

电磁场与电磁波

第9讲

3.6 坡印廷定理

3.7 电磁场的几个基本原理与定理

魏兴昌

浙江大学

weixc@zju.edu.cn

作业：3.9, 3.10, 3.13

电磁波有能量，电磁波传播时，其功率流怎么表示？

电场 $\mathbf{E}$ 的单位是 V/m ，磁场 $\mathbf{H}$ 的单位是 A/m ， $\mathbf{E}$ 与 $\mathbf{H}$ 乘积的单位是 W/m^2 ，与功率流密度的单位相同。

定义矢量 $\mathbf{S}(\mathbf{r}, t)$ ，它是 $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ 与 $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ 的叉积，即

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$$

显然， $\mathbf{S}(\mathbf{r}, t)$ 是矢量，它具有功率流的量纲。

这个 $\mathbf{S}(\mathbf{r}, t)$ 是否就是我们要找的电磁功率流呢？为此我们考察它的散度

$\nabla \cdot \mathbf{S}(\mathbf{r}, t)$ ，即通量体密度，所包含的物理意义。

$$\nabla \cdot \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = \nabla \cdot (\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)) = \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \cdot [\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)] - \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot [\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)]$$

因此， $\nabla \cdot \mathbf{S}(\mathbf{r}, t)$ 具体表达式可从麦克斯韦方程得到

坡印廷功率流 $\mathbf{S}(\mathbf{r}, t)$ 表示的物理意义

$$\nabla \cdot \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \cdot [\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)] - \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot [\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)]$$

而从麦克斯韦两个旋度方程，以及 $\mathbf{D}=\epsilon\mathbf{E}$, $\mathbf{B}=\mu\mathbf{H}$ 可得

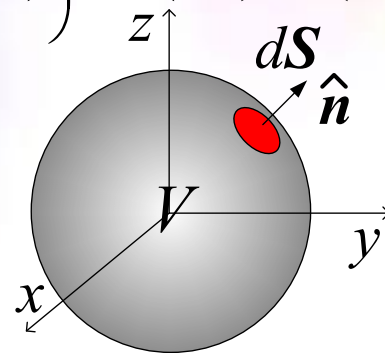
$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \cdot [\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)] &= -\mu \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \cdot \frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \\ \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot [\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)] &= \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) + \epsilon \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \end{array} \right.$$

所以

$$\nabla \cdot \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mu}{2} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon}{2} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \right) - \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$$

对上式两边在体积 V 内作积分，并利用散度定理得到

$$\begin{aligned} \oint_S \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S} &= \int_V (\nabla \cdot \mathbf{S}(\mathbf{r}, t)) dV \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} \int_V \left(\frac{\mu}{2} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \right) dV - \frac{\partial}{\partial t} \int_V \left(\frac{\epsilon}{2} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \right) dV - \int_V (\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)) dV \end{aligned}$$



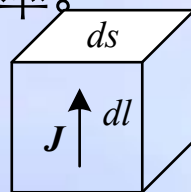
坡印廷功率流 $\mathbf{S}(\mathbf{r}, t)$ 表示的物理意义

$$\oint_S \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V \left(\frac{\mu}{2} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \right) dV - \frac{\partial}{\partial t} \int_V \left(\frac{\varepsilon}{2} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \right) dV - \int_V (\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)) dV$$

$\frac{\mu}{2} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ 表示单位体积中瞬时储存的磁场能；

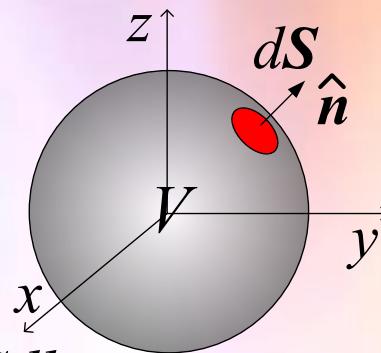
$\frac{\varepsilon}{2} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ 表示单位体积中瞬时储存的电场能。

