设 G 是具有 n 个结点的图，若对于 $\deg(u)+\deg(v)\geq n$ 的每一对结点，均有 u 与 v 相邻接，称图 G 是闭图。

定义8-10 闭包： 包含图 G ，且边最少的闭图 G_c 。

- (1) 图 G 是 G_c 的生成子图；
- (2) G_c 是闭图；
- (3) 若存在闭图 H ，满足 $G\subseteq H$ ，则 $G\subseteq G_c\subseteq H$ 。



定理8-12 当且仅当图 G 的闭包 G_c 是哈密顿图时，图 G 是哈密顿图。

由于完全图是哈密顿图，因此有

推论1： 若图的闭包是完全图 K_n ，且 $n\geq 3$ ，则该图一定是哈密顿图。

推论2： 图 $G=(V,E)$ ， $\#V\geq 3$ ，若对于任意的 $v\in V$ ，有 $\deg(v)\geq n/2$ ， G 是哈密顿图。

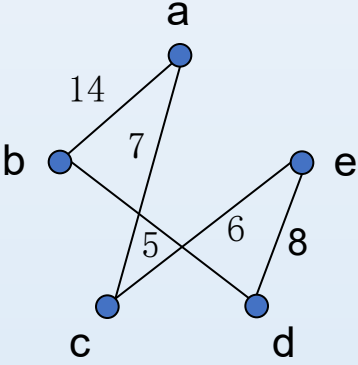
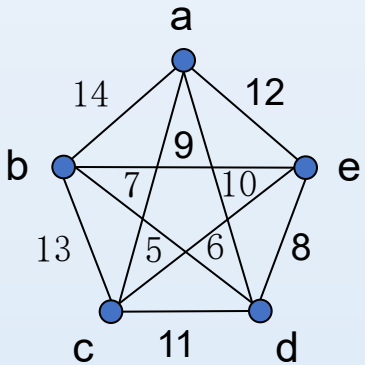
推论3： 图 $G=(V,E)$ ， $\#V\geq 3$ ，若对于任意不相邻结点 u 和 v ，均有

$$\deg(u)+\deg(v)\geq n$$

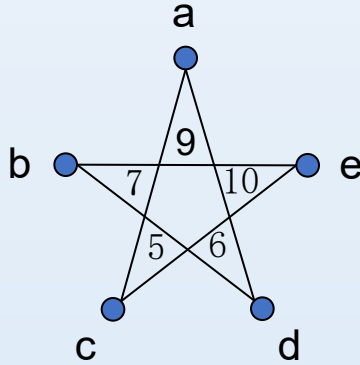
则 G 是哈密顿图。

流动售货员问题：找一条最短道路，走遍公司附近所有城镇，返回公司。假定任意两城镇之间有路相通，则问题为在加权完全图中找权最小的哈密顿环。

最近邻算法：在没有经过的城镇中找最邻近的作为下一个要经过的城市。



$$14+5+8+6+7=40$$



$$7+6+9+5+10=37$$

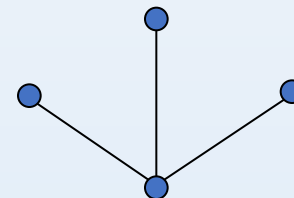
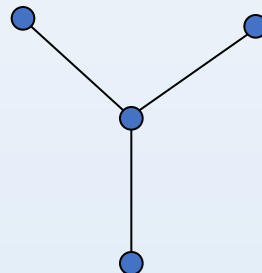
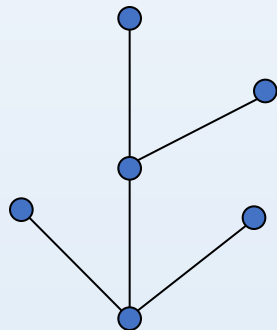
最近邻算法给出的哈密顿环不一定是最短的，但它的运算量较小。

§ 8.5 树

定义

定义8-21 **树**：不含回路的连通图 (n, m) 。要点：**不含回路，连通。**

树林：不含回路的图。 要点：不含回路。



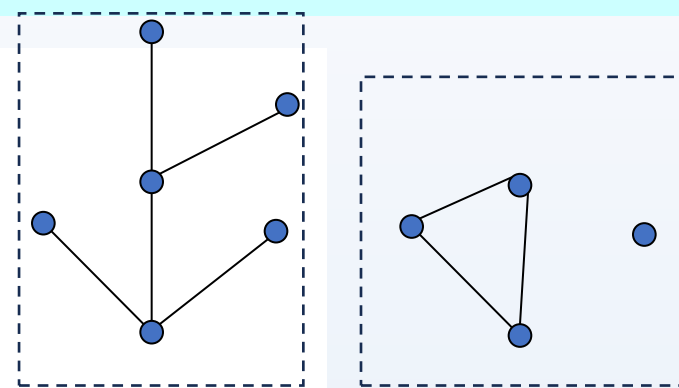
树叶：度为1的结点。

枝点：度大于1的结点。

边和点的关系： **$m=n-1$** 。

树的等价定义（性质）：

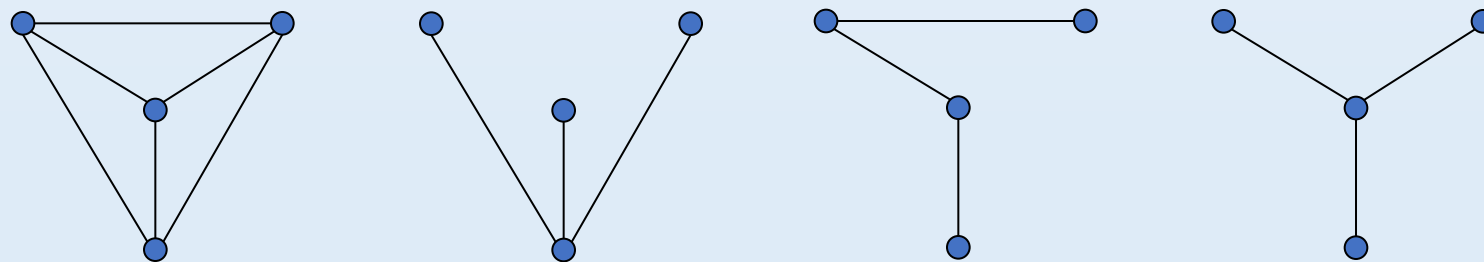
- (1) 定理8-13：任意两点间有唯一一条真路相连的图。
- (2) $m=n-1$ 的连通图。如右图
- (3) 定理8-14： $m=n-1$ 、且无环的图。
- (4) 图连通，但删除任意一条边，图不连通。
- (5) 图中无回路，但在任意不相邻结点间增加一条边，产生回路。



生成树：若连通图 $G=(V,E)$ 的生成子图 T_G 是树，则 T_G 称为生成树。

枝：生成树 T_G 中的边。

弦：图 G 中不在 T_G 中的边。



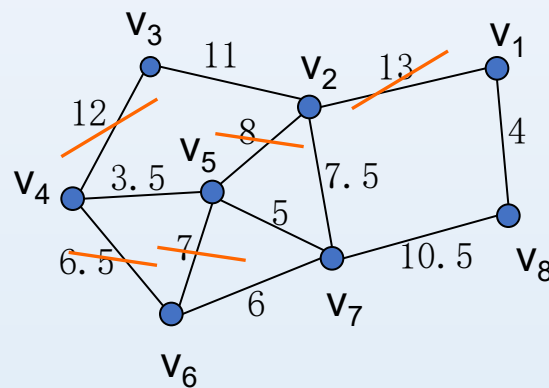
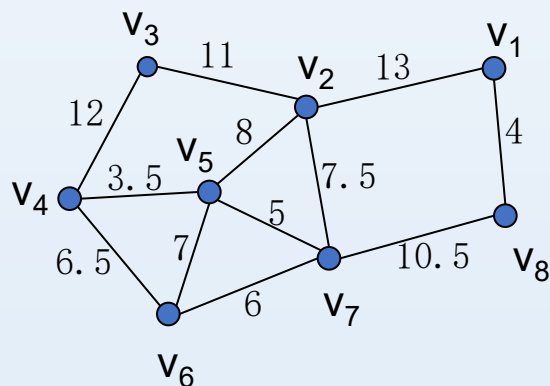
一个连通图的生成树可能有多棵。

