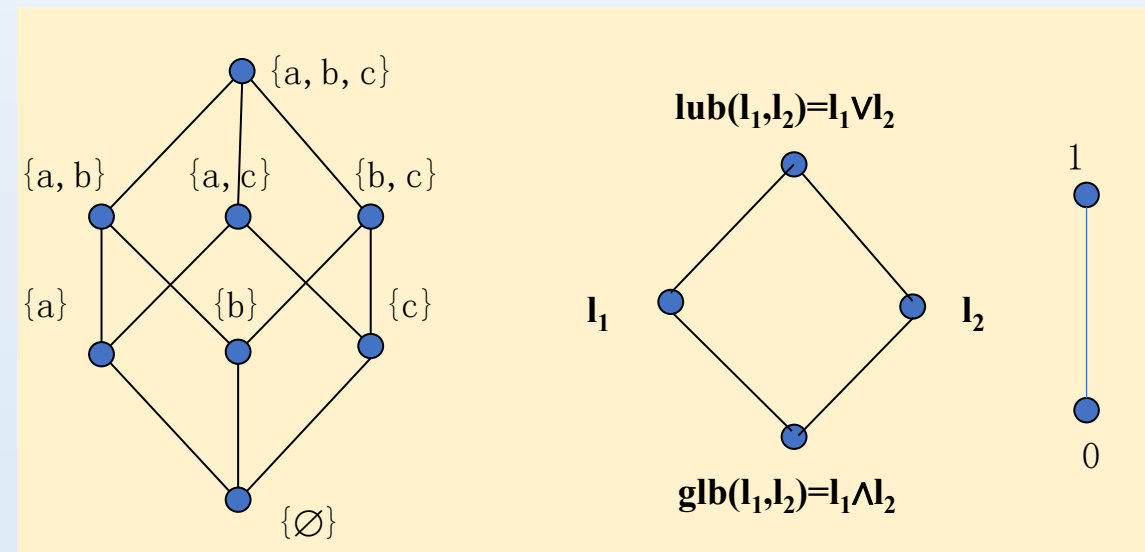
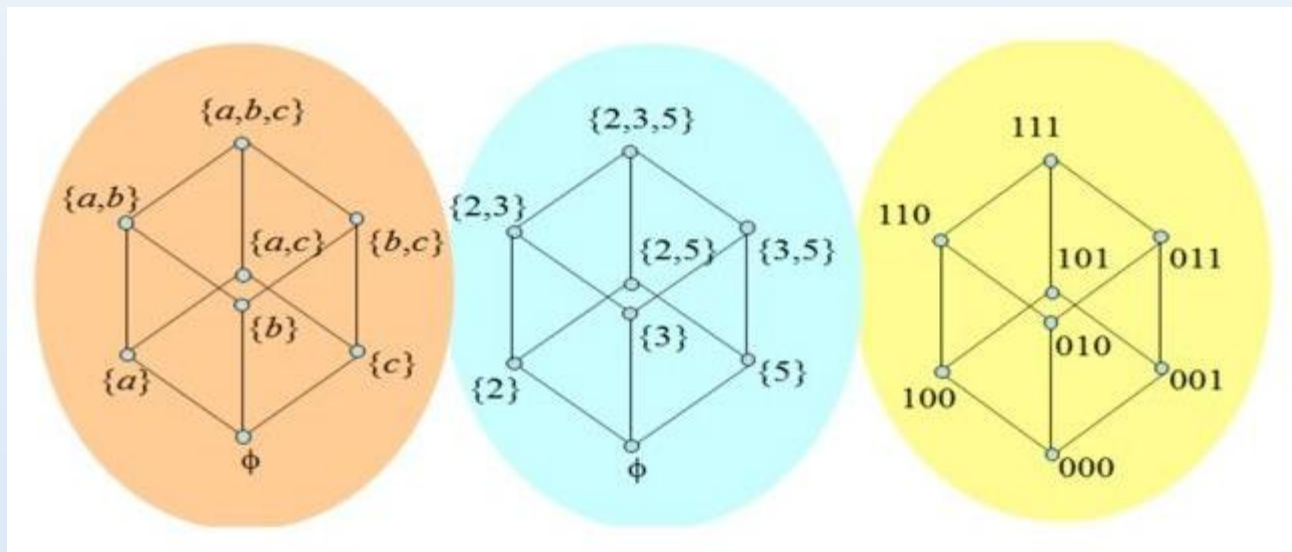


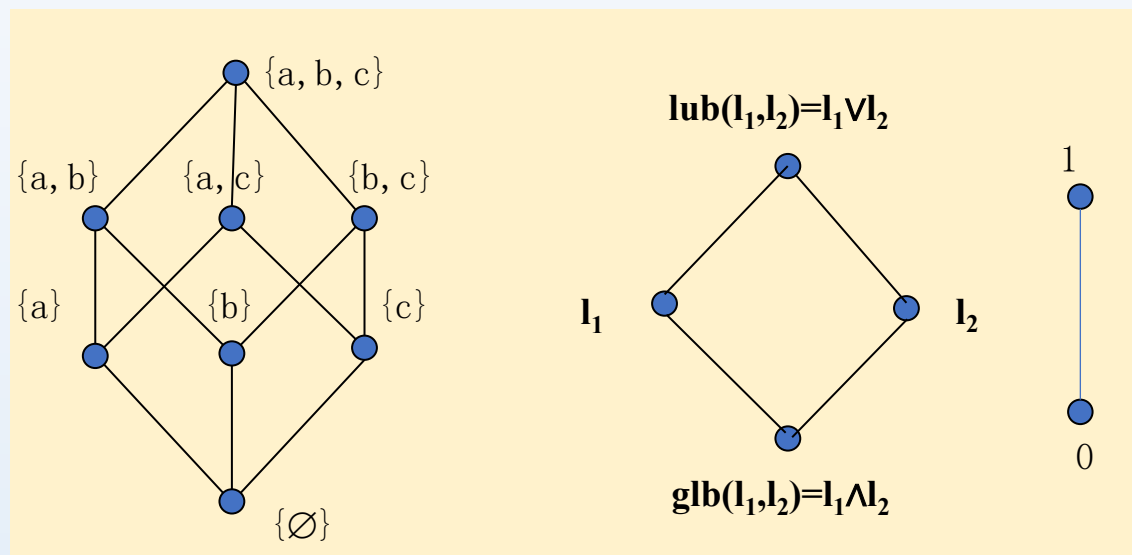
离散数学

Discrete Mathematics

第7章 格和布尔代数



第7章 格和布尔代数



从集合论的观点看，布尔代数是偏序关系、集合代数；

从抽象代数的观点看，布尔代数是一个代数系统；

从逻辑的观点看，布尔代数是命题演算系统；

从工程技术的观点看，布尔代数是开关代数（二值逻辑），数字电路。

布尔代数有两种方式定义：由偏序关系定义，由代数系统定义。

§ 7.1 偏序集

定义

偏序集: 在集合L上定义的**偏序关系** “ $\leq$ ” 和集合L合称为**偏序集**, 记 $\langle L; \leq \rangle$ 。

这类似于代数系统的定义, 对于**偏序集** $\langle L; \leq \rangle$ 有下列性质:

对任意的 $l_1, l_2, l_3 \in L$, 有

$$l_1 \leq l_1$$

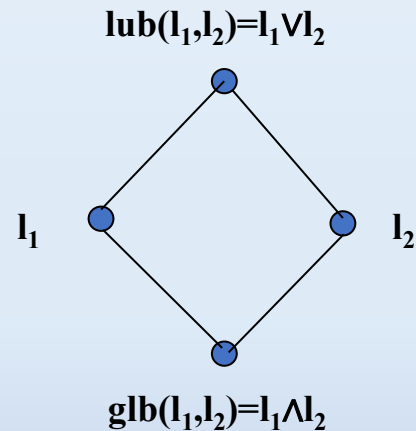
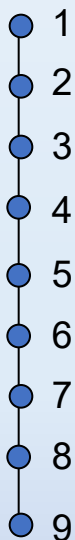
若 $l_1 \leq l_2, l_2 \leq l_1$, 则 $l_1 = l_2$

若 $l_1 \leq l_2, l_2 \leq l_3$, 则 $l_1 \leq l_3$

自反

反对称

传递



定义7-1 下界: 设 $l_1, l_2 \in L$, 若存在元素 $a \in L$, 满足 $a \leq l_1$ 和 $a \leq l_2$, 则称 a 为 l_1 和 l_2 的下界。

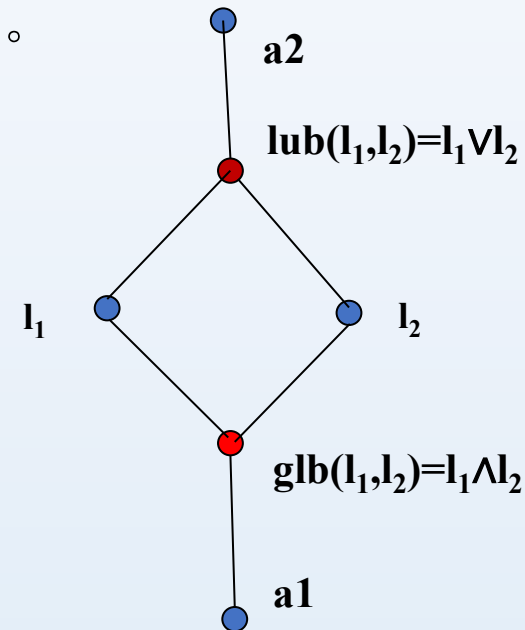
最大下界: $\text{glb} = \max\{l_1 \text{和} l_2 \text{的下界}\}$,

即设 glb 是 l_1 和 l_2 的下界, 且对于任意的 $a \in L$, 若 a 是 l_1 和 l_2 的下界, 则 $a \leq \text{glb}$ 。

定义7-2 上界: 设 $l_1, l_2 \in L$, 若存在元素 $a \in L$, 满足 $l_1 \leq a$ 和 $l_2 \leq a$, 则称 a 为 l_1 和 l_2 的上界。

最小上界: $\text{lub} = \min\{l_1 \text{和} l_2 \text{的上界}\}$,

即设 lub 是 l_1 和 l_2 的上界, 且对于任意的 $a \in L$, 若 b 是 l_1 和 l_2 的上界, 则 $\text{lub} \leq b$ 。

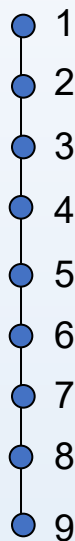


定理7-1 下界和上界是不唯一的, 但最大下界(glb)和最小上界(lub)是唯一的。

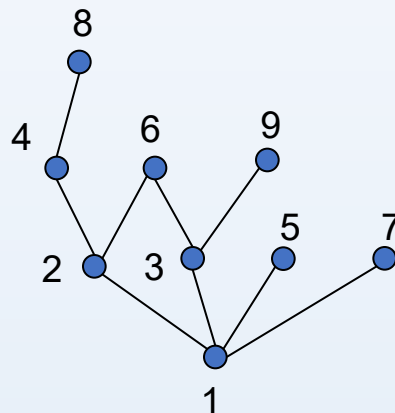
例 $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$
 $\rho_1=\{(a,b) \mid a \leq b, a,b \in A\}$
 $\rho_2=\{(a,b) \mid a \mid b, a,b \in A\}$ a 整除 b