$-\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ 表示源提供的功率。
负号表示源。



$$dV = dS dl$$

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} dV = \int_V \mathbf{J} dS \cdot \mathbf{E} dl = IV$$



上式的右边表示体积 V 内源提供的功率，以及 V 内储存能量随时间的减少率。根据能量守恒定律，它应当等于从体积 V 流出的功率。

所以上式左边就表示从 V 流出的电磁功率，而 $\mathbf{S}(\mathbf{r}, t)$ 就表示电磁功率流密度。

上式表示的电磁能流关系称为**坡印廷定理**，而矢量 $\mathbf{S}(\mathbf{r}, t)$ 称为**瞬时坡印廷矢量**。

对于时谐场，定义复数坡印廷功率流 $\mathbf{S}(\mathbf{r})$ ，它是复矢量 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ 与 $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ 的共轭复矢量 $\mathbf{H}^*(\mathbf{r})$ 的叉积。

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}) \equiv \mathbf{E}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}^*(\mathbf{r})$$

$$\text{因为} \quad \begin{cases} \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -j\omega\mu\mathbf{H}(\mathbf{r}) \\ \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = j\omega\varepsilon\mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathbf{J} \end{cases} \quad \begin{cases} \varepsilon = \varepsilon' - j\varepsilon'' \\ \mu = \mu' - j\mu'' \end{cases} \quad \mathbf{J}(\mathbf{r}) = \sigma\mathbf{E}(\mathbf{r})$$

所以

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{S}(\mathbf{r}) &= \nabla \cdot (\mathbf{E}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}^*(\mathbf{r})) = -j\omega[\mu |\mathbf{H}(\mathbf{r})|^2 - \varepsilon^* |\mathbf{E}(\mathbf{r})|^2] - \sigma |\mathbf{E}(\mathbf{r})|^2 \\ &= -\omega(\mu'' |\mathbf{H}(\mathbf{r})|^2 + \varepsilon'' |\mathbf{E}(\mathbf{r})|^2) - \sigma |\mathbf{E}(\mathbf{r})|^2 - j2\omega\left(\frac{1}{2}\mu' |\mathbf{H}(\mathbf{r})|^2 - \frac{1}{2}\varepsilon' |\mathbf{E}(\mathbf{r})|^2\right) \\ &= -p_r - j2\omega(w_m - w_e) \end{aligned}$$

$$\text{式中} \quad p_r = \text{Re}[-\nabla \cdot \mathbf{S}(\mathbf{r})] = \omega(\mu'' |\mathbf{H}(\mathbf{r})|^2 + \varepsilon'' |\mathbf{E}(\mathbf{r})|^2) + \sigma |\mathbf{E}(\mathbf{r})|^2$$

$$w_m = \frac{1}{2}\mu' |\mathbf{H}(\mathbf{r})|^2 \quad w_e = \frac{1}{2}\varepsilon' |\mathbf{E}(\mathbf{r})|^2$$

w_e 、 w_m 分别表示时间平均电场能密度与磁场能密度， p_r 代表单位体积内电阻损耗与介质损耗。

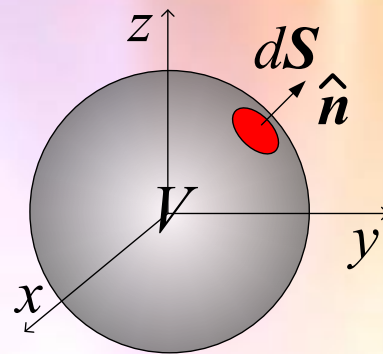
复数坡印廷定理

7

$$\nabla \cdot \mathbf{S} = -p_r - j2\omega(w_m - w_e) \quad \mathbf{S}(\mathbf{r}) \equiv \mathbf{E}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}^*(\mathbf{r})$$

利用散度定理

$$\begin{aligned} -\oint_S \mathbf{S}(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS &= \int_V (p_r + j2\omega(w_m - w_e)) dV \\ &= P_R + j2\omega(W_m - W_e) \end{aligned}$$