最小生成树： 加权连通图的所有生成树中，权最小的。

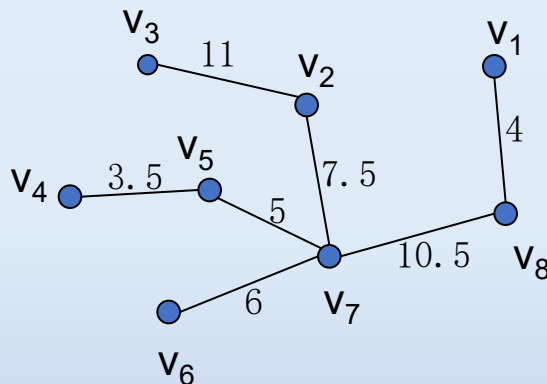
城市的煤气管网，自来水管网等。

最小生成树的求法

(1) 将边按权从大到小逐次删除，每删除一条边，判断一下图是否连通，若连通则删去，若不连通则保留。

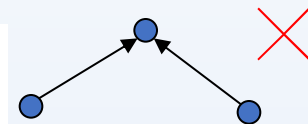


(2) 将边按权从小到大排列，然后逐次选取，增加到图中。若增加后，图产生回路则不选取。



§8.6 有向树

定义8-22 有向树：若有向图对应的无向图为树，且只有一个结点的进度为0，其余结点的进度为1，称为有向树。

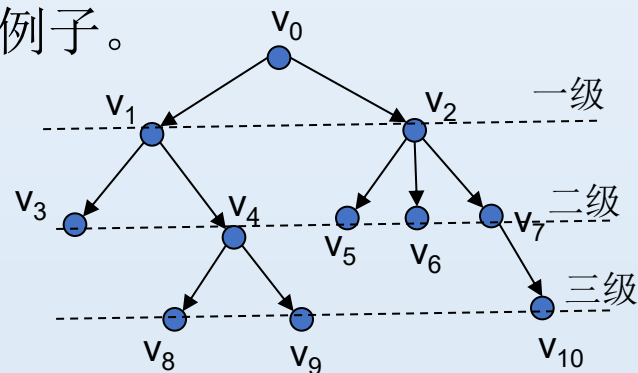


根：有向树中进度为0的结点称为根。

叶：有向树中出度为0的结点称为叶。

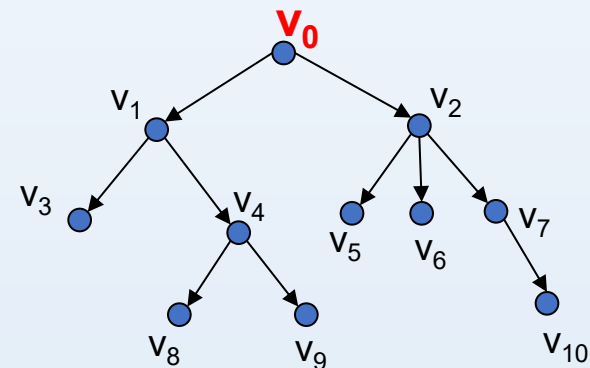
枝点：除叶以外（出度不为0）的所有结点。

家谱、目录、通信的前缀码、计算机网的树形结构都是有向树的例子。



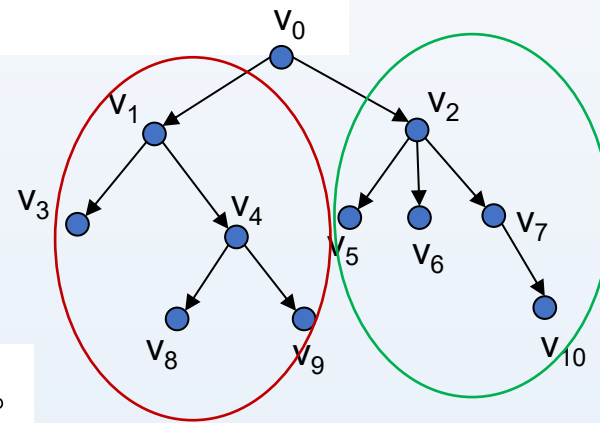
v_0 树根， v_1, v_2 称一级结点， v_3, v_4, v_5, v_6, v_7 称二级结点， v_8, v_9, v_{10} 称三级结点。

父亲结点，儿子结点，孙子结点，兄弟，祖先，后裔。



子树：有向树 T 的枝点 v 和它的所有后裔构成的结点集 V' ，和 v 以下的所有边集 E' 构成的子图 $T'=(V', E')$ ，称为以 v 为根的子树。

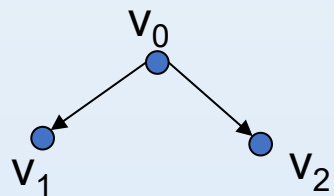
右图 v_0 有两棵子树，以 v_1 为根的**左子树**和以 v_2 为根的**右子树**。



定义8-23 m元树：每一个结点的出度都小于或等于 m 的树。

完全m元树：每一个枝点的出度都等于 m 的树。

二元搜索树：通过二元树的每一个结点，且只通过一次。例如搜索目录。



(1) 先根通过：根 $v_0 \rightarrow$ 左子树 $v_1 \rightarrow$ 右子树 v_2

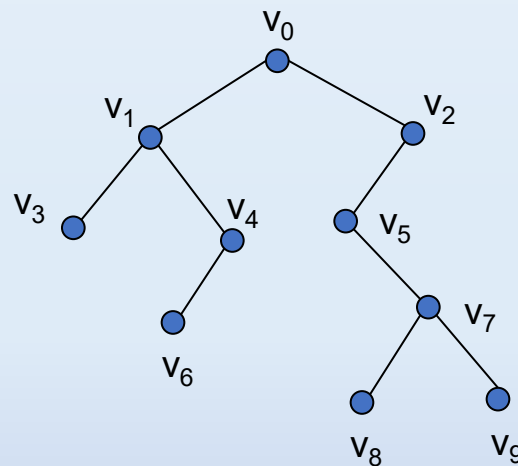
(2) 中根通过：左子树 $v_1 \rightarrow$ 根 $v_0 \rightarrow$ 右子树 v_2

(3) 后根通过：左子树 $v_1 \rightarrow$ 右子树 $v_2 \rightarrow$ 根 v_0

先根： $v_0 v_1 v_3 v_4 v_6 v_2 v_5 v_7 v_8 v_9$

中根： $v_3 v_1 v_6 v_4 v_0 v_5 v_8 v_7 v_9 v_2$

后根： $v_3 v_6 v_4 v_1 v_8 v_9 v_7 v_5 v_2 v_0$

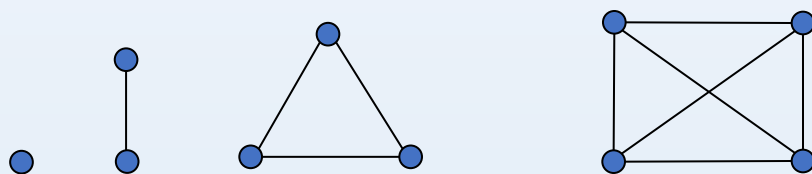


§8.8 平面图

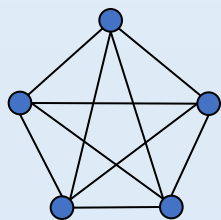
平面图

定义8-28 平面图：能画在一个平面上，而边无任何交叉的图。

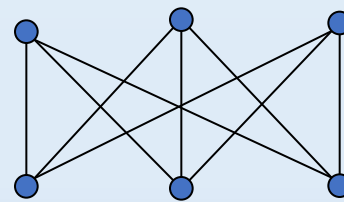
例 印刷电路；1、2、3、4结点完全图是平面图。



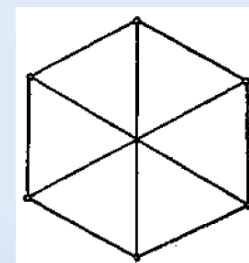
五结点完全图、三管道图是典型的非平面图。



五结点完全图



三管道图

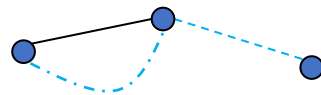


定理8-26 欧拉定理：若G是一连通的平面图，则

$$n - m + k = 2$$

n, m, k 分别是结点数、边数、面数。

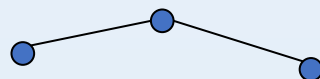
欧拉定理反映了结点数、边数和面数之间的关系。（每增加一条边，要么增加一个节点，要么增加一个面）



推论 定理8-27 在有两条或更多条边的平面（简单）图中，有

$$m \leq 3n - 6$$

证明：m=2时，n=3，不等式成立。



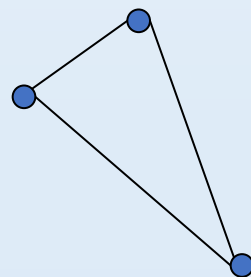
m≥3时，因每个面至少有3条边围成，而每条边属于相邻的两个面，所以

$$m/3 \geq k/2 \quad \rightarrow \quad 2m \geq 3k$$

有欧拉公式可得 $k = 2 - n + m$

代入不等式 $2m \geq 6 - 3n + 3m$

移项得 $m \leq 3n - 6$



若每个面至少有 l 条边围成，则

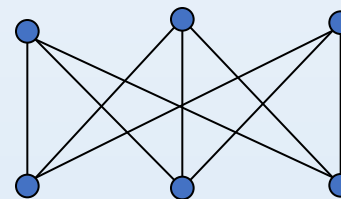
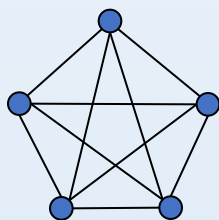
$$2m \geq lk \quad (\text{前面: } 2m \geq 3k)$$

由欧拉公式得 $2m \geq l(2-n+m) = l(2-n) + lm$

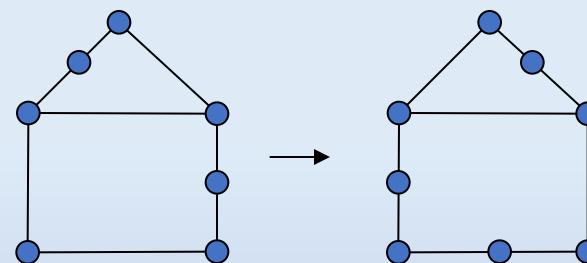
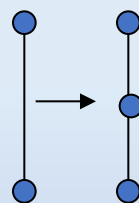
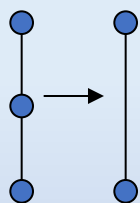
$$l(n-2) \geq (l-2)m$$

$$m \leq l(n-2)/(l-2)$$

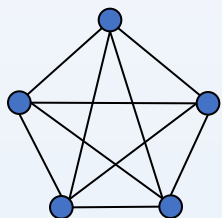
欧拉定理和推论都是必要条件，可用于判定一个图是非平面图。例如五结点完全图 ($n=5, m=10, 10 \leq 3 \cdot 5 - 6 = 9$ ✗) 和三管道图 ($n=6, m=9, l=4; 9 \leq 4(6-2)/(4-2) = 8$ ✗)。



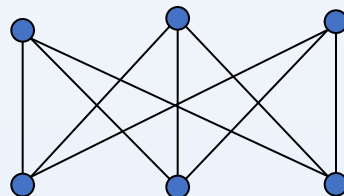
在度2结点内同构：插入或删除度为2的结点，两图能成为同构的图。



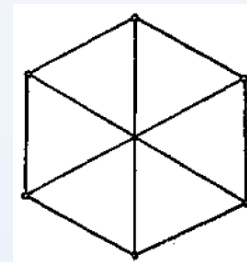
定理8-28 库氏定理：一个图是平面图的充分必要条件是**没有**在度2结点内与库氏图同构的子图。库氏图是五结点完全图和三管道图。