例 $B=\{a,b,c\}$
 $\rho_3=\{(s_1,s_2) \mid s_1 \subseteq s_2, s_1,s_2 \in 2^B\}$

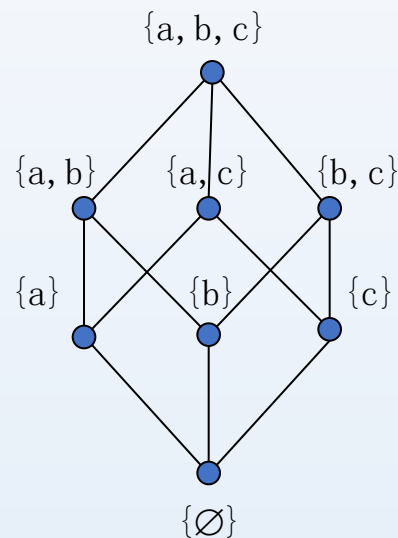
次序图



(a) ρ_1



(b) ρ_2



(c) ρ_3

由次序图很容易判定两个元素的上、下界和最大下界、最小上界。

最小元、最大元： 设 $\langle L; \leq \rangle$ 是一个偏序集，若

- (1) 对于任意的元素 $l \in L$ ，存在 $a \in L$ ，使 $a \leq l$ ，称 a 为**最小元**；
- (2) 对于任意的元素 $l \in L$ ，存在 $b \in L$ ，使 $l \leq b$ ，称 a 为**最大元**；

定理7-2 最小元和最大元有可能存在，也可能不存在，**若存在，则是唯一的。**

§7.2 格及其性质

定义

格及其性质

定义7-4 格: $\langle L; \leq \rangle$ 是一个偏序集, 若对于任意两个元素 $l_1, l_2 \in L$, 都存在最大下界和最小上界, 则称该偏序集为格。

记为运算:

最大下界 $\text{glb}(l_1, l_2) = l_1 \wedge l_2$ 称为交运算

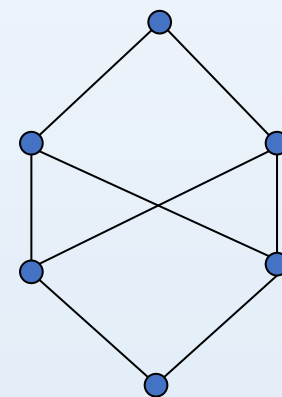
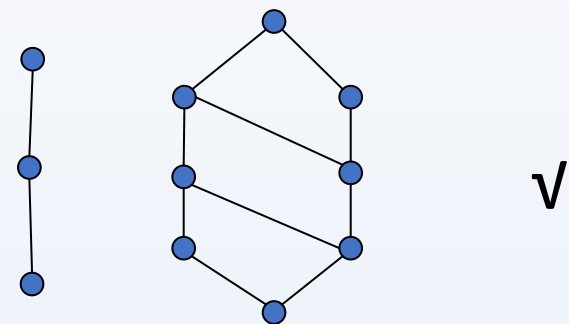
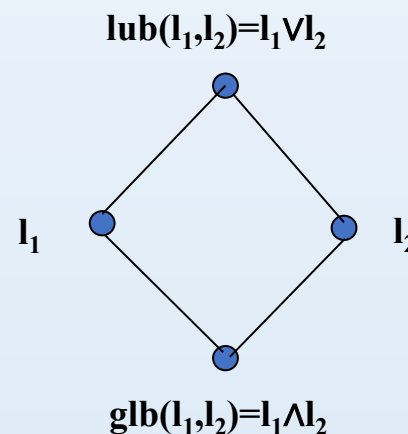
最小上界 $\text{lub}(l_1, l_2) = l_1 \vee l_2$ 称为并运算

显然 $l_1 \wedge l_2 \leq l_1, \quad l_1 \wedge l_2 \leq l_2$ 下界

若 $l_3 \leq l_1, \quad l_3 \leq l_2$, 则 $l_3 \leq l_1 \wedge l_2$ 最大下界

显然 $l_1 \leq l_1 \vee l_2, \quad l_2 \leq l_1 \vee l_2$ 上界

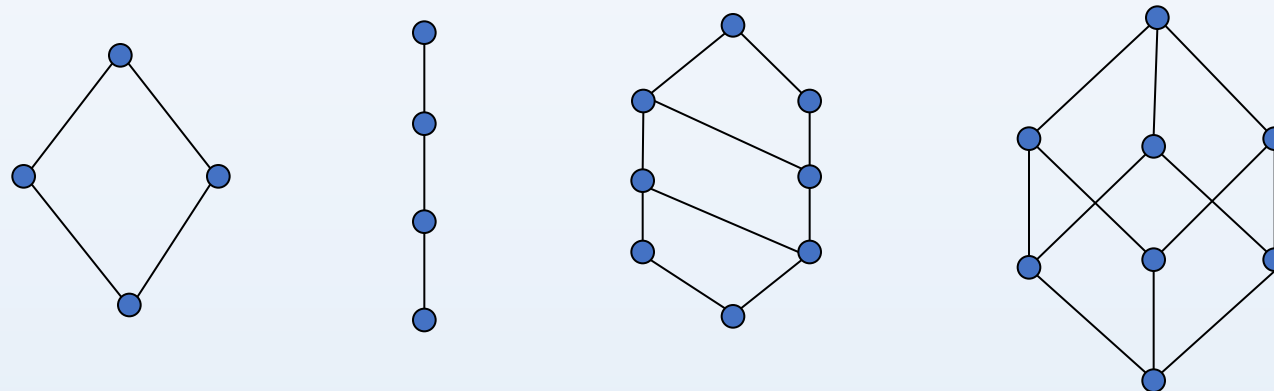
若 $l_1 \leq l_3, \quad l_2 \leq l_3$, 则 $l_1 \vee l_2 \leq l_3$ 最小上界



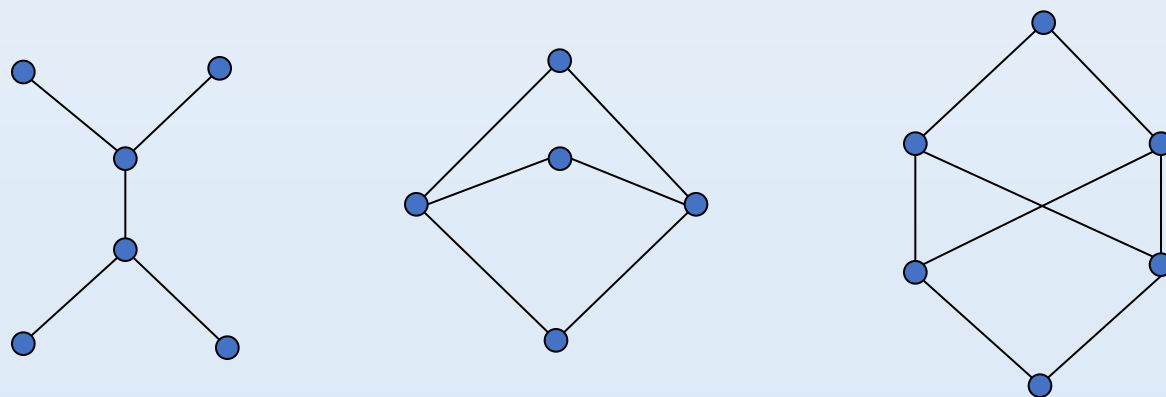
$\vee$

$\times$

格



不是格



格的性质

(1) 定理7-3 $l_1 \vee l_2 = l_2 \Leftrightarrow l_1 \wedge l_2 = l_1 \Leftrightarrow l_1 \leq l_2$

(2) 定理7-4 交换律 $l_1 \vee l_2 = l_2 \vee l_1, l_1 \wedge l_2 = l_2 \wedge l_1$

(3) 定理7-5 结合律 $l_1 \vee (l_2 \vee l_3) = (l_1 \vee l_2) \vee l_3$

$$l_1 \wedge (l_2 \wedge l_3) = (l_1 \wedge l_2) \wedge l_3$$

(4) 定理7-7 吸收律 $l_1 \vee (l_1 \wedge l_2) = l_1, l_1 \wedge (l_1 \vee l_2) = l_1$

(5) 定理7-6 幂等律 $l \vee l = l, l \wedge l = l$

(6) 定理7-8 保序性 对任意的 $l_1, l_2, l_3, l_4 \in L$,

若 $l_1 \leq l_3, l_2 \leq l_4$

则 $l_1 \vee l_2 \leq l_3 \vee l_4, l_1 \wedge l_2 \leq l_3 \wedge l_4$

(7) 定理7-9 分配不等式 对任意的 $l_1, l_2, l_3 \in L$,

$$l_1 \vee (l_2 \wedge l_3) \leq (l_1 \vee l_2) \wedge (l_1 \vee l_3)$$

$$l_1 \wedge (l_2 \vee l_3) \geq (l_1 \wedge l_2) \vee (l_1 \wedge l_3)$$

与集合的性质一样，这些表达式都是成对出现，若用对运算符做代换

$$\vee \Leftrightarrow \wedge, \leq \Leftrightarrow \geq$$

则可得到另一表达式，称对偶性原理。

交换性的证明: $l_1 \vee l_2 = l_2 \vee l_1, l_1 \wedge l_2 = l_2 \wedge l_1$

因（上界） $l_1 \leq l_2 \vee l_1, l_2 \leq l_2 \vee l_1$

所以(最小上界) $l_1 \vee l_2 \leq l_2 \vee l_1$

又（上界） $l_2 \leq l_1 \vee l_2, l_1 \leq l_1 \vee l_2$

所以(最小上界) $l_2 \vee l_1 \leq l_1 \vee l_2$

由反对称性: $l_1 \vee l_2 = l_2 \vee l_1$

结合律的证明: $(1_1 \vee 1_2) \vee 1_3 = 1_1 \vee (1_2 \vee 1_3)$

因(上界) $1_1 \leq 1_1 \vee (1_2 \vee 1_3), 1_2 \vee 1_3 \leq 1_1 \vee (1_2 \vee 1_3)$

又(上界) $1_2 \leq 1_2 \vee 1_3, 1_3 \leq 1_2 \vee 1_3$

由传递性 $1_2 \leq 1_1 \vee (1_2 \vee 1_3), 1_3 \leq 1_1 \vee (1_2 \vee 1_3)$

故(最小上界) $1_1 \vee 1_2 \leq 1_1 \vee (1_2 \vee 1_3), 1_3 \leq 1_1 \vee (1_2 \vee 1_3)$

因此(最小上界) $(1_1 \vee 1_2) \vee 1_3 \leq 1_1 \vee (1_2 \vee 1_3)$

同理可证 $1_1 \vee (1_2 \vee 1_3) \leq (1_1 \vee 1_2) \vee 1_3$

再由反对称性 $(1_1 \vee 1_2) \vee 1_3 = 1_1 \vee (1_2 \vee 1_3)$

保序性的证明: 若 $l_1 \leq l_3, l_2 \leq l_4$ 则 $l_1 \wedge l_2 \leq l_3 \wedge l_4$ $l_1 \vee l_2 \leq l_3 \vee l_4$

若 $l_1 \leq l_3, l_2 \leq l_4$

则(下界) $l_1 \wedge l_2 \leq l_1 \leq l_3, l_1 \wedge l_2 \leq l_2 \leq l_4$

故(最大下界) $l_3 \wedge l_4 \geq l_1 \wedge l_2$

又 $l_1 \leq l_3 \leq l_3 \vee l_4, l_2 \leq l_4 \leq l_3 \vee l_4$

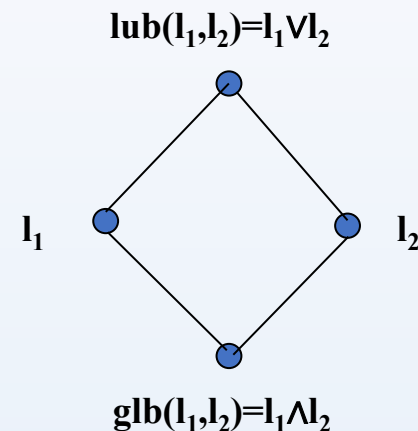
因此 $l_1 \vee l_2 \leq l_3 \vee l_4$

§7.3 格是一种代数系统

格是代数系统

格也可从代数系统的角度定义。

格的两个运算 $\wedge, \vee$ 满足多个性质，但交换律、结合律、吸收律是最基本的，其它的性质可从这三个性质推出来。



定义

定义7-5: 设 $\langle L; \wedge, \vee \rangle$ 是一个代数系统， $\wedge$ 和 $\vee$ 是 L 上的两个二元运算，若这两个运算满足