式中 $P_R = \int_V \omega(\mu'' |\mathbf{H}|^2 + \varepsilon'' |\mathbf{E}|^2) dV + \int_V \sigma |\mathbf{E}|^2 dV$

$$W_m = \int_V w_m dV \quad W_e = \int_V w_e dV$$

- 表示流入闭曲面 S 包围的体积 V 内的复数坡印廷功率的实部等于体积 V 内平均损耗的功率。
- 当体积 V 内储存的磁场能与电场能的时间平均值不相等时，对于时间呈现电性的或磁性的这部分平均净储能，需要用复数坡印廷功率流的虚部来平衡。

复数坡印廷功率流

$$\begin{aligned}
 \langle \mathbf{S}(x, y, z, t) \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{E}(x, y, z, t) \times \mathbf{H}(x, y, z, t) dt \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{E}(x, y, z, t) \times \mathbf{H}(x, y, z, t) d(\omega t) \\
 &= \frac{1}{2} \text{Re}[\mathbf{E}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}^*(\mathbf{r})]
 \end{aligned}$$

因此时间平均坡印廷功率流 $\langle \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) \rangle$ 的计算可简化为取复数坡印廷功率流 $[\mathbf{E}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}^*(\mathbf{r})]$ 实部的运算。

$$\langle \mathbf{S}(x, y, z, t) \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(\mathbf{S}(\mathbf{r}))$$

通过复数坡印廷功率流 $\mathbf{S}(\mathbf{r})$ 求瞬态坡印廷功率流 $\mathbf{S}(t)$ 的时间平均值 $\langle \mathbf{S}(t) \rangle$ 极为方便

考虑到

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{x}}E_x \cos(\omega t + \varphi_x) + \hat{\mathbf{y}}E_y \cos(\omega t + \varphi_y) + \hat{\mathbf{z}}E_z \cos(\omega t + \varphi_z)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{x}}E_x e^{-j\varphi_x} + \hat{\mathbf{y}}E_y e^{-j\varphi_y} + \hat{\mathbf{z}}E_z e^{-j\varphi_z}$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(\omega t + \varphi) dt = \frac{1}{2}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega}$$

得到

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{J}(x, y, z, t) \cdot \mathbf{E}(x, y, z, t) \rangle &= \langle \sigma \mathbf{E}(x, y, z, t) \cdot \mathbf{E}(x, y, z, t) \rangle \\ &= \sigma \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{E}(x, y, z, t) \cdot \mathbf{E}(x, y, z, t) dt \\ &= \frac{1}{2} \sigma (E_x^2 + E_y^2 + E_z^2) \end{aligned}$$

$$\langle \mathbf{J}(x, y, z, t) \cdot \mathbf{E}(x, y, z, t) \rangle = \frac{1}{2} \sigma |\mathbf{E}(\mathbf{r})|^2$$

假设无耗媒质 $\varepsilon = \varepsilon', \mu = \mu'$

同理可得

$$\left\langle \frac{\mu}{2} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \right\rangle = \frac{1}{2} w_m = \frac{1}{4} \mu' |\mathbf{H}(\mathbf{r})|^2$$
$$\left\langle \frac{\varepsilon}{2} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \right\rangle = \frac{1}{2} w_e = \frac{1}{4} \varepsilon' |\mathbf{E}(\mathbf{r})|^2$$

考虑无耗媒质

对时域坡印廷定理取时间平均

$$\oint_S \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V \left(\frac{\mu}{2} \mathbf{H}(t) \cdot \mathbf{H}(t) \right) dV - \frac{\partial}{\partial t} \int_V \left(\frac{\varepsilon}{2} \mathbf{E}(t) \cdot \mathbf{E}(t) \right) dV - \int_V (\mathbf{J}(t) \cdot \mathbf{E}(t)) dV$$



$$-\oint_S \langle \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) \rangle \cdot d\mathbf{S} = \int_V \langle \mathbf{J}(t) \cdot \mathbf{E}(t) \rangle dV$$