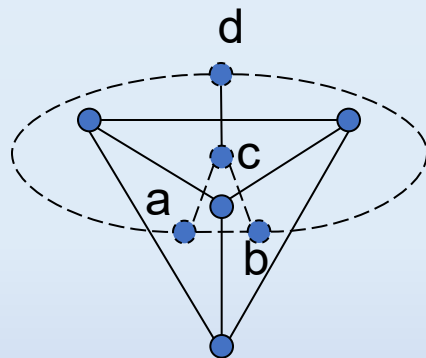
五结点完全图



三管道图



对偶图：平面的面作为点，相邻两个面用横跨边界的边连接起来，得到图称对偶图。可将面的染色问题转化为结点的染色问题。四色问题。



构成一单个环的图称为**封闭折线**。一**封闭折线图**是一平面图，可归纳地定义如下：

〈基础〉一封闭折线是一封闭折线图。

〈归纳步〉设 $G = (V, E)$ 是一封闭折线图，又设 $\alpha = v_i v_{i+1} v_{i+2} \dots v_{i+l-1} v_i$ 为不与 G 交叉的任一真路（长 $l \geq 1$ ），其中 $v_i, v_j \in V$ ，但 $v_r \notin V$ ($r = 1, 2, \dots, l-1$)，那么由 G 和 α 组成的图，即图 $(\bar{V}, \bar{E})$ ，其中

$$\bar{V} = V \cup \{v_{i+1}, v_{i+2}, \dots, v_{i+l-1}\},$$

$$\bar{E} = E \cup \{\{v_i, v_{i+1}\}, \{v_{i+1}, v_{i+2}\}, \dots, \{v_{i+l-1}, v_i\}\},$$

也是一封闭折线图。

由封闭折线图的定义可知，它是一平面图（可能为多重图，因为长为2的环是允许的）。图8-47是一封闭折线图的例。

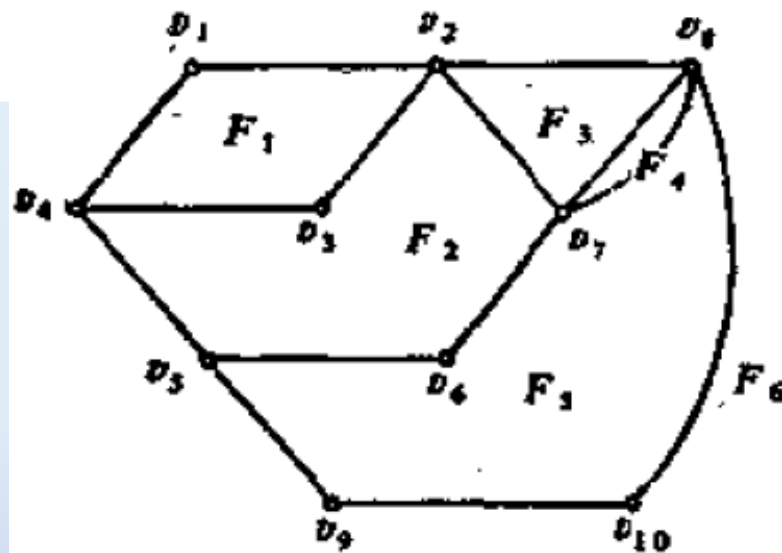


图8-47

与封闭折线图有关的一著名问题是“4 色猜想”问题，即每一封闭折线图能用 4 种不同的颜色来着色，使任何两个相邻的面（包括无限面）具有不同的颜色。这个问题提出于上一世纪中期，经过许多数学家的努力，终于在1976年为爱普尔 (K. I. Appel)，黑肯 (W. Haken) 和考西 (J. Koch) 利用电子计算机的帮助得到了证明。在探求这一问题证明的漫长过程中，获得了图论和有关领域中许多重要的成果。



作业

4, 6, 15, 16, 19, 31, 33, 37, 45

内容提要

1. 图的基本概念

- 图、 n 阶图、 (n, m) 图、无向图、有向图、伪图、多重图、简单图；
- 边关联结点、结点关联边、结点的邻接、边的邻接、孤立点、孤立边；
- 完全图、补图、结点的度数、正则图；
- 子图、真子图、生成子图、图的同构。

2. 图中的边数分别与结点度数、结点个数间的关系

- 握手定理——在 (n, m) 图中, $\sum_{i=1}^n \deg(v_i) = 2m$;
- n 阶完全图 K_n 中, $m = \frac{1}{2}n(n-1)$.

3. 路

- 开路、回路、真路、环路、链、闭链；
- 结点间的连接、连通图、连通子图、分图；
- 短程、距离(n 阶图中, $d(v_i, v_j) \leq (n-1)$)；
- ~~• 有向图的弱连通、单向连通、强连通.~~

4. 图的矩阵表示

- 邻接矩阵 A ；
- 连接矩阵 C .

6. 欧拉图和哈密顿图

- 欧拉图、欧拉回路、欧拉路；
- 欧拉定理；
- 哈密顿环、哈密顿图、哈密顿路、闭图、闭包；
- 哈密顿图的判定条件、最邻接方法.

7. 树 $m = n - 1$ 的连通图

- 树、树林、树叶；
- 树的性质及判定条件；
- 生成树、最小生成树.

8. 有向树

- 根、分支结点、叶结点、级、子树；
- m 元树、完全 m 元树、二元树、完全二元树；
- 树的扫描.

10. 平面图

- 平面图、面、边界、有限面、无限面、面的相邻；
- 欧拉公式；
- Kuratowski 定理.

例题讲解

例 8-1 设 $G=(V,E)$ 是一无向图, $V=\{v_1, v_2, \dots, v_8\}$, $E=\{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_1\}, \{v_1, v_5\}, \{v_5, v_4\}, \{v_4, v_3\}, \{v_7, v_8\}\}$.

- (1) 画出 G 的图解;
- (2) 指出与 v_3 邻接的结点, 以及和 V_3 关联的边;
- (3) 指出与 e_1 邻接的边 和与 e_1 关联的结点;
- (4) 该图是否有孤立结点和孤立边?
- (5) 求出各结点的度数, 并判断是否是完全图和正则图;
- (6) 该 (n,m) 图中, $n=?$, $m=?$

解 (1) 所给图 G 的一个图解如图 8-1 所示.

(2) v_1, v_2, v_4 均与 v_3 邻接, v_3 关联边 e_1, e_2, e_3 .

(3) 边 e_2, e_3, e_4 均与 e_1 邻接, e_1 关联结点 v_2, v_3 .

(4) v_6 是孤立结点, e_5 是孤立边.

(5) $\deg(v_1) = 3, \deg(v_2) = 2, \deg(v_3) = 3, \deg(v_4) = 2, \deg(v_5) = 2, \deg(v_6) = 0, \deg(v_7) = 1, \deg(v_8) = 1$.

因为不是所有结点的度数均相等, 故不是正则图, 又 v_6 不与任何结点邻接, 因此 G 也不是完全图.

(6) G 是 $(8, 7)$ 图或 8 阶图, $n = 8$ 个结点, $m = 7$ 条边.

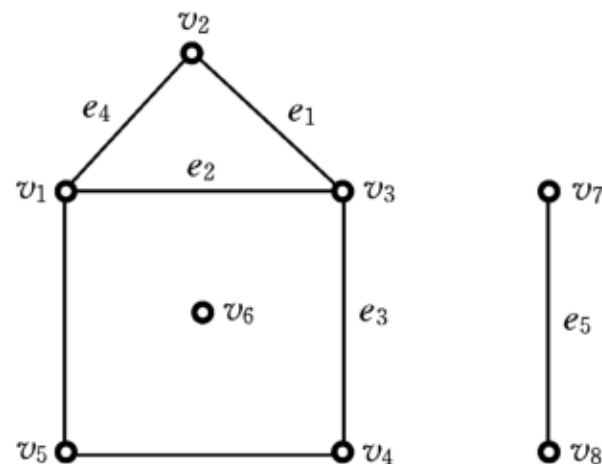
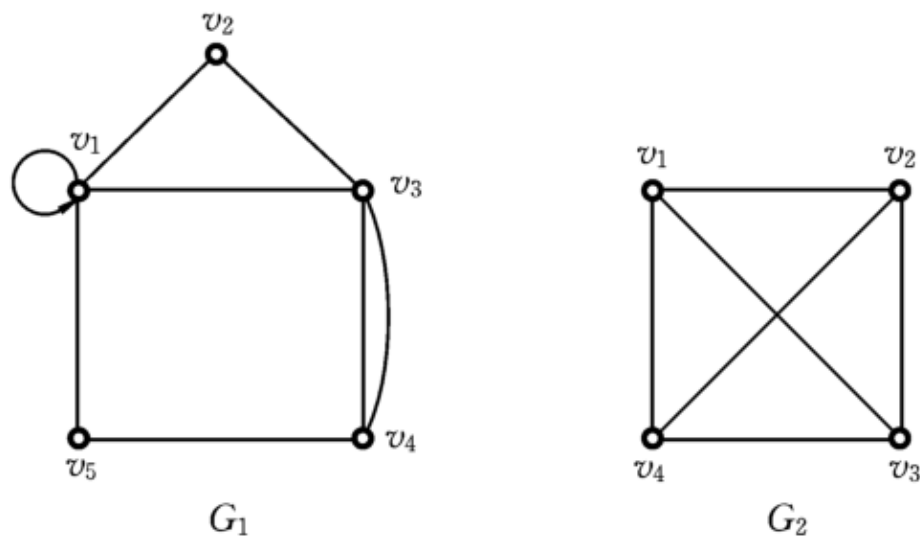


图 8-1

例 8-2 图 8-2 给出了无向图 $G_1 = (V_1, E_1)$ 和 $G_2 = (V_2, E_2)$, 它们各是什么类型的图, 求出 G_1 的最大度数 $\Delta(G_1)$ 和最小度数 $\delta(G_1)$, 并指出 G_1 中重数大于 1 的边.