- (1) 交换律
- (2) 结合律
- (3) 吸收律

则称该代数系统为格。

因此，偏序关系(具有glb和lub) $\rightarrow$ 格(代数系统，满足3个定律)，

反过来，格(代数系统) $\rightarrow$ 一个偏序关系(满足任意两个元素都存在最大下界和最小上界)

即两种定义是等价的。

证明:

设 $\langle L; \wedge, \vee \rangle$ 是一个格(代数系统), 定义L上的关系 $\leq$: 对于任意的 $l_1, l_2 \in L$, 当且仅当 $l_1 \vee l_2 = l_2$ 时, 有 $l_1 \leq l_2$ 。

$$l_1 \vee l_2 = l_2 \quad \Leftrightarrow \quad l_1 \leq l_2$$

1) 由等幂律, 对于任一 $l \in L$, 有 $l \vee l = l$, 所以 $l \leq l$, 关系 $\leq$ 自反。

2) 设 $l_1 \leq l_2$ 且 $l_2 \leq l_1$,

则 $l_1 \vee l_2 = l_2$ 且 $l_1 \vee l_2 = l_1$ 。

由交换律 $l_1 \vee l_2 = l_2 \vee l_1$, 即 $l_1 = l_2$,

故关系 $\leq$ 反对称。

3) 设 $l_1 \leq l_2$ 且 $l_2 \leq l_3$,

则 $l_1 \vee l_2 = l_2$ 且 $l_2 \vee l_3 = l_3$ 。

由结合律 $l_1 \vee l_3 = l_1 \vee (l_2 \vee l_3) = (l_1 \vee l_2) \vee l_3 = l_2 \vee l_3 = l_3$,

即 $l_1 \leq l_3$ 。

故关系 $\leq$ 可传递。

因此关系 $\leq$ 是偏序关系。

再看最大下界和最小上界。

由交换律、结合律和等幂律

$$1_1 \vee (1_1 \vee 1_2) = (1_1 \vee 1_1) \vee 1_2 = 1_1 \vee 1_2$$

有 $1_1 \leq 1_1 \vee 1_2$

同理 $(1_1 \vee 1_2) \vee 1_2 = 1_1 \vee (1_2 \vee 1_2) = 1_1 \vee 1_2$

有 $1_2 \leq 1_1 \vee 1_2$

$1_1 \vee 1_2$ 是 1_1 和 1_2 的上界。

若存在元素 $1_3 \in L$, 使

$$1_1 \leq 1_3, \quad 1_2 \leq 1_3$$

则 $1_1 \vee 1_3 = 1_3, \quad 1_2 \vee 1_3 = 1_3$ (关系 $\leq$ 定义)

因此 $(1_1 \vee 1_2) \vee 1_3 = 1_1 \vee (1_2 \vee 1_3) = 1_1 \vee 1_3 = 1_3$

故 $1_1 \vee 1_2 \leq 1_3$

即 $\text{lub}(1_1, 1_2) = 1_1 \vee 1_2$ 是最小上界。

由吸收律 $l_1 \vee (l_1 \wedge l_2) = l_1$, $l_2 \vee (l_1 \wedge l_2) = l_2$

则 $l_1 \wedge l_2 \leq l_1$, $l_1 \wedge l_2 \leq l_2$

$l_1 \wedge l_2$ 是 l_1 和 l_2 的下界。

若存在元素 $l_3 \in L$, 使

$$l_3 \leq l_1, \quad l_3 \leq l_2$$

则 $l_1 \wedge l_3 = l_3$, $l_2 \wedge l_3 = l_3$ (后面证明)

$$l_3 \wedge (l_1 \wedge l_2) = (l_1 \wedge l_3) \wedge l_2$$

$$= l_3 \wedge l_2$$

$$= l_3$$

故 $l_3 \leq l_1 \wedge l_2$

即 $\text{glb}(l_1, l_2) = l_1 \wedge l_2$ 是最大下界

验证: $l_1 \vee l_2 = l_2 \Leftrightarrow l_1 \wedge l_2 = l_1 \Leftrightarrow l_1 \leq l_2$

若 $l_1 \vee l_2 = l_2$

则 $l_1 \wedge (l_1 \vee l_2) = l_1 \wedge l_2$

由吸收律 $l_1 \wedge (l_1 \vee l_2) = l_1$

故 $l_1 \wedge l_2 = l_1$

反之, 若 $l_1 \wedge l_2 = l_1$

则 $l_1 \vee l_2 = (l_1 \wedge l_2) \vee l_2 = l_2$

因此有 $l_1 \vee l_2 = l_2 \Leftrightarrow l_1 \wedge l_2 = l_1$

这样由运算 $\wedge$ 同样可以定义偏序关系 $\leq$:

设 $\langle L; \wedge, \vee \rangle$ 是一个格, 定义L上的关系 $\leq$: 对于任意的 $l_1, l_2 \in L$, 当且仅当 $l_1 \wedge l_2 = l_1$ 时, 有 $l_1 \leq l_2$ 。

定义

定义7-5 子格： 设 $\langle L; \wedge, \vee \rangle$ 和 $\langle A; \wedge, \vee \rangle$ 是格，若 $A \subseteq L$ ，则称 $\langle A; \wedge, \vee \rangle$ 是 $\langle L; \wedge, \vee \rangle$ 的子格。

由于 $A \subseteq L$ ， $\wedge, \vee$ 在 L 上满足交换律、结合律、吸收律，则在 A 上也同样满足。

故 $\langle A; \wedge, \vee \rangle$ 是 $\langle L; \wedge, \vee \rangle$ 子格的条件可弱化为 $\langle A; \wedge, \vee \rangle$ 是格 $\langle L; \wedge, \vee \rangle$ 的子代数。

7.4 分配格和有补格

分配格和有补格

定义

定义7-7 分配格: 若格 $\langle L; \vee, \wedge \rangle$ 满足对于任意的 $l_1, l_2, l_3 \in L$, 有

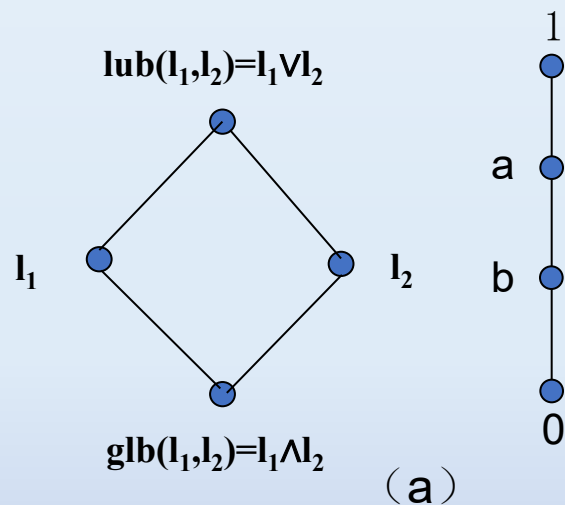
$$l_1 \wedge (l_2 \vee l_3) = (l_1 \wedge l_2) \vee (l_1 \wedge l_3)$$

$$l_1 \vee (l_2 \wedge l_3) = (l_1 \vee l_2) \wedge (l_1 \vee l_3)$$

则称为分配格。

例 $\langle 2^U; \cup, \cap \rangle$ 是分配格。

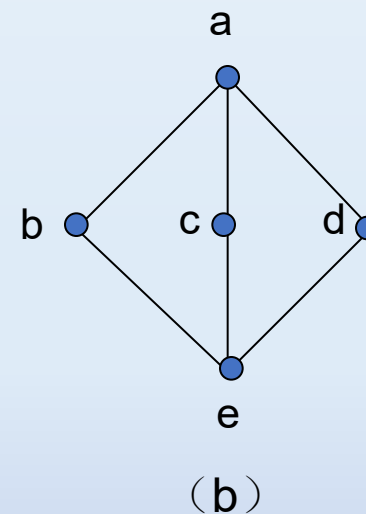
例 图 (a) 是分配格, 图 (b) 不是分配格, b, c, d 不满足分配性。



$$b \wedge (c \vee d) = b \wedge a = b$$

$$(b \wedge c) \vee (b \wedge d)$$

$$= e \vee e = e$$



定理

定理7-11: 设 $\langle L; \vee, \wedge \rangle$ 是分配格, 则对于任意的 $l_1, l_2, l_3 \in L$, 有

$$l_1 \vee l_2 = l_1 \vee l_3, \quad l_1 \wedge l_2 = l_1 \wedge l_3 \quad \Leftrightarrow \quad l_2 = l_3$$

证明: 设左边成立, 则

$$\begin{aligned} l_2 &= l_2 \vee (l_2 \wedge l_1) = l_2 \vee (l_3 \wedge l_1) = (l_2 \vee l_3) \wedge (l_2 \vee l_1) \\ &= (l_2 \vee l_3) \wedge (l_3 \vee l_1) = l_3 \vee (l_2 \wedge l_1) = l_3 \vee (l_3 \wedge l_1) = l_3 \end{aligned}$$

若右边成立, 则左边显然成立。

若格有**最大元1**和**最小元0**, 则对任意的 $l \in L$, 有

$$l \vee 1 = 1; \quad l \wedge 1 = l$$

$$l \vee 0 = l; \quad l \wedge 0 = 0$$

对运算 $\vee$ 而言, **0**是单位元, **1**是零元; 对运算 $\wedge$ 而言, **1**是单位元, **0**是零元。

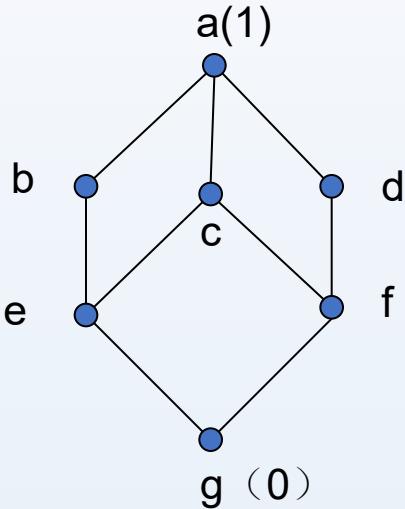
定义

定义7-8 **补**: 设 $\langle L; \vee, \wedge \rangle$ 是一个有0和1的格, 则对于 $l \in L$, 若存在 $\bar{l} \in L$, 使

$$l \vee \bar{l} = 1, \quad l \wedge \bar{l} = 0$$

则称 $\bar{l}$ 是 l 的**补元**。显然 $\bar{l}$ 和 l 互为补元, 但是补元不一定唯一。

例 b 是 d 和 f 的补， d 和 f 也是 b 的补。
 e 是 d 和 f 的补， d 和 f 也是 e 的补。
 c 没有补元。

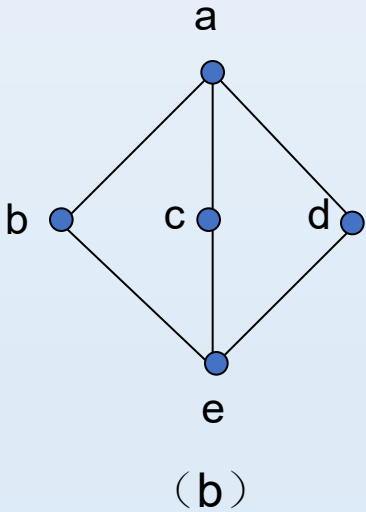
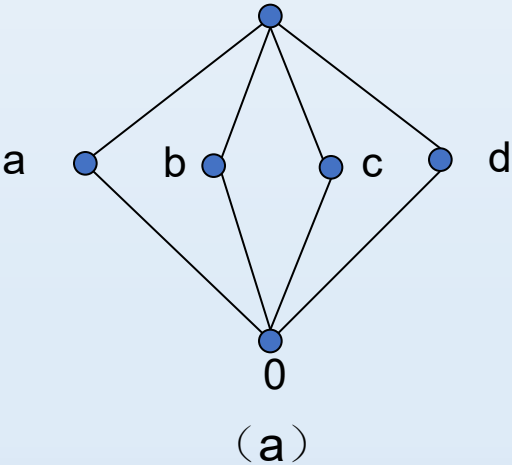