对复数坡印廷定理取实部

$$-\oint_S \mathbf{S}(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \int_V (p_r + j2\omega(w_m - w_e)) dV$$



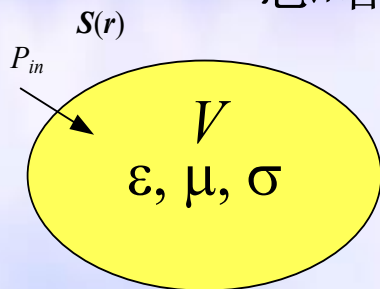
$$-\oint_S \operatorname{Re}[\mathbf{S}(\mathbf{r})] \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \int_V p_r dV = \int_V \sigma |\mathbf{E}(\mathbf{r})|^2 dV$$

但由于具有虚部，复数坡印廷定理具有比时域坡印廷定理更加丰富的物理含义。

复数坡印廷定理vs电路中的功率

12

忽略介质损耗, $\varepsilon = \varepsilon'$, $\mu = \mu'$ $\mathbf{S}(\mathbf{r}) \equiv \mathbf{E}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}^*(\mathbf{r})$

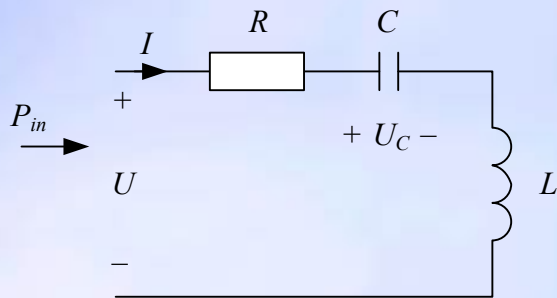


$$P_{in} = P_R + j2\omega(W_m - W_e)$$

$$-\oint_S \mathbf{S}(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \int_V \sigma |\mathbf{E}|^2 dV + j2\omega \left(\int_V \frac{1}{2} \mu' |\mathbf{H}(\mathbf{r})|^2 dV - \int_V \frac{1}{2} \varepsilon' |\mathbf{E}(\mathbf{r})|^2 dV \right)$$

Diagram illustrating the relationship between the complex Poynting theorem and circuit parameters:

- P_{in} (Input Power) is represented by UI^* .
- P_R (Resistive Power) is represented by $|I|^2 R$.
- W_m (Magnetic Energy) is represented by $j2\omega (1/2 |I|^2 L)$.
- W_e (Electric Energy) is represented by $1/2 |U_C|^2 C$.



- $I \leftrightarrow \mathbf{H}$, $U \leftrightarrow \mathbf{E}$
- 电磁数值软件 (HFSS, CST) 利用坡印廷定理可以从电场和磁场中提取电路的寄生参数;
- 谐振时, $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ $W_e = W_m$

1. 叠加定理
2. 唯一性定理
3. 镜像定理
4. 等效定理
5. 对偶定理
6. 互易定理

满足叠加定理的基本条件：

如果在我们所研究的区域内及边界上，媒质的 ε 、 μ 、 σ 都与场强无关，即我们处理的是线性媒质。

那么麦克斯韦方程组所描述的系统就是线性系统，满足线性系统的叠加定理。

电磁场的叠加定理是指：

若 $\mathbf{E}_i$ 、 $\mathbf{D}_i$ 、 $\mathbf{B}_i$ 、 $\mathbf{H}_i$ ， i 从1到 n ，是给定边界条件下麦克斯韦方程的多个解，则

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{E}_i \quad \sum_{i=1}^n \mathbf{D}_i \quad \sum_{i=1}^n \mathbf{B}_i \quad \sum_{i=1}^n \mathbf{H}_i \quad \left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \mathbf{E}_i = -\frac{\partial \mathbf{B}_i}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{H}_i = \mathbf{J}_i + \frac{\partial \mathbf{D}_i}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{D}_i = \rho_{vi} \\ \nabla \cdot \mathbf{B}_i = 0 \end{array} \right.$$