解 G_1 是一个伪图, 有自环 $\{v_1, v_1\}$ 和平行边 $\{v_3, v_4\}, \{v_3, v_4\}$. G_2 是一个简单图, 且 G_2 中任意两个结点均邻接, 故是完全图, 又每个结点的度数为 3, 因此 G_2 是 3 次正则图.

G_1 中关联于 v_1 的结点的边有一个是自环, 在计算 v_1 的度数时, 此边使 v_1 的度增加 2, 于是 $\deg(v_1) = 5$, 因此 $\Delta(G_1) = \max\{\deg(v) \mid v \in V_1\} = 5$, $\delta(G_1) = \min\{\deg(v) \mid v \in V_1\} = 2$.

G_1 中结点 v_3 与 v_4 间有两条平行边, 边的重数为 2.

例 8-3 求图 G (见图 8-3)的补图 $\bar{G}$.

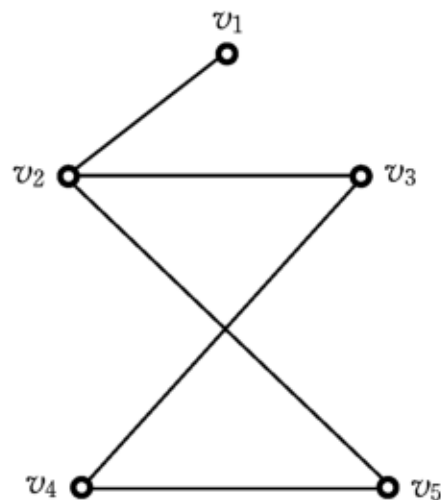


图 8-3

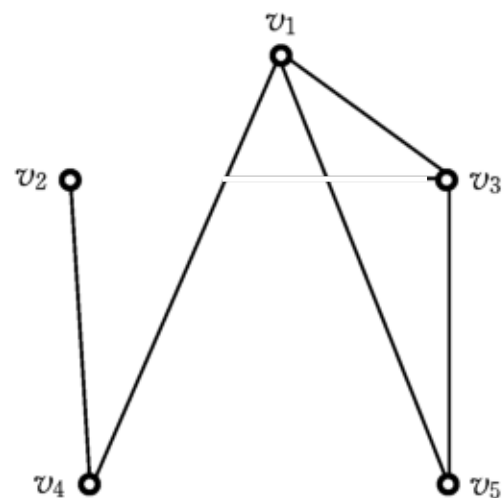
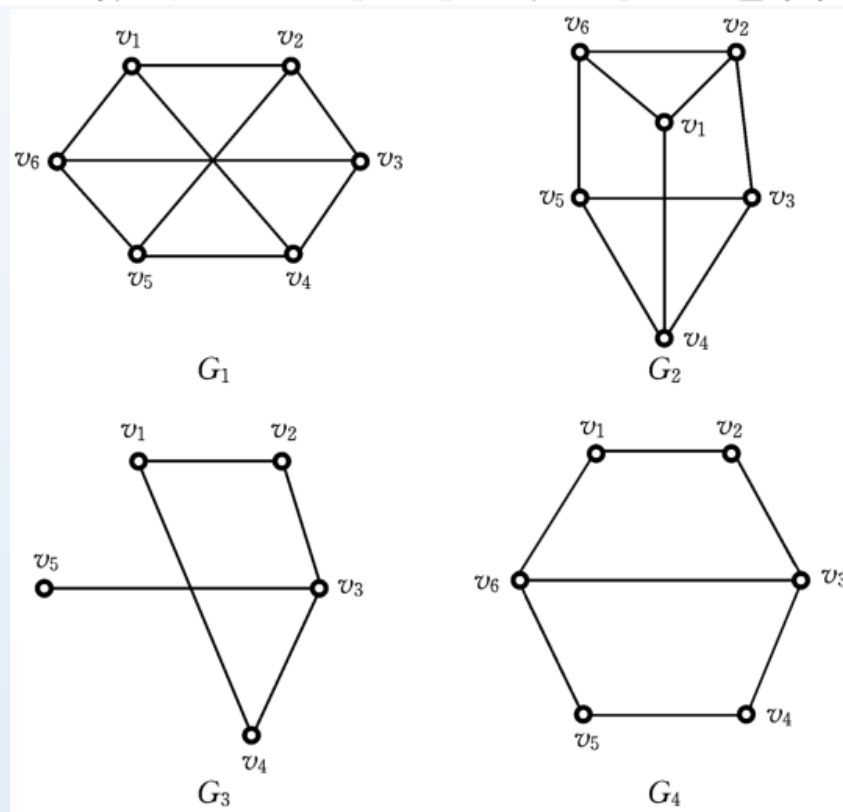


图 8-4

解 G 的补图 $\bar{G}$,是由 G 的所有结点和为了使 G 成为完全图所需要添加那些边组成的图,如图 8-4 所示.

例 8-4 图 8-5 给出了图 G_1, G_2, G_3, G_4 , 问它们之间有何关系?



解 $G_1 = (V_1, E_1)$ 是一个 3 次正则图; 因为 $V_3 \subseteq V_1$ 且 $E_3 \subset E_1$, 所以 $G_3 = (V_3, E_3)$ 是 G_1 的一个 真子图;

又因为 $V_4 = V_1$ 且 $E_4 \subseteq E_1$, 所以 $G_4 = (V_4, E_4)$ 是 G_1 的一个 生成子图.

设 $G_2 = (V_2, E_2)$, 因为 $\{v_3, v_5\} \in E_2$, 但 $\{v_3, v_5\} \notin E_1$, 所以 $E_2 \not\subseteq E_1$.

另一方面 $\{v_3, v_6\} \in E_1$, 但 $\{v_3, v_4\} \notin E_2$, 故 $E_1 \not\subseteq E_2$. 因此 G_2 不是 G_1 的子图, G_1 也不是 G_2 的子图, 同理, G_3, G_4 与 G_2 也没有子图关系.

例 8-5 设 G 是具有 3 个结点的完全图, 试问:

(1) G 有多少个子图?

(2) G 有多少个生成子图?

(3) 如果没有任何两个子图是同构的, 则 G 的子图个数是多少? 将这些构造出来.

解 (1) 因含有一个结点的子图有 $C_3^1 = 3$ 个;

含二个结点的子图有 $C_3^2 \times 2 = 6$;

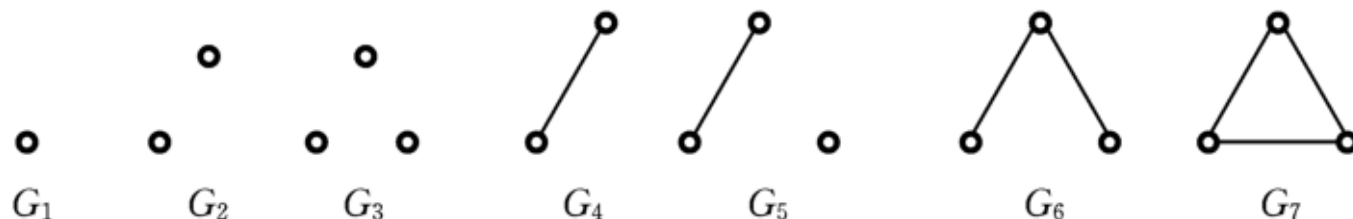
含三个结点的子图有 $C_3^3 \times 2^3 = 8$;

所以 G 共有 $3 + 6 + 8 = 17$ 个子图.

(2) G 的生成子图, 含 G 的全部结点, 因为 G 有三条边, 构成子图时, 每条边有被选和不选两种情况.

所以 G 的生成子图的个数为 $2^3 = 8$.

(3) G 的所有不同构的子图如图 8-6 所示.



例 8-9 给定图 $G=(V,E)$, 如图 8-8 所示.

- (1) 在 G 中找一条长为 7 的开路且不是真路;
- (2) 在 G 中找一条长为 6 的回路且不是环路;
- (3) 在 G 中找一条长为 7 的真路;
- (4) 在 G 中找一个长为 5 的环路;
- ~~(5) 在 G 中找一条长为 5 的链, 且不是真路;~~
- ~~(6) 在 G 中找一个长为 6 的闭链, 且不是环路;~~
- (7) 求出 v_2 与 v_3 的距离 $d(v_2, v_3)$.

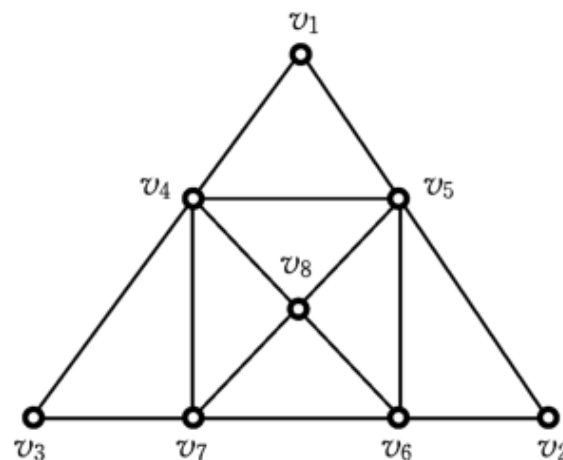


图 8-8

解 (1) $L_1: v_4 v_3 v_7 v_4 v_1 v_5 v_6 v_8$ (因 v_4 出现两次, 故不是真路);

(2) $L_2: v_4 v_5 v_2 v_6 v_5 v_8 v_4$ (因为 v_5 出现两次, 所以不是环路);

(3) $L_3: v_1 v_5 v_2 v_6 v_8 v_4 v_3 v_7$;

(4) $L_4: v_4 v_5 v_6 v_8 v_7 v_4$;

(5) $L_5: v_4 v_3 v_7 v_4 v_1 v_5$ (因 v_4 出现两次, 故不是真路, 但边未重复, 故是链);

(6) $L_6: v_4 v_5 v_2 v_6 v_5 v_8 v_4$ (因 v_5 出现两次, 故不是环路);

(7) v_2 到 v_3 的路很多, 其中长度最短的真路称为 v_2 到 v_3 的短程 L , 其长度称为 v_2 到 v_3 的距离. 如 $L_7: v_2 v_5 v_4 v_3$, $L_8: v_2 v_6 v_7 v_3$ 均是 v_2 到 v_3 的短程, $d(v_2, v_3)=3$.