定义

定义7-9 有补格： 设 $\langle L; \vee, \wedge \rangle$ 是一个有0和1的格，若 L 中的每一个元素都至少有一个补元存在，则称格是**有补格**。¹

例 $\langle 2^U; \cup, \cap \rangle$ 有补格。

例 图 (a) 和图 (b) 都是有补格。



有补分配格：若一个格既是分配格又是有补格，则称为有补分配格。

定理7-13 补元的唯一性：有补分配格任意元素的补元是唯一的。

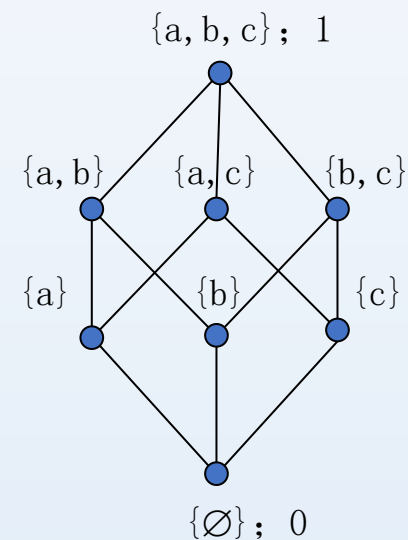
证明：设元素 l 有两个补元 l_1 和 l_2 ，则

$$l \vee l_1 = 1; l \wedge l_1 = 0$$

$$l \vee l_2 = 1; l \wedge l_2 = 0$$

由此 $l \vee l_1 = l \vee l_2; l \wedge l_1 = l \wedge l_2$

因此（分配格定理7-11） $l_1 = l_2$



定理7-14 对合律: $\bar{\bar{1}} = 1$

定理7-15 德摩根定律: 设 $\langle L; \vee, \wedge \rangle$ 是一个有补分配格, 对于任意的 $l_1, l_2 \in L$, 有

$$1) \quad \overline{l_1 \vee l_2} = \bar{l}_1 \wedge \bar{l}_2$$

$$2) \quad \overline{l_1 \wedge l_2} = \bar{l}_1 \vee \bar{l}_2$$

证明: 方法同集合代数德摩根定律的证明

$$\begin{aligned} 1) \quad (l_1 \vee l_2) \vee (\bar{l}_1 \wedge \bar{l}_2) &= (l_1 \vee l_2 \vee \bar{l}_1) \wedge (l_1 \vee l_2 \vee \bar{l}_2) \\ &= (1 \vee l_2) \wedge (l_1 \vee 1) = 1 \wedge 1 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad (l_1 \vee l_2) \wedge (\bar{l}_1 \wedge \bar{l}_2) &= (l_1 \wedge \bar{l}_1 \wedge \bar{l}_2) \vee (l_2 \wedge \bar{l}_1 \wedge \bar{l}_2) \\ &= (0 \wedge \bar{l}_2) \vee (0 \wedge \bar{l}_1) = 0 \vee 0 = 0 \end{aligned}$$

由补元的唯一性 $\overline{l_1 \vee l_2} = \bar{l}_1 \wedge \bar{l}_2$

7.5 布尔代数

布尔代数

定义7-10 **布尔代数**: 有补分配格, 记 $\langle B; \bar{}, \vee, \wedge \rangle$

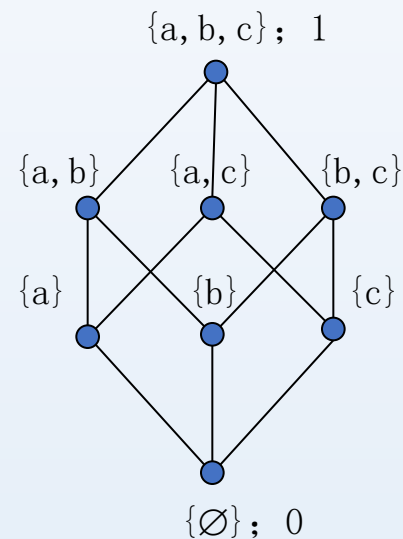
性质: 对于任意的 $x, y, z \in B$, 有

1) **交换律** $x \vee y = y \vee x$

$$x \wedge y = y \wedge x$$

2) **结合律** $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$

$$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$$



3) 等幂律

$$x \vee x = x$$

$$x \wedge x = x$$

4) 吸收律

$$x \vee (x \wedge y) = x$$

$$x \wedge (x \vee y) = x$$

5) 分配律

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$

6) 同一律

$$x \vee 0 = x; \quad x \wedge 1 = x$$

7) 零一律

$$x \vee 1 = 1; \quad x \wedge 0 = 0$$

8) 互补律

$$x \vee \bar{x} = 1 \quad x \wedge \bar{x} = 0$$

9) 对合律

$$\overline{\bar{x}} = x$$

10) 德摩根定律

$$\overline{x \vee y} = \bar{x} \wedge \bar{y} \quad \overline{x \wedge y} = \bar{x} \vee \bar{y}$$

例 集合代数 $\langle 2^U; \cup, \cap \rangle$ 是布尔代数，也有10条性质。

前面所列10条性质，只有交换、分配、同一和互补是基本的，因此
可从代数系统的角度重新定义布尔代数——

布尔代数： 设B是任意集合，若在B上定义运算 $\neg, \vee, \wedge$ 满足下面的性质
(**Hangtington公理**)

1) 对任意的 $x, y \in B$ ，有

$$x \vee y \in B, \quad x \wedge y \in B$$

封闭性（代数系统）

2) 存在 $0 \in B$ ，对任意的 $x \in B$ ，有

$$x \vee 0 = x$$

存在 $1 \in B$ ，对任意的 $x \in B$ ，有

$$x \wedge 1 = x$$

同一律

3) 对任意的 $x \in B$ ，存在 $\bar{x} \in B$

$$x \wedge \bar{x} = 0 \quad x \vee \bar{x} = 1$$

互补律

4) 对任意 $x, y \in B$ ，有 $x \vee y = y \vee x$

$$x \wedge y = y \wedge x$$

交换律

5) $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$

分配律

则称 $\langle B; \neg, \vee, \wedge \rangle$ 为布尔代数。

子布尔代数：设 $\langle B; \neg, \wedge, \vee \rangle$ 和 $\langle A; \neg, \wedge, \vee \rangle$ 是布尔代数，若 $A \subseteq B$ ，则称 $\langle A; \neg, \wedge, \vee \rangle$ 是 $\langle B; \neg, \wedge, \vee \rangle$ 的子布尔代数。

定理7-20 布尔代数的任意子代数都是它的子布尔代数。（这与子格的情况相同）

§7.6 有限布尔代数的同构

布尔代数的构造

布尔代数存在着类似于(半)群生成子的一些元素，所有元素都可通过它们的运算表示出来，不同的是它所有的元素都是幂等的。

定义7-11 原子： 设 $\langle B; \bar{}, \wedge, \vee \rangle$ 是布尔代数，若存在元素 $a \in B$ ，满足

(1) $a \neq 0$

(2) 对于一切的 $x \in B$ ，有

$$x \wedge a = a, \text{ 或 } x \wedge a = 0$$

称 a 为原子。

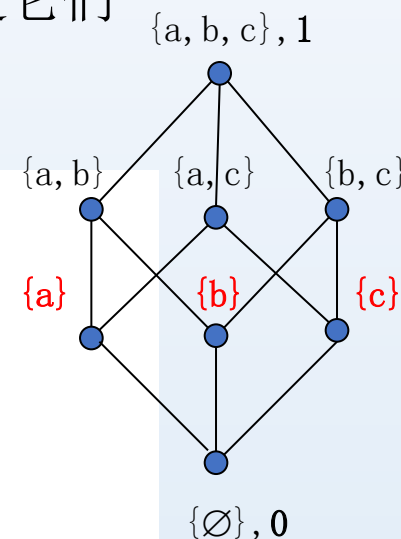
从偏序角度看

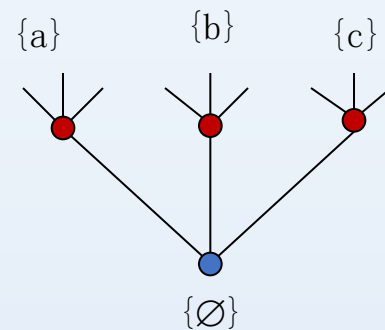
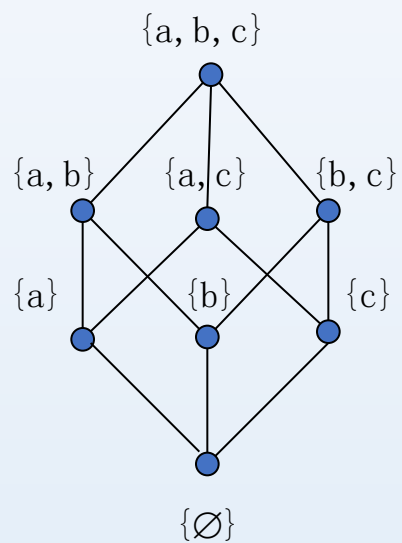
(1) $a \neq 0$

(2) 对于非零元素 x ， $x \wedge a = a \Leftrightarrow a \leq x$ ； $x \wedge a = 0 \Leftrightarrow 0 \leq a$ ， $0 \leq x$

即 $0 < a \leq x$

这表明在0和原子之间无任何元素，或原子a是仅比0大的元素。





问题： 布尔代数是否一定存在原子？

定理7-22 有限布尔代数的原子存在性定理： 设 $\langle B; \bar{}, \wedge, \vee \rangle$ 是有限布尔代数，则对于每一非零元素 $x \in B$ ，一定存在原子 a ，使 $x \wedge a = a$ （或 $a \leq x$ ）。

证明：

(1) 若 x 是原子，问题已证。

(2) 若 x 不是原子，由于 $x \neq 0$ ，必存在 y ，使

$$y \wedge x \neq x \text{ 且 } y \wedge x \neq 0$$

令 $y \wedge x = x_1$ ，则

$$0 < x_1 < x$$

若 x_1 不是原子，则必存在 x_2 ，使

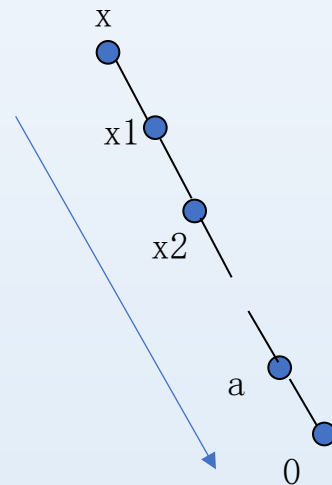
$$0 < x_2 < x_1 < x$$

因此可以得到序列

$$0 < \cdots < x_3 < x_2 < x_1 < x$$

由于 B 有限，必存在原子 $a \in B$ ，使序列在 a 中止

$$0 < a < \cdots < x_3 < x_2 < x_1 < x$$



定理7-23 如果 a_1 和 a_2 是布尔代数 $\langle B; \bar{}, \wedge, \vee \rangle$ 的两个原子, 且 $a_1 \wedge a_2 \neq 0$, 则 $a_1 = a_2$ 。