必是麦克斯韦方程在同一边界条件下的解。

唯一性定理

唯一性定理要回答在什么条件下麦克斯韦方程组的解才是唯一的。

线性媒质 V 内的一组源通过不同的方法求解，得到产生两个不同的解 $(\mathbf{E}_a, \mathbf{H}_a)$ 和 $(\mathbf{E}_b, \mathbf{H}_b)$ ，均满足麦氏方程组。

这两组解之差 $\begin{cases} \delta \mathbf{E} = \mathbf{E}_a - \mathbf{E}_b \\ \delta \mathbf{H} = \mathbf{H}_a - \mathbf{H}_b \end{cases}$ 也满足麦氏方程组

$$\nabla \times \delta \mathbf{H} = j\omega \varepsilon \delta \mathbf{E} + \sigma \delta \mathbf{E} \quad \nabla \times \delta \mathbf{E} = -j\omega \mu \delta \mathbf{H}$$

重复类似于导出复数坡印廷定理的步骤，可得到关系

或
$$\nabla \cdot (\delta \mathbf{E} \times \delta \mathbf{H}^*) = -j\omega [\mu |\delta \mathbf{H}|^2 - \varepsilon |\delta \mathbf{E}|^2] - \sigma |\delta \mathbf{E}|^2$$

$$\int_S (\delta \mathbf{E} \times \delta \mathbf{H}^*) \cdot d\mathbf{S} = -j\omega \int_V [\mu |\delta \mathbf{H}|^2 - \varepsilon |\delta \mathbf{E}|^2] dV - \int_V \sigma |\delta \mathbf{E}|^2 dV$$

如果 $\delta \mathbf{E}$ 或 $\delta \mathbf{H}$ 在边界 S 面上为零 - 》方程右端为零；又由于 $|\delta \mathbf{E}|^2$ 及 $|\delta \mathbf{H}|^2$ 为非负数 - 》 $\delta \mathbf{E}$ 和 $\delta \mathbf{H}$ 在体积 V 内处处为零，这说明 V 内的解唯一的。

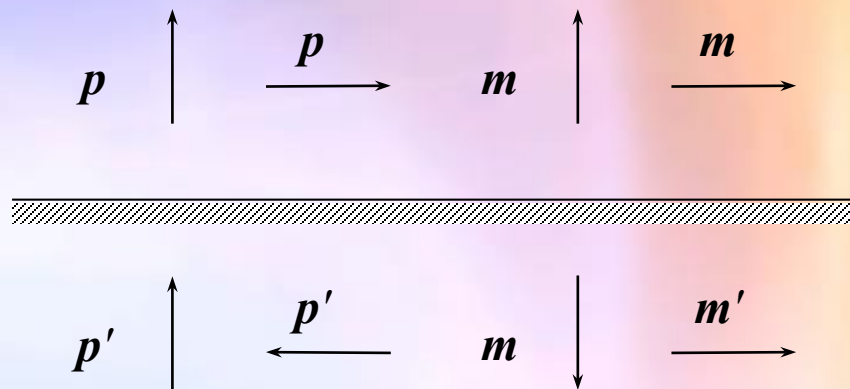
如果区域 V 的边界 S 面上的电场或磁场的**切向分量**给定，或者在 S 面上的部分区域给定 $\mathbf{E}$ 的切向分量，在 S 的其余表面给定 $\mathbf{H}$ 的切向分量，那么在区域 V 内的电磁场是唯一确定的。