注 两个结点间的短程不唯一, 但距离唯一.

例 8-10 给定图 $G=(V,E)$ (见图 8-9), 问 $H_1=(V_1,E_1)$, $H_2=(V_2,E_2)$, $H_3=(V_3,E_3)$ 是否是 G 的分图? 其中

$$V_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_6\};$$

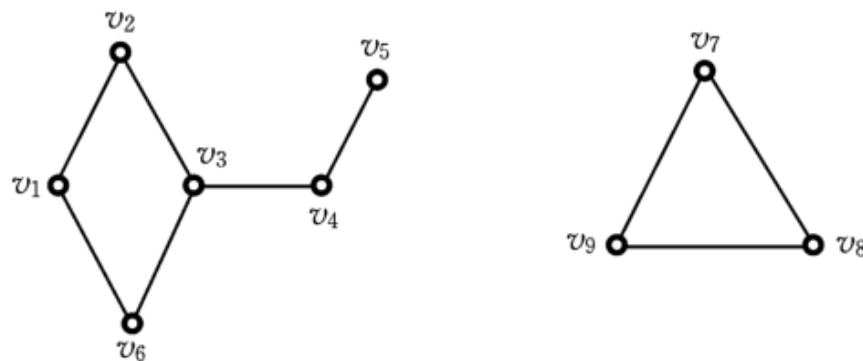
$$E_1 = \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_6\}, \{v_6, v_1\}\};$$

$$V_2 = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\};$$

$$E_2 = \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_6\}, \{v_6, v_1\}, \{v_3, v_4\}, \{v_4, v_5\}, \{v_7, v_8\}\};$$

$$V_3 = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\};$$

$$E_3 = \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_6\}, \{v_6, v_1\}, \{v_3, v_4\}, \{v_4, v_5\}\}.$$



解 H_1 是 G 的连通子图, 但 $H'_1=(V'_1, E'_1)$ 包含 H_1 且也是 G 的连通子图. 所以 H_1 不是 G 的极大连通子图, 故 H_1 不是 G 的分图. 其中 $V'_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_6\}$, $E'_1 = E_1 \cup \{v_3, v_4\}$.

H_2 是 G 的子图, 但不是连通子图, 故不是 G 的分图.

H_3 是 G 的极大连通子图, 因为 G 中包含 H_3 的其他任何子图都将包含 v_7, v_8, v_9 中一个结点, 这样这个包含 H_3 的子图必将不连通. 所以 H_3 是 G 的分图.

例 8-14 图 G 由邻接矩阵 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ 给出, G 是否连通?

解法一 直接由邻接矩阵给出 G 的一个图解,如图 8-13 所示,显然, G 不连通.

解法二 求 G 的连接矩阵

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} [+] \mathbf{A}^{(2)} [+] \mathbf{A}^{(3)} [+] \mathbf{A}^{(4)} [+] \mathbf{A}^{(5)}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} [+] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

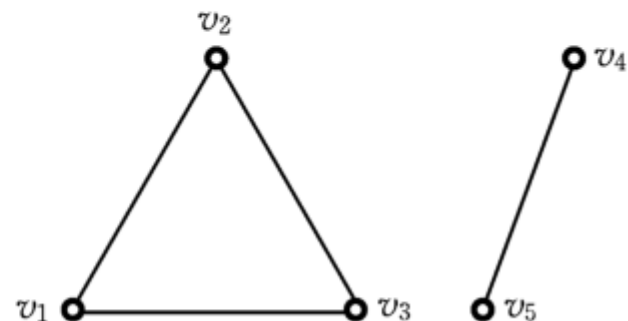


图 8-13

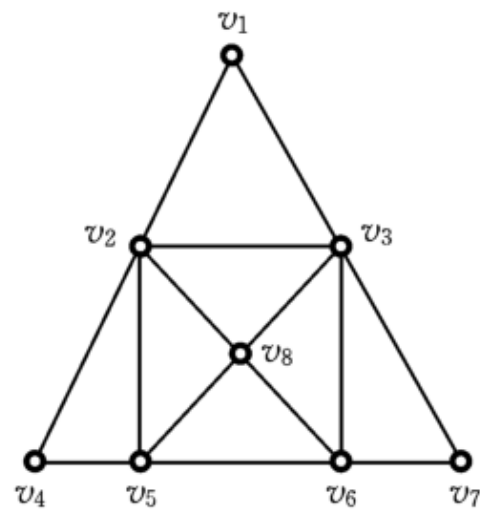
$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\
 & = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

因为 C 中含有 0 元素, 所以 G 不连通.

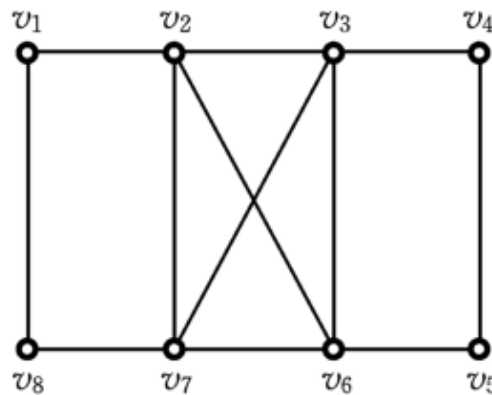
例 8-21 确定 n 取怎样的值, n 阶完全图 K_n 为欧拉图.

解 n 阶完全图 K_n 有 n 个结点, 每个结点的度数为 $n-1$, 故当 n 为奇数, $n-1$ 为偶数时, K_n 是一欧拉图.

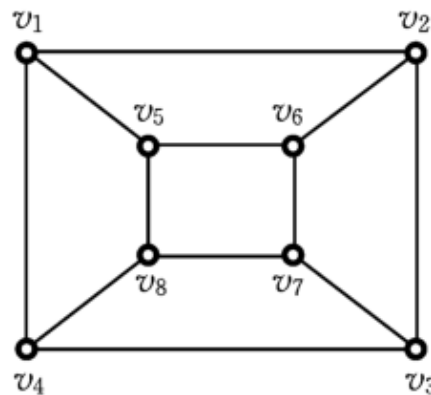
例 8-23 图 8-18 给出了三个图, 试判定哪个是欧拉图, 哪个是哈密顿图, 哪个图有欧拉路.



G_1



G_2



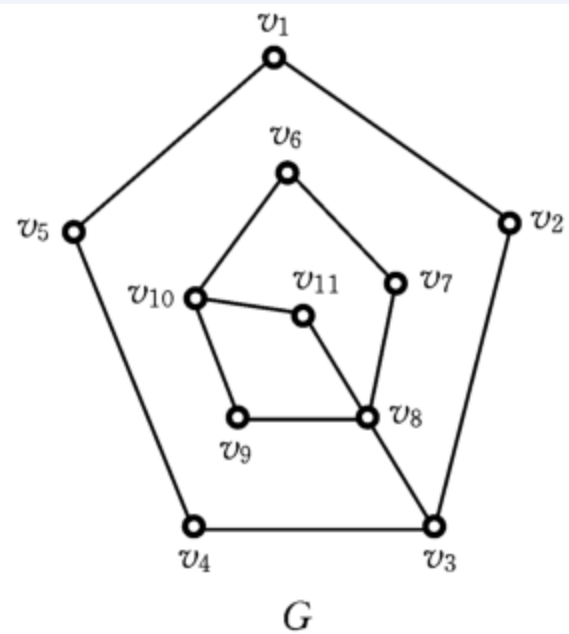
G_3

解 (1) G_1 中除 v_2, v_3 度数为奇数外, 其余结点均是偶数. 故 G_1 中有欧拉路
 $v_2 v_1 v_3 v_2 v_4 v_5 v_8 v_2 v_5 v_6 v_8 v_3 v_6 v_7 v_3$, 又 $v_1 v_3 v_7 v_6 v_8 v_5 v_4 v_2 v_1$ 是 G_1 的哈密顿环, 所以 G_1 是
哈密顿图.

(2) G_2 中每个结点的度数为偶数, 故 G_2 是欧拉图, 其一个欧拉回路为
 $v_1 v_2 v_7 v_3 v_2 v_6 v_3 v_4 v_5 v_6 v_7 v_8 v_1$ 且 $v_1 v_2 v_3 v_4 v_5 v_6 v_7 v_8 v_1$ 是 G_2 的一个哈密顿环, 所以 G_2
 也是哈密顿图.

(3) 因为 G_3 中每个结点的度数均是奇数, 所以 G_3 既不是欧拉图, 也没有欧拉
 路, 但 G_3 中有 $v_1 v_2 v_3 v_4 v_8 v_7 v_6 v_5 v_1$ 哈密顿环, 因此 G_3 是哈密顿图.

例 8-24 判断图 8-19 是否为哈密顿图.



解 取 $S = \{v_8\}$, 则 $\# S = 1$, 有 $W(G - S) = 2 > \# S$.

因此, G 不是哈密顿图.