证明: 因 a_1 是原子, 若 $a_1 \wedge a_2 \neq 0$, 则

$$a_1 \wedge a_2 = a_1$$

因 a_2 是原子, 若 $a_1 \wedge a_2 \neq 0$, 则

$$a_1 \wedge a_2 = a_2$$

所以, 若 $a_1 \wedge a_2 \neq 0$, 则, $a_1 = a_2$

定理7-24 布尔代数的原子表示定理: 设 $\langle B; \bar{}, \wedge, \vee \rangle$ 是布尔代数, x 是 B 的任意非零元素,

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$$

是 B 中满足 $a_i \leq x$ 的所有原子, 则 x 可表示为

$$x = a_1 \vee a_2 \vee a_3 \vee \dots \vee a_n$$

证明: 令 $y = a_1 \vee a_2 \vee a_3 \vee \dots \vee a_n$

则 $y \leq x$

如能证明 $y \geq x$, 则 $x = y$ 。

若能证明

$$x \wedge \bar{y} = 0$$

则

$$y = y \vee (x \wedge \bar{y})$$

$$= (y \vee x) \wedge (y \vee \bar{y}) = y \vee x$$

即

$$y \geq x$$

假定

$$x \wedge \bar{y} \neq 0$$

由原子存在性定理，必然存在原子 $a \in B$ ，满足

$$a \leq x \wedge \bar{y}$$

因此有

$$a \leq x, \quad a \leq \bar{y}$$

然而

$$a \leq x, \quad \Rightarrow \quad a = a_i \leq y$$

故有

$$a \leq y \wedge \bar{y} = 0$$

即

$$a=0$$

原子不存在，与假设矛盾。

定理7-25 唯一性定理： x 的原子并表示方法是唯一的。

推论：所有原子的并等于最大元（1）。

定理7-26: 设 $\langle B; \bar{}, \wedge, \vee \rangle$ 是有限布尔代数, M 代表 B 中所有原子的集合, 则 $\langle B; \bar{}, \wedge, \vee \rangle$ 与 $\langle 2^M; ', \cap, \cup \rangle$ 同构。

证明: 定义函数 $h: B \rightarrow 2^M$

$$h(x) = \begin{cases} \emptyset & x = 0 \\ \{a \mid a \in M, a \leq x\} & x \neq 0 \end{cases}$$

h 是一个双射。

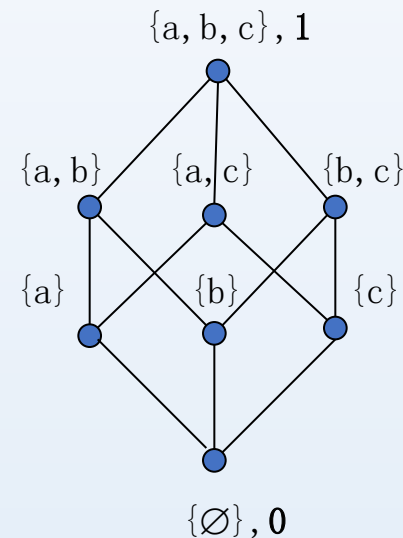
对任意元素 $x, y \in B$, 设

$$x = a_1 \vee a_2 \vee a_3 \vee \cdots \vee a_m, \quad y = b_1 \vee b_2 \vee b_3 \vee \cdots \vee b_n$$

$$\text{则 } h(x) = \{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_m\}, \quad h(y) = \{b_1, b_2, b_3, \cdots, b_n\}$$

$$x \vee y = a_1 \vee a_2 \vee a_3 \vee \cdots \vee a_m \vee b_1 \vee b_2 \vee b_3 \vee \cdots \vee b_n$$

$$h(x \vee y) = \{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_m; b_1, b_2, b_3, \cdots, b_n\} = h(x) \cup h(y)$$



$$\begin{aligned} \text{由分配律 } x \wedge y &= (a_1 \vee a_2 \vee a_3 \vee \cdots \vee a_m) \wedge (b_1 \vee b_2 \vee b_3 \vee \cdots \vee b_n) \\ &= \bigvee_i^m \bigvee_j^n (a_i \wedge b_j) \end{aligned}$$

由原子的性质可知

$$a_i \wedge b_j = \begin{cases} a_i = b_j = c_k & a_i = b_j \\ 0 & a_i \neq b_j \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{故 } x \wedge y &= \bigvee_k^l c_k \\ h(x \wedge y) &= \{c_1, c_2, c_3, \cdots, c_l\} = h(x) \cap h(y) \end{aligned}$$

$$\text{因 } x \vee \bar{x} = 1$$

$$\text{所以 } h(x \vee \bar{x}) = h(x) \cup h(\bar{x}) = M$$

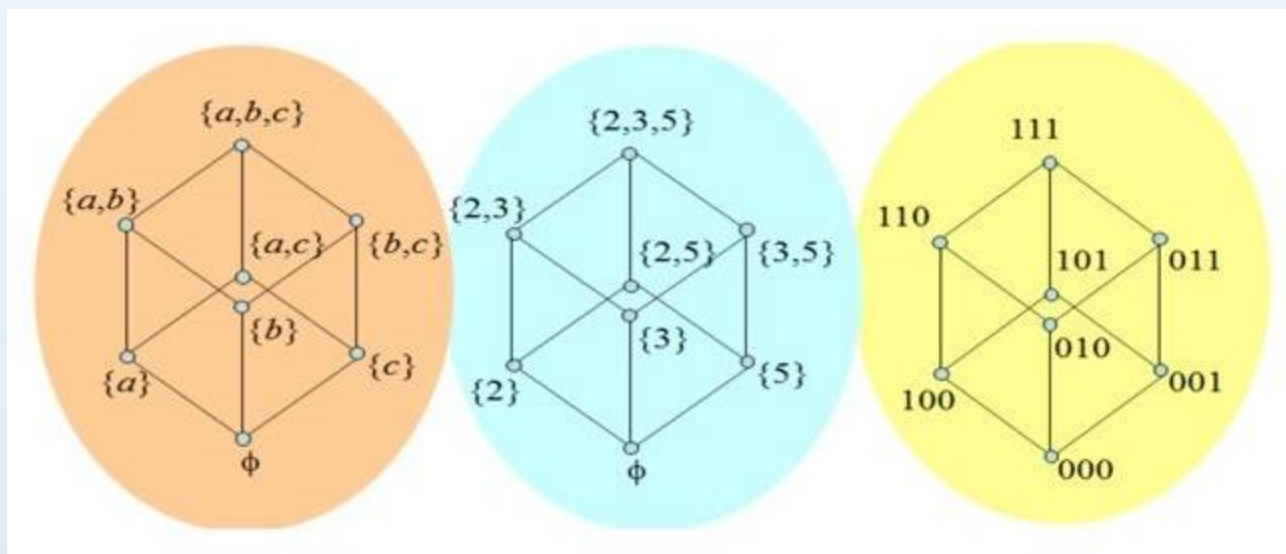
$$\text{又 } x \wedge \bar{x} = 0$$

$$\text{所以 } h(x \wedge \bar{x}) = h(x) \cap h(\bar{x}) = \emptyset$$

$$\text{即 } h(\bar{x}) = (h(x))'$$

满足同态方程, $\langle B; \bar{}, \wedge, \vee \rangle$ 与 $\langle 2^M; ', \cap, \cup \rangle$ 同构。

定理7-27：有限布尔代数域的基数是2的幂($\#B=2^M$)，域相同的布尔代数同构。



7.8 布尔表达式和布尔函数

布尔表达式

布尔表达式的递归定义：设 $\langle B; \bar{}, \wedge, \vee \rangle$ 是布尔代数，则 $B = \{0, \alpha, \beta, 1\}$

- (1) B中的元素都是布尔表达式； $0, \alpha, \beta, 1$
- (2) **变量** $x_1, x_2, \dots, x_n$ 是布尔表达式； $x_1, x_2, \dots, x_n$
- (3) 若 e_1 和 e_2 是布尔表达式，则 $e_1 \wedge e_2$, $e_1 \vee e_2$, $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ 也是布尔表达式；
- (4) 只有(1),(2),(3)定义的表达式才是布尔表达式。

也称为**n个变量的布尔函数**，记为 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ，与一般函数的写法相同。

例 $\langle \{0, \alpha, \beta, 1\}; \bar{}, \wedge, \vee \rangle$ 是布尔代数，则

$0 \wedge \alpha$, $1 \vee (\alpha \wedge x_1) \vee \bar{x}_2$ 是布尔函数。

相等：若两个具有n个变量的布尔函数 $f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 和 $f_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ，对n个变量的任意赋值，有相同的值，称**两布尔函数相等**。

有了相等的定义后，布尔代数的所有性质都可用于布尔函数的等式变换。

例 下表定义了布尔代数

x	$\bar{x}$
0	1
α	β
β	α
1	0

$\vee$	0	α	β	1
0	0	α	β	1
α	α	α	1	1
β	β	1	β	1
1	1	1	1	1

$\wedge$	0	α	β	1
0	0	0	0	0
α	0	α	0	α
β	0	0	β	β
1	0	α	β	1

布尔函数

$$\begin{aligned}
 f(x, y) &= (\beta \wedge \bar{x} \wedge y) \vee (\beta \wedge x \wedge \overline{(x \vee \bar{y})}) \vee (\alpha \wedge (x \vee (\bar{x} \wedge y))) \\
 &= (\beta \wedge \bar{x} \wedge y) \vee (\beta \wedge x \wedge \bar{x} \wedge y) \vee (\alpha \wedge x) \vee (\alpha \wedge (\bar{x} \wedge y)) \\
 &= ((\beta \vee \alpha) \wedge (\bar{x} \wedge y)) \vee (\alpha \wedge x) \\
 &= (\bar{x} \wedge y) \vee (\alpha \wedge x)
 \end{aligned}$$

等式变换运算。

最小项和最大项范式

定义7-13 **最小项**: 布尔表达式 $\hat{x}_1 \wedge \hat{x}_2 \wedge \cdots \wedge \hat{x}_n$ 称为 **n** 个变量产生的最小项。

其中 $\hat{x}_i = x_i$ 或 $\bar{x}_i$

通常记
小项。 $m_{\delta_1 \delta_2 \cdots \delta_n} = \hat{x}_1 \wedge \hat{x}_2 \wedge \cdots \wedge \hat{x}_n$ $\delta_1 \dots \delta_n$ 为二进制数, 有 2^n 个最

$$\delta_i = \begin{cases} 1 & \hat{x}_i = x_i \\ 0 & \hat{x}_i = \bar{x}_i \end{cases}$$

例

$$m_{1111} = x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge x_4$$

$$m_{0101} = \bar{x}_1 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_3 \wedge x_4$$

例

$$x_1 \wedge x_2 = (x_1 \wedge x_2) \wedge 1 = (x_1 \wedge x_2) \wedge (x_3 \vee \bar{x}_3) = (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_3)$$

定义7-13 **最大项**:

$$\tilde{m}_{\delta_1\delta_2\cdots\delta_n} = \hat{x}_1 \vee \hat{x}_2 \vee \cdots \vee \hat{x}_n \quad \delta_i = \begin{cases} 0 & \hat{x}_i = x_i \\ 1 & \hat{x}_i = \bar{x}_i \end{cases}$$

例 $\tilde{m}_{0000} = x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4$

$$\tilde{m}_{0010} = x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4$$

编号相同的最小项和最大项满足摩根定律。 如

$$m_{1111} = x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge x_4, \quad \tilde{m}_{1111} = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4$$

定理7-29 布尔代数 $\langle B; \bar{}, \wedge, \vee \rangle$ 上由 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 产生的每一个布尔表达式均能表示成:

最小项标准形式

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bigvee_{k=00\cdots 0}^{11\cdots 1} (c_k \wedge m_k)$$

最大项标准形式

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bigwedge_{k=00\cdots 0}^{11\cdots 1} (c_k \vee \tilde{m}_k)$$

系数

$$c_{k=\delta_1\delta_2\cdots\delta_n} = f(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n) \quad \delta = 0, 1$$

(证明见书)

因系数 c_k 唯一，范式也是唯一的。 有 2^n 个 c_k ，而 $c_k \in B$ ，所以有 $(\#B)^{2^n}$ 个布尔函数。

利用函数表，立即可写出布尔表达式的标准形式，再进行化简。

例如，假设 $f(x_1, x_2, x_3)$ 是 $\langle B; -, \vee, \wedge \rangle$ 上由 x_1, x_2, x_3 产生的一个布尔表达式，根据 (7-15) 式，它可以表示成如下形式：

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= [c_{000} \wedge m_{000}] \vee [c_{001} \wedge m_{001}] \vee \cdots \vee [c_{110} \wedge m_{110}] \\ &\quad \vee [c_{111} \wedge m_{111}] \\ &= [f(0, 0, 0) \wedge \bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge \bar{x}_3] \vee [f(0, 0, 1) \wedge \bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge x_3] \vee \\ &\quad \cdots \vee [f(1, 1, 0) \wedge x_1 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_3] \vee [f(1, 1, 1) \wedge x_1 \wedge x_2 \wedge x_3]. \end{aligned}$$

例 2 对例 1 中的布尔表达式

$$f(x, y) = (\beta \wedge \bar{x} \wedge y) \vee (\beta \wedge x \wedge (\bar{x} \vee \bar{y})) \vee (a \wedge (x \vee (\bar{x} \wedge y)))$$

运用表 7-7，可写出其最小项标准形式和最大项标准形式如下：

x	y	$f(x, y)$
0	0	0
0	a	a
0	β	β
0	1	1
a	0	a
a	a	a
a	β	1
a	1	1
β	0	0
β	a	a
β	β	0
β	1	a
1	0	a
1	a	a
1	β	a
1	1	a

$$\begin{aligned}
 f(x, y) &= (c_{00} \wedge m_{00}) \vee (c_{01} \wedge m_{01}) \vee (c_{10} \wedge m_{10}) \vee (c_{11} \wedge m_{11}) \\
 &= (f(0, 0) \wedge \bar{x} \wedge \bar{y}) \vee (f(0, 1) \wedge \bar{x} \wedge y) \vee (f(1, 0) \wedge x \wedge \bar{y}) \\
 &\quad \vee (f(1, 1) \wedge x \wedge y) \\
 &= (0 \wedge \bar{x} \wedge \bar{y}) \vee (1 \wedge \bar{x} \wedge y) \vee (a \wedge x \wedge \bar{y}) \vee (a \wedge x \wedge y), \\
 f(x, y) &= (c_{00} \vee \tilde{m}_{00}) \wedge (c_{01} \vee \tilde{m}_{01}) \wedge (c_{10} \vee \tilde{m}_{10}) \wedge (c_{11} \vee \tilde{m}_{11}) \\
 &= (f(0, 0) \vee x \vee y) \wedge (f(0, 1) \vee x \vee \bar{y}) \wedge (f(1, 0) \vee \bar{x} \vee y) \\
 &\quad \wedge (f(1, 1) \vee \bar{x} \vee \bar{y}) \\
 &= (0 \vee x \vee y) \wedge (1 \vee x \vee \bar{y}) \wedge (a \vee \bar{x} \vee y) \wedge (a \vee \bar{x} \vee \bar{y}).
 \end{aligned}$$

还可运用布尔代数的10条基本性质得到:

$$\begin{aligned}
 f(x, y) &= (\beta \wedge \bar{x} \wedge y) \vee (\beta \wedge x \wedge (\overline{x \vee \bar{y}})) \vee (\alpha \wedge (x \vee (\bar{x} \wedge y))) \\
 &= (\beta \wedge \bar{x} \wedge y) \vee (\beta \wedge x \wedge \bar{x} \wedge y) \vee (\alpha \wedge x) \vee (\alpha \wedge \bar{x} \wedge y) \\
 &= (\bar{x} \wedge y) \vee (\alpha \wedge x) \\
 &= (\bar{x} \wedge y) \vee (\alpha \wedge x \wedge y) \vee (\alpha \wedge x \wedge \bar{y}) \\
 &= (0 \wedge \bar{x} \wedge \bar{y}) \vee (1 \wedge \bar{x} \wedge y) \vee (\alpha \wedge x \wedge \bar{y}) \vee (\alpha \wedge x \wedge y) \\
 f(x, y) &= (\beta \wedge \bar{x} \wedge y) \vee (\beta \wedge x \wedge (\overline{x \vee \bar{y}})) \vee (\alpha \wedge (x \vee (\bar{x} \wedge y))) \\
 &= (\bar{x} \wedge y) \vee (\alpha \wedge x) \\
 &= (\alpha \vee \bar{x}) \wedge (\alpha \vee y) \wedge (x \vee y) \\
 &= (\alpha \vee \bar{x} \vee y) \wedge (\alpha \vee \bar{x} \vee \bar{y}) \wedge (\alpha \vee x \vee y) \wedge (x \vee y) \\
 &= (0 \vee x \vee y) \wedge (\alpha \vee \bar{x} \vee y) \wedge (\alpha \vee \bar{x} \vee \bar{y}) \\
 &= (0 \vee x \vee y) \wedge (1 \vee x \vee \bar{y}) \wedge (\alpha \vee \bar{x} \vee y) \wedge (\alpha \vee \bar{x} \vee \bar{y})
 \end{aligned}$$

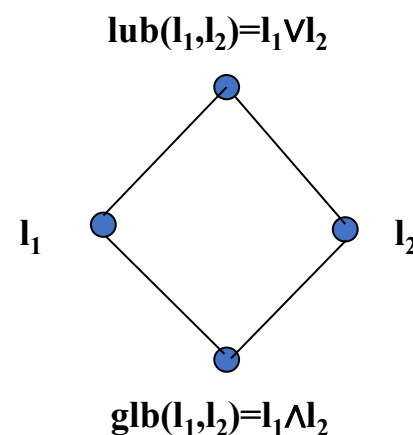
作业

3, 4, 12, 19, 25, 26, 34, 35

内容提要

1. 格的基本概念

- 偏序集、上界、下界、最大下界、最小上界、最小元素、最大元素；
- 最大下界、最小上界若存在，则唯一；
- 最小元素、最大元素若存在，则唯一；
- 格、子格.

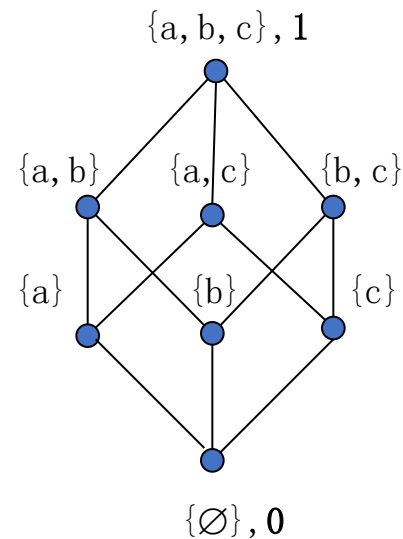


2. 格的性质

- 格的十条基本性质；
- 格的对偶原理；
- 格中的运算 $\vee$ 和 $\wedge$ 满足交换律、结合律、等幂律、吸收律；
- 格的保序性.

3. 特殊的格

- 分配格;
- 有补格;
- 有补分配格、布尔代数.



4. 布尔代数的性质

- 布尔代数中运算 $\vee$, $\wedge$, $-$, 满足十条基本性质, 其中交换律、分配律、同一律和互补律独立;
- 原子;
- 有限布尔代数 $\langle B; -, \vee, \wedge \rangle$ 同构于一集合代数 $\langle 2^M; ', \cup, \cap \rangle$.

5. 布尔表达式

例 7-1 设 $L = \{1, 2, \dots, 12\}$, 在 L 上定义整除关系.

(1) $\langle L; | \rangle$ 是否是偏序集, 若是, 画出其 Hasse 图;

(2) 在 L 中找 8 与 12 的最大下界和最小上界, 4 与 6 的最大下界和最小上界;

(3) 在 L 中找最小元素和最大元素.

解 (1) 因为在 L 上整除关系“ $|$ ”满足自反性、反对称、传递性, 所以 $\langle L; | \rangle$ 是偏序集, 其 Hasse 图如图 7-1 所示.

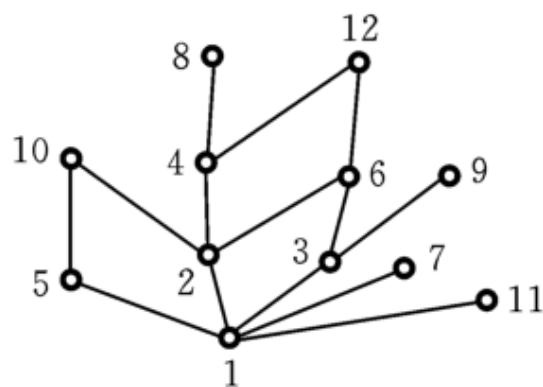


图 7-1

(2) 因为 $1|8, 2|8, 4|8, 1|12, 2|12, 4|12$, 所以 1, 2, 4 均是 8 与 12 的下界, 但由于 $1|4, 2|4$, 故 4 是最大下界.

在 L 中设有元素 a 能满足 $8|a$, 且 $12|a$, 故 8 与 12 无上界, 从而无最小上界.

另一方面, 因为 $1|4, 2|4, 1|6, 2|6$, 所以 1, 2 均是 4 与 6 的下界, 但由于 $1|2$, 因此 2 是 4 与 6 的最大下界.

因为 $4|12, 6|12$, 所以 12 是 4 与 6 的上界, 在 L 中设有元素 b 能满足 $4|b, 6|b$, 且 $b|12$, 所以 12 是 4 与 6 的最小上界.

(3) 因为对任意的 $a \in L, 1|a$, 所以 1 是 L 的最小元素.

在 L 中没有元素 x 能满足, 对任意 $l \in L, l|x$, 所以 L 无最大元素.

例 7-2 由图 7-2 所示的偏序集 $\langle L; \leq \rangle$, 哪一个 是格? 为什么?