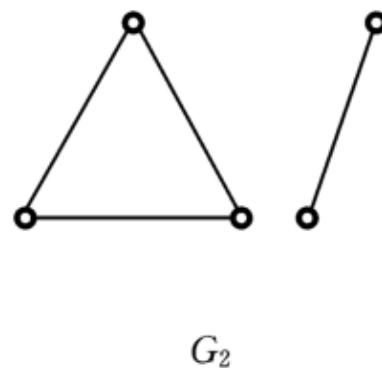
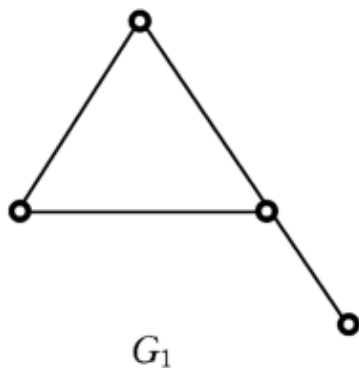
例 8-26 判定下面各类图是否为树.

- (1) 有 n 个结点、 $n-1$ 条边的连通图；
- (2) 每对结点间都有路的图；
- (3) 有 n 个结点、 $n-1$ 条边的图.

解 (1) 由定理 8.14.1(1)知,此类图为树.

(2) 该类图不一定是树,其条件只能保证图是连通图.如图 8-22 中 G_1 满足条件,但不是树.

(3) 该类图不一定是树,条件只能保证 $m=n-1$.如图 8-22 中, G_2 满足条件,但不是树,因为 G_2 不连通.



例 8-28 一棵树 T 有两个结点度数为 2, 一个结点度数为 3, 三个结点度数为 4, 问它有几个叶结点.

解 设 T 有 n 个结点, m 条边, x 个叶结点, 则 $n = 2 + 1 + 3 + x = 6 + x$.

由定理 8.14.1 知 $m = n - 1 = 5 + x$, 又由握手定理知

$$2m = 2 \times 2 + 3 \times 1 + 4 \times 3 + 1 \times x = 19 + x,$$

故 $2 \times (5 + x) = 19 + x$, 即 $x = 9$.

因此, T 有 9 个叶结点.

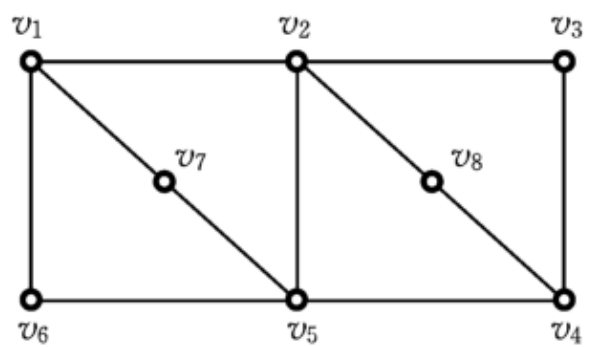


图 8-23

例 8-29 图 8-23 给出了一个连通图 G , 求 G 的一棵生成树 T_G , 并指出 T_G 的二条枝和二条弦.

解 $G_1 = G$ 中有环 $\sigma_1 = v_1 v_2 v_5 v_7 v_1$, 删去边 $\{v_1, v_2\}$ 得 $G_2 = G_1 - \{v_1, v_2\}$, 见图 8-24.

G_2 中有环 $\sigma_2 = v_2 v_3 v_4 v_8 v_2$, 删去边 $\{v_2, v_3\}$ 得 $G_3 = G_2 - \{v_2, v_3\}$;

G_3 中有环 $\sigma_3 = v_1 v_7 v_5 v_6 v_1$, 删去边 $\{v_1, v_6\}$ 得

$G_4 = G_3 - \{v_1, v_6\}$;

G_4 中有环 $\sigma_4 = v_2 v_8 v_4 v_5 v_2$, 删去边 $\{v_4, v_5\}$ 得 $G_5 = G_4 - \{v_4, v_5\}$, G_5 无环, 故 $T_G = G_5$ 是 G 的一棵生成树. $\{v_1, v_7\} \{v_6, v_5\}$ 是 T_G 的二条枝, $\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}$ 是 T_G 是二条弦.

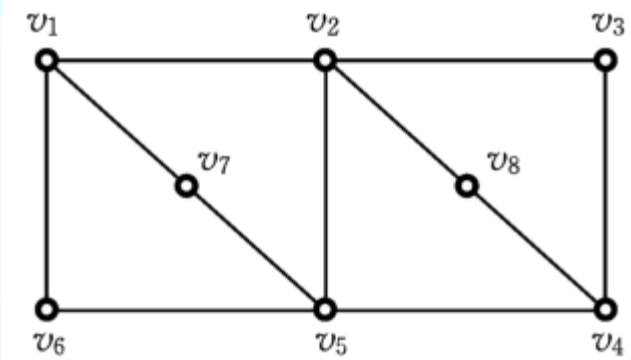
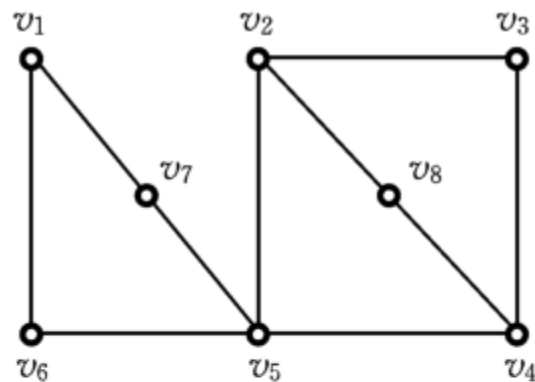
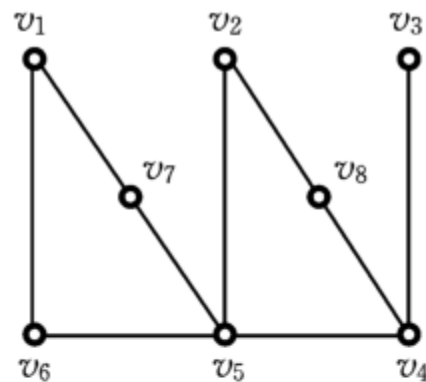


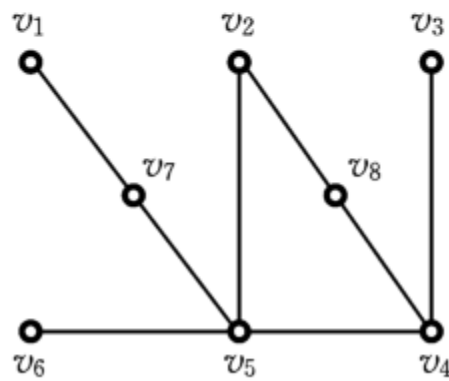
图 8-23



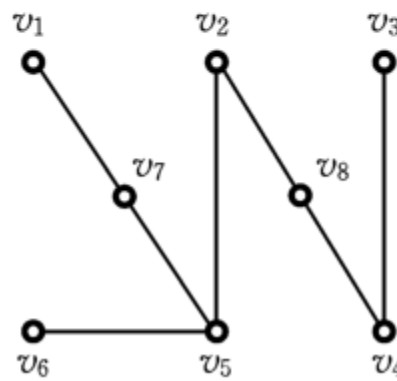
G_2



G_3



G_4



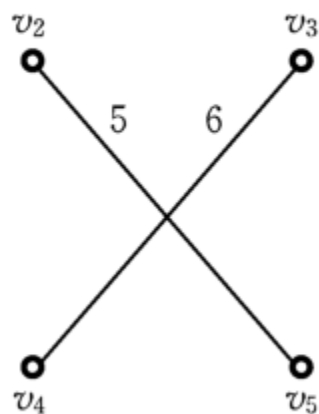
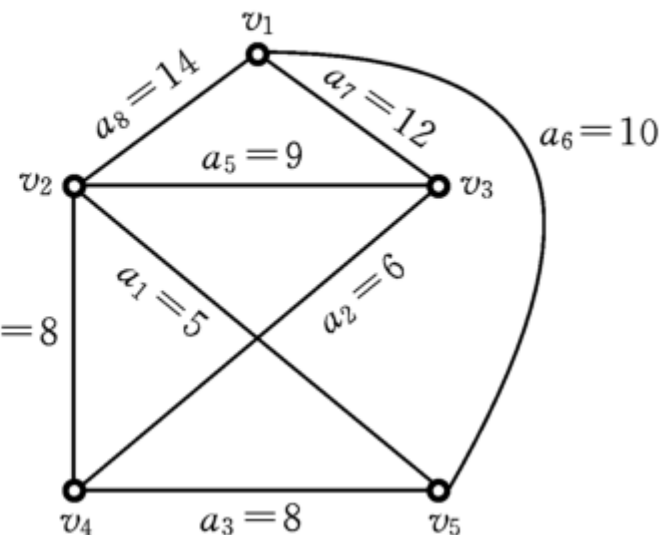
G_5

例 8-30 在图 8-25 所示的有权图 G 中,求一棵最小生成树 T ,并计算其权.

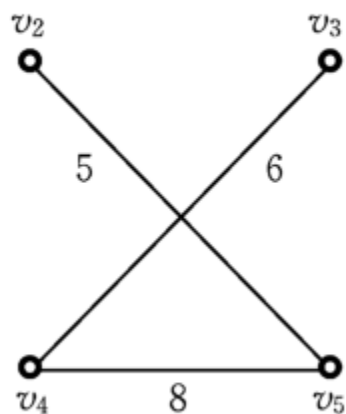
解 $f(a_1)=5, f(a_2)=6, f(a_3)=8, f(a_4)=8, f(a_5)=9, f(a_6)=10, f(a_7)=12, f(a_8)=14$.

取 $e_1=a_1=\{v_2, v_5\}, e_2=a_2=\{v_3, v_4\}$, 由于 $\{v_4, v_5\}=a_3$ 与 e_1, e_2 不构成环路, 所以取 $e_3=\{v_4, v_5\}$, 而 $a_4=\{v_2, v_4\}$ 和 $a_5=\{v_2, v_3\}$ 均与 $\{e_1, e_2, e_3\}$ 构成环路, 故选 $e_4=a_6=\{v_1, v_5\}$ 即 $T=\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, 如图 8-26 所示.