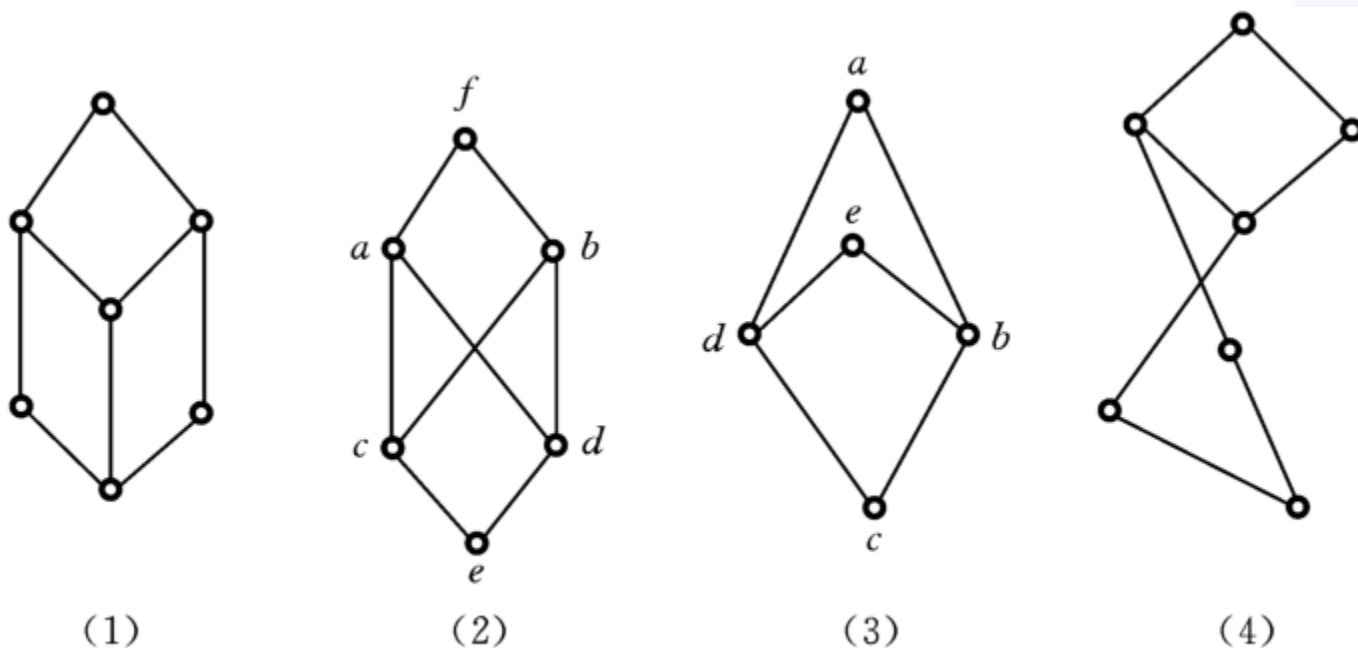


图 7-2

解 图 7-2(1)和图 7-2(4)所表示的偏序集是格, 因为 L 中任意两元素均有最大下界和最小上界.

图 7-2(2)所表示的偏序集不是格, 因为 c 与 d 有上界 a, b 和 f , 但由于 a 与 b 不可比较 (即 $a \not\leq b$, 且 $b \not\leq a$), 所以 c 与 d 无最小上界. 故不是格.

图 7-2(3)所表示的偏序集也不是格, 因为 e 与 a 没有最大下界.

例 7-6 设 $B = \{0, 1\}$, $B^3 = \{(a_1, a_2, a_3) \mid a_i \in B\}$, 证明 $\langle B^3; \vee, \wedge \rangle$ 是一个格, 其中, 对任意的 $(a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3) \in B^3$, 有

$$(a_1, a_2, a_3) \vee (b_1, b_2, b_3) = (\max\{a_1, b_1\}, \max\{a_2, b_2\}, \max\{a_3, b_3\}),$$

$$(a_1, a_2, a_3) \wedge (b_1, b_2, b_3) = (\min\{a_1, b_1\}, \min\{a_2, b_2\}, \min\{a_3, b_3\}).$$

解 由定义知 $\vee, \wedge$ 是 B 上的二元运算. 因为对 $\forall a, b, c \in B$, 有

$$\max\{a, b\} = \max\{b, a\}, \quad \min\{a, b\} = \min\{b, a\},$$

$$\max\{a, \max\{b, c\}\} = \max\{\max\{a, b\}, c\} = \max\{a, b, c\},$$

$$\min\{a, \min\{b, c\}\} = \min\{\min\{a, b\}, c\} = \min\{a, b, c\},$$

所以运算 $\wedge, \vee$ 满足交换律和结合律.

又对任意的 $(a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3) \in B^3$, 有

$$(a_1, a_2, a_3) \wedge [(a_1, a_2, a_3) \vee (b_1, b_2, b_3)]$$

$$= (a_1, a_2, a_3) \wedge (\max\{a_1, b_1\}, \max\{a_2, b_2\}, \max\{a_3, b_3\})$$

$$= (\min\{a_1, \max\{a_1, b_1\}\}, \min\{a_2, \max\{a_2, b_2\}\}, \min\{a_3, \max\{a_3, b_3\}\}).$$

若 $a_1 \geq b_1$, 则

$$\min\{a_1, \max\{a_1, b_1\}\} = \min\{a_1, a_1\} = a.$$

若 $a_1 < b_1$, 则

$$\min\{a, \max\{a_1, b_1\}\} = \min\{a_1, b_1\} = a.$$

所以 $(a_1, a_2, a_3) \wedge [(a_1, a_2, a_3) \vee (b_1, b_2, b_3)] = (a_1, a_2, a_3).$

类似可证

$$(a_1, a_2, a_3) \vee [(a_1, a_2, a_3) \wedge (b_1, b_2, b_3)] = (a_1, a_2, a_3).$$

所以运算 $\wedge, \vee$ 满足吸收律, 故 $\langle B^3; \vee, \wedge \rangle$ 是一个格.

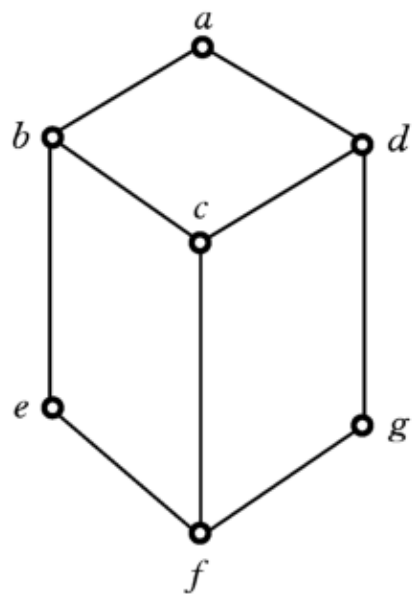


图 7-3

例 7-7 设 $\langle L; \leq \rangle$ 是格, 其 Hasse 图如图 7-3 所示, 取 $S_1 = \{a, b, c, d\}$, $S_2 = \{a, b, d, f\}$, $S_3 = \{b, c, d, f\}$, 问 $\langle S_1; \leq \rangle$, $\langle S_2; \leq \rangle$, $\langle S_3; \leq \rangle$ 中哪些是格? 哪些是 $\langle L; \leq \rangle$ 的子格.

解 (1) 对 $\forall x, y \in S_1$, 由 Hasse 图知 $\text{glb}(x, y) = x \wedge y \in S_1$, $\text{lub}(x, y) = x \vee y \in S_1$.

所以, $\langle S_1; \leq \rangle$ 是格, 且是 $\langle L; \leq \rangle$ 的子格.

(2) $b, d \in S_2$, $\text{glb}(b, d) = f \in S_2$, $\text{lub}(b, d) = a \in S_2$ 可以验证 S_2 中, 任意两元素的最大下界和最小上界存在, 所以 $\langle S_2; \leq \rangle$ 是格. 但在 S_2 中, $\text{glb}(b, d) = f$ 不等于 L 中 $\text{glb}(b, d) = c$, 即 $\wedge$ 在 S_2 中不封闭. 因此, $\langle S_2; \leq \rangle$ 不是 $\langle L; \leq \rangle$ 的子格.

(3) b, d 在 S_3 中无最小上界, 故 $\langle S_3; \leq \rangle$ 不是格.

例 7-8 如图 7-4 所示的几个次序图均是格,哪个是分配格? 哪个是有补格?

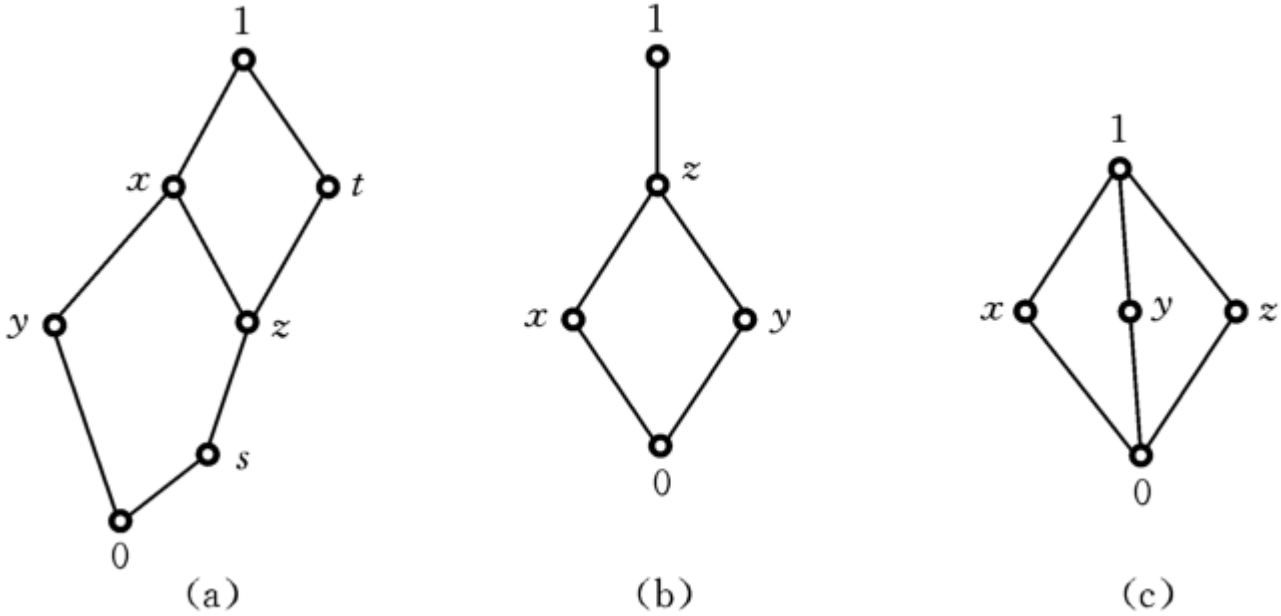


图 7-4

不是分配格
不是有补格

是分配格
不是有补格

不是分配格
是有补格

解 这三个格均是有界格.

(1) 因为图 7-4(a)中 x 无补元,故它不是有补格.

又因为

$$z \wedge (y \vee s) = z \wedge x = z,$$

$$(z \wedge y) \vee (z \wedge s) = 0 \vee s = s.$$

所以 $z \wedge (y \vee s) \neq (z \wedge y) \vee (z \wedge s)$,故图 7-4(a)也不是分配格.

(2) 因为图 7-4(b)中 z 无补元,故它不是有补格. 可以验证,图 7-4(b)中任意三元素满足分配等式,故是分配格.

(3) 图 7-4(c)中 $0, 1$ 互补, x, y, z 两两互补,故图 7-4(c)是一有补格. 又因为

$$x \wedge (y \vee z) = x \wedge 1 = x,$$

$$(x \wedge y) \vee (x \wedge z) = 0 \vee 0 = 0,$$

所以

$$x \wedge (y \vee z) \neq (x \wedge y) \vee (x \wedge z),$$

故图 7-4(c)不是分配格.

浙江大学 信息学院 信电系 电子信息技术与系统研究所 宋牟平

例 7-10 设 $\langle B; ', \vee, \wedge \rangle$ 为布尔代数, $\# B \geq 2$, 任取 $a \in B, a \neq 0, a \neq 1$, 证明 $\langle T; ', \vee, \wedge \rangle$ 是 B 的一子代数, 且是布尔代数, 其中 $T = \{0, a, a', 1\}$.

解 对 T 中各元素的运算表如表 7-1 所示.

因 B 是布尔代数, 且由运算表 7-1 知, T 对 $\vee, \wedge, '$ 封闭, 故是 B 的子代数. 故根据定理 7.7.1 知, $\langle T; \vee, \wedge, ' \rangle$ 也是一布尔代数.

表 7-1

$\vee$	0	a	a'	1
0	0	a	a'	1
a	a	a	1	a
a'	a'	1	a'	a
1	1	1	1	1

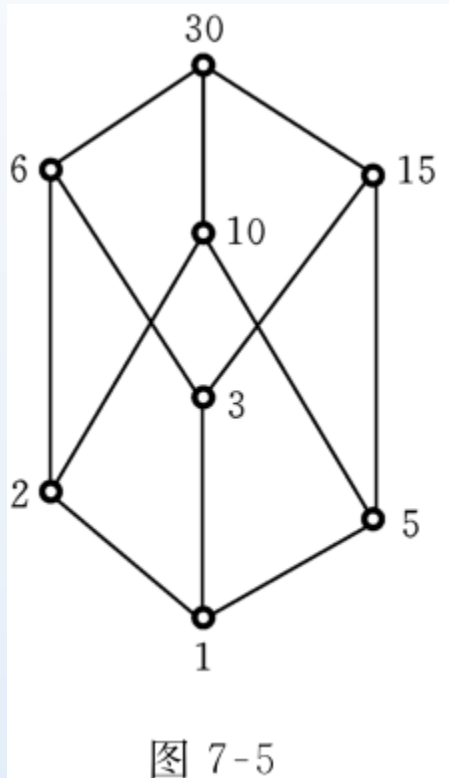
$\wedge$	0	a	a'	1
0	0	0	0	0
a	0	a	0	a
a'	0	0	a'	a'
1	0	a	a'	1

$'$	
0	1
a	a'
a'	a
1	0

浙江大学信息学院信电系电子信息技术与系统研究所宋牟平

例 7-11 设 $S=\{1,2,3,5,6,10,15,30\}$, 在 S 上定义整除关系“ $|$ ”, 则 $\langle S; | \rangle$ 是一个有补分配格, 即布尔代数, 求其所有的原子, 以及 $x=10, x=15$ 的原子表达式.

解 $\langle S; | \rangle$ 的 Hasse 图如图 7-5 所示.



由 Hasse 图可验证 $\langle S; | \rangle$ 是一有补分配格, 即布尔代数, 最小元素是 1, 最大元素是 30.

因为 $a=2 \neq 1$ (最小元素, 相当于 0), 且对任意 $x \in B, x \wedge 2 = 2$ 或 $x \wedge 2 = 1$, 所以 2 是原子. 类似可验证 3, 5 也是原子, 该布尔代数 $\langle S; ', \vee, \wedge \rangle = \langle S; | \rangle$ 的所有原子为 2, 3, 5.

$x=10$ 和 $x=15$ 的原子表达式分别为 $10=2 \vee 5, 15=3 \vee 5$.

例 7-13 作出满足下述要求的六元素格：(1) 全序；(2) 有补格；(3) 分配格。
是否有六元素的布尔代数？

解 满足要求的各六元素格的 Hasse 图如图 7-6 所示。
由于 6 不是 2 的幂，所以没有六个元素的布尔代数。

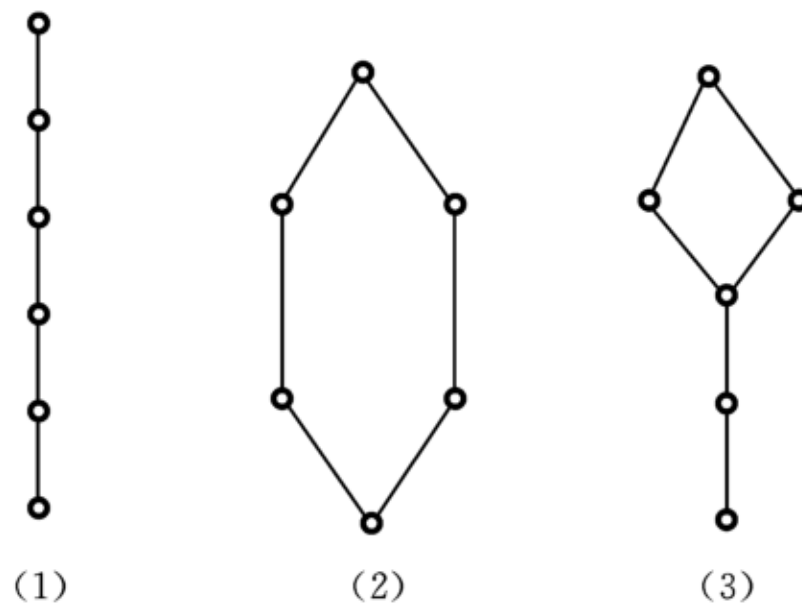


图 7-6

例 7-17 设 $\langle L; \leq \rangle$ 是一有界分配格, L_1 是 L 中所有具有补元的元素组成的集合. 试证明 $\langle L_1; \leq \rangle$ 是 $\langle L; \leq \rangle$ 的子格.

证 对任意 $l_1, l_2 \in L_1$, 即 $\exists \bar{l}_1, \bar{l}_2 \in L$ 使 $l_1 \wedge \bar{l}_1 = 0, l_1 \vee \bar{l}_1 = 1, l_2 \wedge \bar{l}_2 = 0, l_2 \vee \bar{l}_2 = 1$.

$$(l_1 \vee l_2) \wedge (\bar{l}_1 \wedge \bar{l}_2) = (l_1 \wedge \bar{l}_1 \wedge \bar{l}_2) \vee (l_2 \wedge \bar{l}_1 \wedge \bar{l}_2) = 0 \vee 0 = 0,$$

$$(l_1 \vee l_2) \vee (\bar{l}_1 \wedge \bar{l}_2) = (l_1 \vee l_2 \vee \bar{l}_1) \wedge (l_1 \vee l_2 \vee \bar{l}_2) = 1 \vee 1 = 1,$$

所以 $\overline{l_1 \vee l_2} = \bar{l}_1 \wedge \bar{l}_2, l_1 \vee l_2 \in L_1$.

类似地, 有

$$(l_1 \wedge l_2) \wedge (\bar{l}_1 \vee \bar{l}_2) = (l_1 \wedge l_2 \wedge \bar{l}_1) \vee (l_1 \wedge l_2 \wedge \bar{l}_2) = 0,$$

$$(l_1 \wedge l_2) \vee (\bar{l}_1 \vee \bar{l}_2) = (l_1 \vee \bar{l}_1 \vee \bar{l}_2) \wedge (l_2 \vee \bar{l}_1 \vee \bar{l}_2) = 1 \wedge 1 = 1.$$

所以

$$\overline{l_1 \wedge l_2} = \bar{l}_1 \vee \bar{l}_2, l_1 \wedge l_2 \in L_1.$$

因此 $\langle L_1; \leq \rangle$ 是 $\langle L; \leq \rangle$ 的子代数, 故 $\langle L_1; \leq \rangle$ 是 $\langle L; \leq \rangle$ 的子格.

例 7-18 设 $\langle L; \leq \rangle$ 是一个格, 如果任意 $a, b, c \in L$, 则

$$[(a \wedge b) \vee (a \wedge c)] \wedge [(a \wedge b) \vee (b \wedge c)] = a \wedge b.$$

证 由式(7-4')知

$$a \wedge b \leq (a \wedge b) \vee (a \wedge c),$$

$$a \wedge b \leq (a \wedge b) \vee (b \wedge c).$$

所以根据定理 7.4.1, 有

$$(a \wedge b) \wedge (a \wedge b) \leq [(a \wedge b) \vee (a \wedge c)] \wedge [(a \wedge b) \vee (b \wedge c)].$$

由幂等律得

$$a \wedge b \leq [(a \wedge b) \vee (a \wedge c)] \wedge [(a \wedge b) \vee (b \wedge c)].$$

另一方面, 由式(7-4)知

$$a \wedge c \leq a, \quad a \wedge b \leq a.$$

于是由定理 7.4.1 及幂等律得

$$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \leq a \vee a = a,$$

$$(a \wedge b) \vee (b \wedge c) \leq b \vee b = b.$$

再根据定理 7.4.1 得

$$[(a \wedge b) \vee (a \wedge c)] \wedge [(a \wedge b) \vee (b \wedge c)] \leq a \wedge b. \quad (2)$$

由式(1)、式(2)即得

$$[(a \wedge b) \vee (a \wedge c)] \wedge [(a \wedge b) \vee (b \wedge c)] = a \wedge b.$$

例 7-19 已知 G 为群, $S(G)$ 为其子群的全体构成的集合, 偏序关系是集合的包含关系 $\subseteq$, 证明 $\langle S(G); \subseteq \rangle$ 是格. $\langle S(G); \subseteq \rangle$ 是否为 $\langle 2^G; \subseteq \rangle$ 的子格?

证 (1) 对任意的 $H_1, H_2 \in S(G)$, 易知 $H_1 \cap H_2$ 仍是 G 的子群, 所以

$$H_1 \cap H_2 = \text{glb}(H_1, H_2) \in S(G).$$

但 $H_1 \cup H_2$ 不一定仍是子群, 故 $\text{lub}(H_1, H_2) = H$, 其中 $H_1 \cup H_2 \subseteq H$, H 是包含 $H_1 \cup H_2$ 的 G 中最小子群, 最坏情况 $H = G$, 故 $H \in S(G)$, 因此, $\langle S(G); \subseteq \rangle$ 是格.

(2) $\langle S(G); \subseteq \rangle$ 不是 $\langle 2^G; \subseteq \rangle$ 的子格.

由于不能保证 $H_1 \cup H_2$ 仍是子群, 所以, 可能 H_1 与 H_2 在 $S(G)$ 中的最小上界 $\text{lub}(H_1, H_2) = H$, 但不等于 H_1 与 H_2 在 2^G 中的最小上界 $H_1 \cup H_2$. 因此, $\langle S(G); \subseteq \rangle$ 不是 $\langle 2^G; \subseteq \rangle$ 的子格.

例 7-20 设有集合 A, B 和函数 $f: A \rightarrow B, S \subseteq 2^B$ 定义为 $S = \{y \mid y = f(x), x \in 2^A\}$, 试证明 S 对于集合的运算 $\cup$ 和 $\cap$ 构成格 $\langle 2^B; \cup, \cap \rangle$ 的子格.

证 对任意的 $S_1, S_2 \in S$, 由 S 的定义知, 存在 $A_1, A_2 \in 2^A$, 使 $f(A_1) = S_1, f(A_2) = S_2$, 于是 $S_1 \cup S_2 = f(A_1) \cup f(A_2)$, 容易证明 $f(A_1) \cup f(A_2) = f(A_1 \cup A_2)$, 而 $A_1, A_2 \in 2^A$, 所以 $A_1 \cup A_2 \in 2^A$.

由 S 的定义知 $f(A_1 \cup A_2) \in S$, 所以

$$S_1 \cup S_2 = f(A_1) \cup f(A_2) = f(A_1 \cup A_2) \in S,$$

即 S 关于 $\cup$ 运算封闭.

又因 $S_1 \subseteq B, S_2 \subseteq B$, 所以 $S_1 \cap S_2 \subseteq B$. 对任意 $b \in S_1 \cap S_2$, 有 $b \in S_1 = f(A_1)$, 即存在 $a \in A$, 使 $f(a) = b$. 也就是说, 对任意 $b \in S_1 \cap S_2$, 存在 $a \in A$, 使 $f(a) = b$.

于是令集合 $A_3 = \{a \mid a \in A, f(a) = b, b \in S_1 \cap S_2\}$, 显然 $A_3 \in 2^A$, 且 $S_1 \cap S_2 = f(A_3)$, 从而 $S_1 \cap S_2 \in S$.

由上可知, S 关于 $\cup, \cap$ 封闭, 故 $\langle S; \cup, \cap \rangle$ 是 $\langle 2^B; \cup, \cap \rangle$ 的子代数, 因此 $\langle S; \cup, \cap \rangle$ 是 $\langle 2^B; \cup, \cap \rangle$ 的子格.

End of Chapter 7