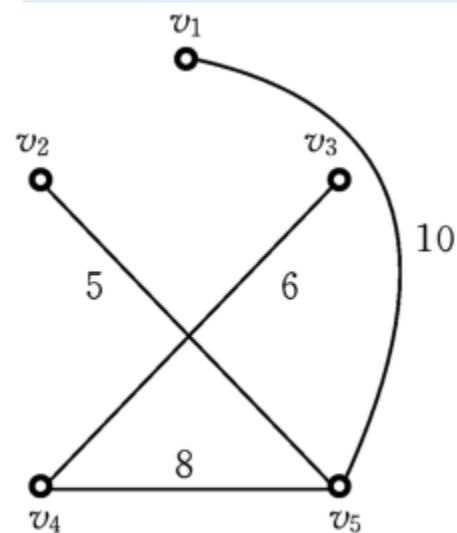
$$W(T)=5+6+8+10=29.$$



(a)



(b)



(c)

定理 8.17.1 设 T 是一棵 (n, m) 有向树, 则 $m = n - 1$.

例 8-31 试证完全二元树有奇数个结点.

证 设 T 是一棵完全二元树, T 为 (n, m) 图, T 有 n_0 片树叶, 则 T 有 $n - n_0$ 个分支结点. 于是 $m = 2(n - n_0)$, 又 $m = n - 1$, 所以 $n - 1 = 2n - 2n_0$, 因此, $n = 2n_0 - 1$ 为奇数.

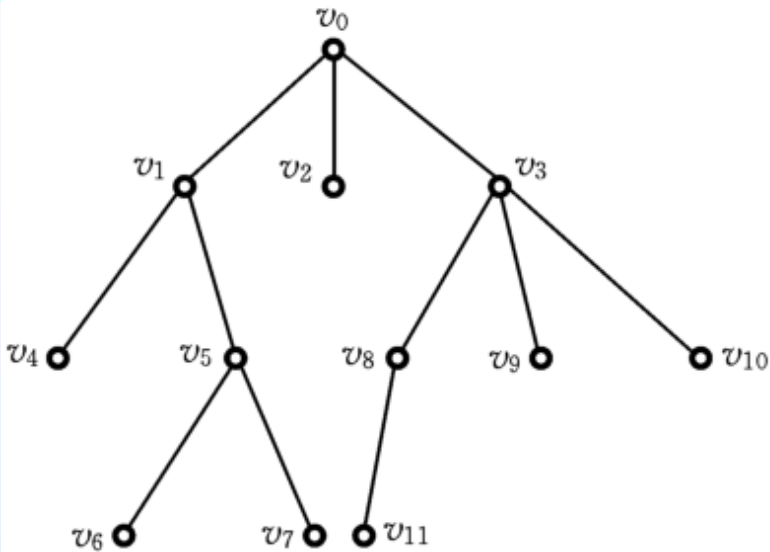
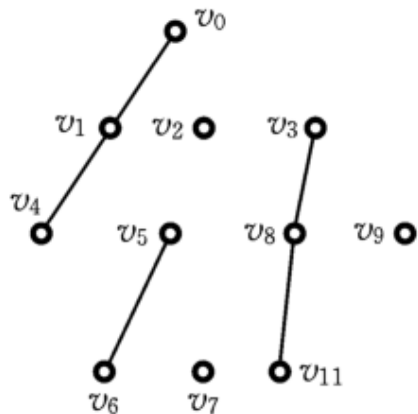


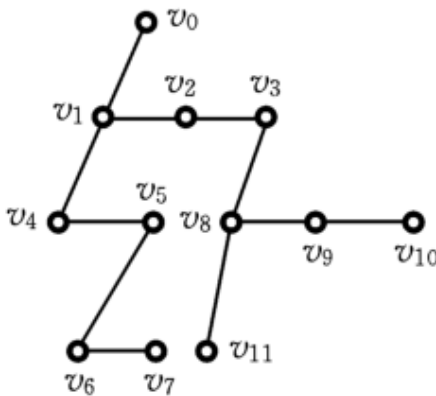
图 8-27

为它的左儿子,在该结点右边的为它的右儿子.

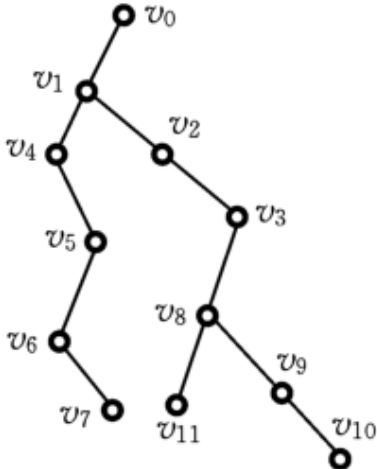
(4) 将结点的左儿子画在结点的左下方,右儿子画在结点的右下方,如图 8-28(3)所示.



(1)



(2)



(3)

例 8-32 将图 8-27 给出的三元树转化为二元树.

解 (1) 对每一结点只保留它的最左分支,删去其余分支,如图 8-28(1)所示.

(2) 在同一级上的结点从左到右用边连接起来,如图 8-28(2)所示.

(3) 对任一结点选定在该结点下的结点

例 8-33 分别用先根通过、中根通过和后根通过的算法扫描图 8-28(3)所示的二元树 T 的所有结点.

解 (1) 先根通过. 先访问根结点, 然后在根结点的左子树上执行先根通过算法(即在以根结点的左儿子为根的子树上执行该算法), 最后在根结点的右子树上执行先根通过算法.

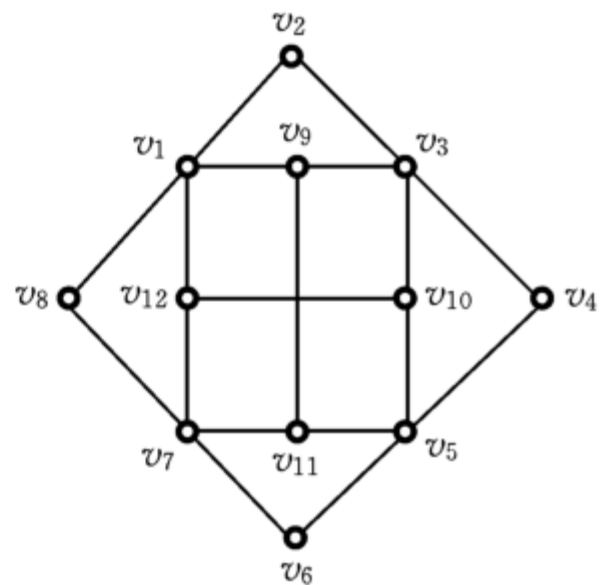
先根通过 T 扫描结果为 $v_0 v_1 v_4 v_5 v_6 v_7 v_2 v_3 v_8 v_{11} v_9 v_{10}$.

(2) 中根通过. 先在根结点的左子树上执行中根通过算法, 然后访问根结点, 最后在根结点的右子树上执行中根通过算法.

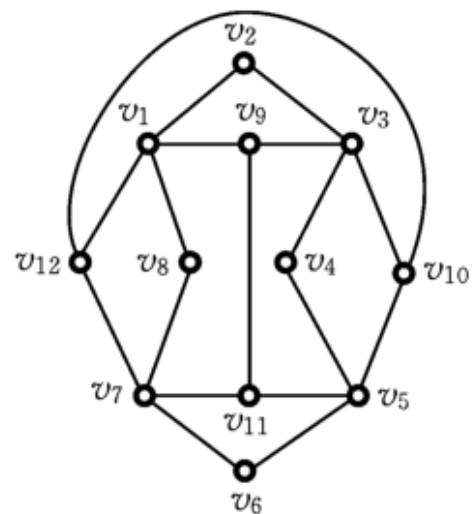
在 v_0 的左子树上执行中根通过, v_0 的左子树以 v_1 为根, 由于 v_1 有左子树, 以 v_4 为根, 所以再在以 v_4 为根的子树上执行中根通过. 因为 v_4 无左子树, 故扫描 v_4 , 然后再在 v_4 的右子树, 即以 v_5 为根的子树上执行中根通过, 继续这一过程……最后扫描结果为 $v_4 v_6 v_7 v_5 v_1 v_2 v_{11} v_8 v_9 v_{10} v_3 v_0$.

(3) 后根通过. 先在根的左子树上执行后根通过算法, 然后在根的右子树上执行后根通过算法, 最后访问根结点扫描结果为 $v_7 v_6 v_5 v_4 v_{11} v_{10} v_9 v_8 v_3 v_2 v_1 v_0$.

浙江大学信息学院信电系电子信息技术与系统研究所宋牟平

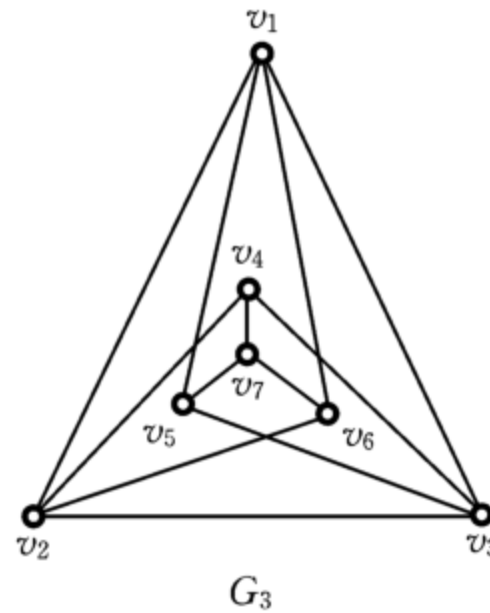
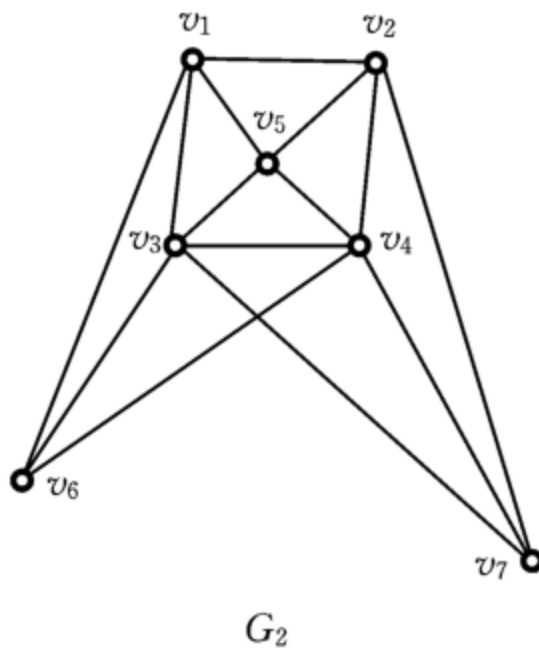
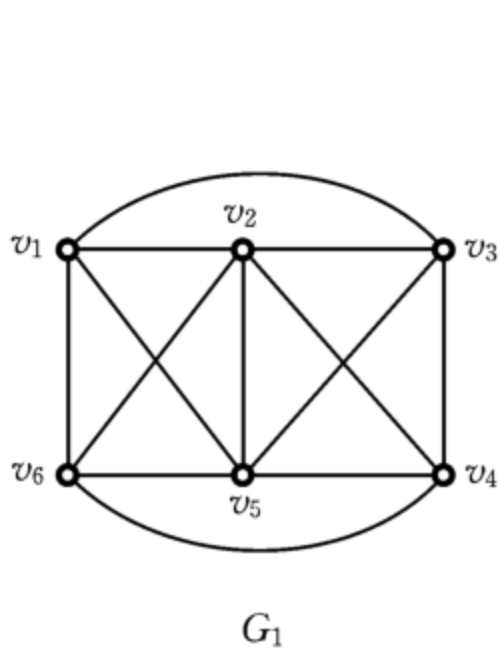
 G_2

14:06



(2)

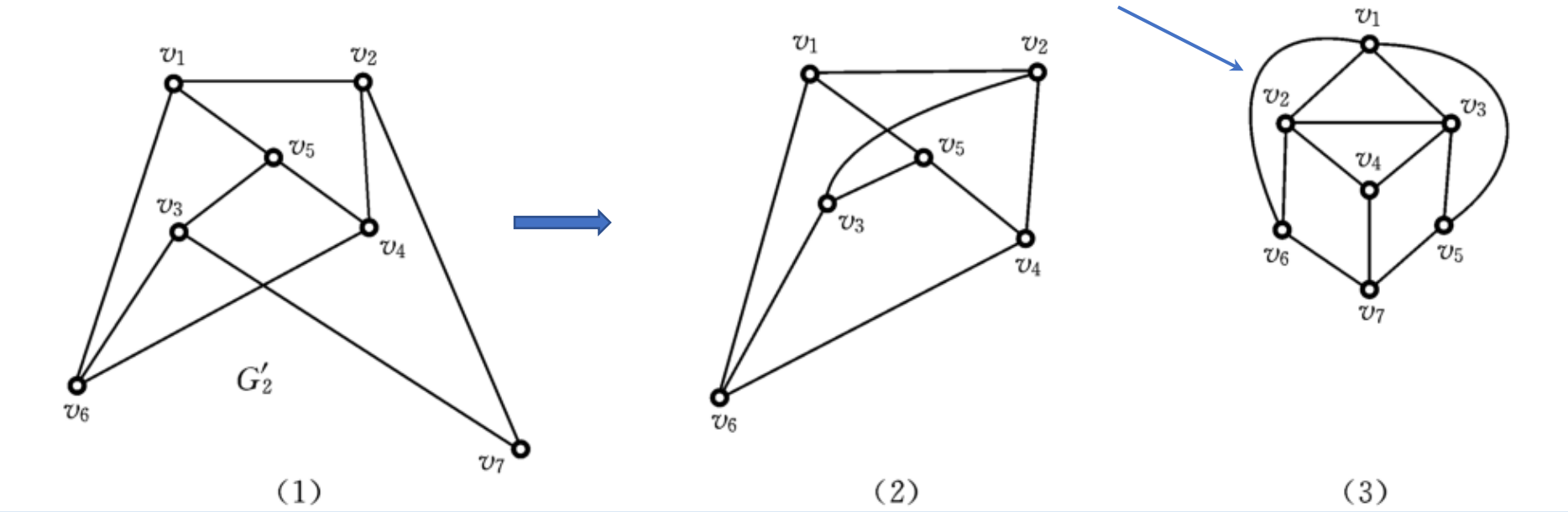
例 8-39 判定如图 8-36 所示的三个图是否为平面图.



解 (1) G_1 的结点数 $n=6$, 边数 $m=13$, G_1 连通. 若 G_1 是平面图, 则 $m=13 \leq 3n-6=18-6=12$ 矛盾, 所以 G_1 是非平面图.

(2) 取 G_2 的子图 G'_2 , 如图 8-37(1)所示. G'_2 在度为 2 的结点内与 $K_{3,3}$ 同构, 如图 8-37(2)所示. 由 Kuratowski 定理知 G_2 是非平面图.

(3) G_3 能画出如图 8-37(3)所示的平面图解, 故是平面图.



例 8-42 若 (n, m) 图 G 是有 r 个分图的树林, 则 $m = n - r$.

证 因为树林的每个分图是树, 即 G 的 r 个分图 $G_1, G_2, \dots, G_r$ 均是树. 设 G_i 有 n_i 个结点, $m_i (i=1, 2, \dots, r)$ 条边, 则由定理 8.14.1 知 $m_i = n_i - 1 (i=1, 2, \dots, r)$, 所以

$$\begin{aligned} m &= m_1 + m_2 + \dots + m_r = (n_1 - 1) + \dots + (n_r - 1) \\ &= (n_1 + \dots + n_r) - r = n - r. \end{aligned}$$

例 8-43 试证明若图 G 的每一结点的度为 2, 则 G 的每一分图均将包含一环.

证 假设 G 的某一分图 G_k 不含环, 且 G_k 为 (n_k, m_k) 图, 由条件知 G_k 的每一结点的度数为 2, 于是

$$2m_k = \sum_{i=1}^{n_k} \deg(v_i) = 2n_k, \quad m_k = n_k.$$

又 G_k 连通且无环, 故是树. 由定理 8.14.1 知 $m_k = n_k - 1$ 与 $m_k = n_k$ 矛盾, 因此, G 中每个分图必含环.

例 8-48 试证明 n 阶图 G 中奇次度结点的个数与 $\bar{G}$ 中奇次度结点的个数相等, 其中 n 为奇数(度数为奇数的结点, 称为奇次度结点).

证 因为 n 为奇数, 所以 n 阶完全图 K_n 的每个结点的度数 $n-1$ 为偶数.

设 v 是 G 中任一奇次度结点, $\deg(v) = k$.

在 $\bar{G}$ 中记 $\deg(v) = k'$, 则 $k + k' = n - 1$, 于是 k' 为奇数.

由 v 的任意性知 G 中任一奇次度结点, 一定也是 $\bar{G}$ 中奇次度结点. 又 G 与 $\bar{G}$ 互补. 因此, 结论成立.

例 8-52 证明恰有 2 片树叶的树为一条真路.

证 设 T 为恰有 2 片树叶的 (n, m) 树, 则由握手定理知

$$2m = \sum_{i=1}^n \deg(v_i) = 2 + \sum_{i=1}^{n-2} \deg(v_i),$$

其中 v_n, v_{n-1} 为树叶.

另一方面, T 是树, 所以 $m = n - 1$, 于是

$$2n - 2 = 2 + \sum_{i=1}^{n-2} \deg(v_i), \quad \text{即} \quad \sum_{i=1}^{n-2} \deg(v_i) = 2(n - 2).$$

由条件知, T 中除 2 个叶结点外, 其余 $n - 2$ 个分支结点度数均大于等于 2.

因此, 这 $n - 2$ 个分支结点的度数只能都为 2, 故 T 有一条欧拉路. 所以 T 为一条真路.

例 8-54 若 G 是一个平面图, 有 r 个分图, 证明 $n - m + k = r + 1$, 其中 n, m, k 分别为 G 的结点数、边数和面数.

证 设 G 的 r 个分图为 $G_1, G_2, \dots, G_r$, 由于 G 是平面图, 所以 G_i 是平面连通图, 记 G_i 的结点数、边数、面数分别为 $n_i, m_i, k_i (i=1, 2, \dots, r)$, 于是由欧拉公式得

$$n_i - m_i + k_i = 2 \quad (i=1, 2, \dots, r). \quad (1)$$

而 $n = \sum_{i=1}^r n_i, m = \sum_{i=1}^r m_i, k = \sum_{i=1}^r k_i - (r - 1)$ (因为每个分图均将无限面记数一次).

对式(1) 两边求和得

$$n - m + k + (r - 1) = 2r, \quad n - m + k = r + 1.$$

注意 该式是对欧拉公式的推广.

例 8-55 设 (n, m) 图 G 是有 r 个分图的平面图, G 的每个面至少由 $l (\geq 3)$ 条边围成, 则

$$m \leq \frac{l(n-r-1)}{l-2}.$$

证 设 G 有 k 个面, k 个面的各边界长度之和为 S , 则 $S \geq l \cdot k$.

另一方面, 每条边至多在两个面的边界中, 所以 $S \leq 2m$, 于是 $2m \geq l \cdot k$, 即

$$k \leq \frac{2m}{l}. \quad (1)$$

根据欧拉公式的推广(例 8-53)得

$$n - m + k = r + 1. \quad (2)$$

将式(1)代入式(2)得

$$n - m + \frac{2m}{l} \geq r + 1.$$

经整理后为

$$m \leq \frac{l}{l-2}(n-r-1).$$

End of Chapter 8