镜像定理

镜像定理源于唯一性定理。

镜像定理：

当源靠近理想导体壁时，所产生的场相当于**原有的源**和以该壁为镜面产生的**镜像**一起建立的场。

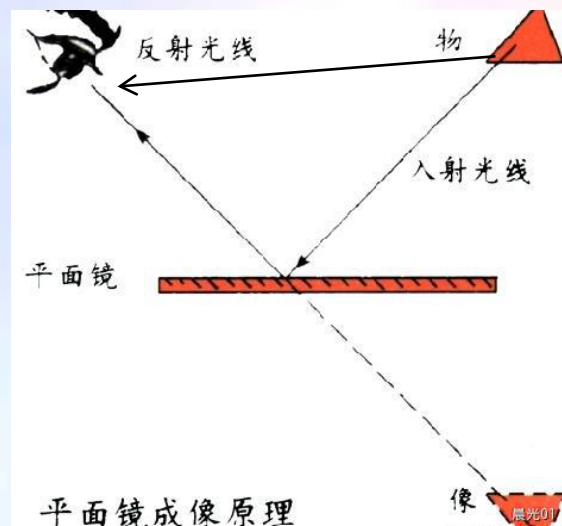


电偶极子/电流及磁偶极子/磁流在理想导体表面的镜像

镜像与原有的源共同建立的场在边界上满足理想导体的边界条件（即切向电场为零，法向磁场为零）。

这样求源靠近理想导体壁产生的场转化为求原有的源与其镜像产生的场，使场的求解大为简化。

电荷对平面理想导体壁的镜像是另一侧等距处与原电荷大小相等、符号相反的电荷。



等效原理、电型源与磁型源

等效原理也源于唯一性定理。

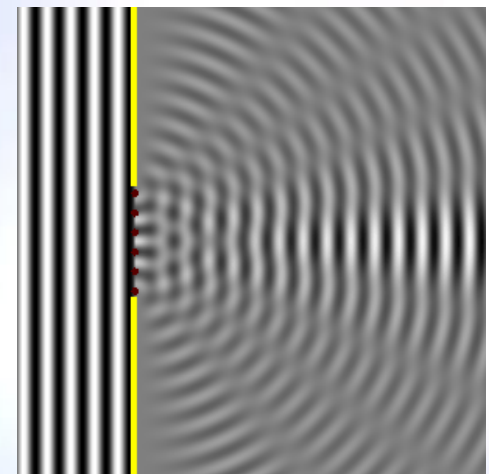
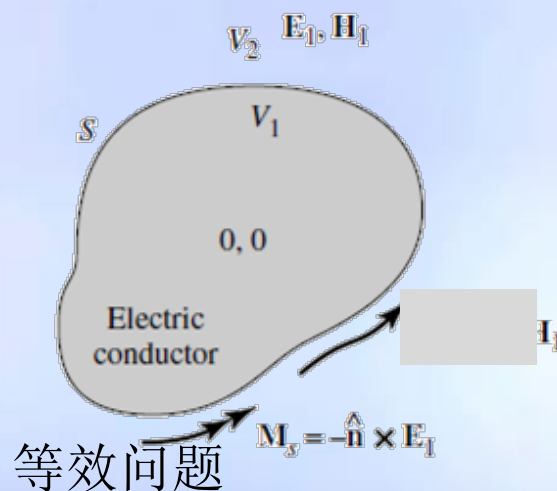
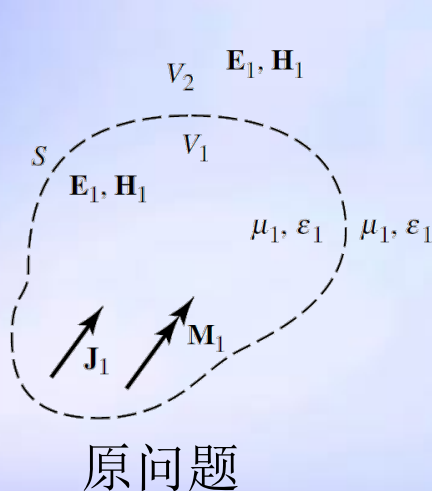
等效原理指：在某一空间区域内，能够产生同样场的两种源，称其在该区域内是等效的。

如果源在闭曲面 S 包围的体积 V 内，闭曲面上有切向场 $\mathbf{n}_0 \times \mathbf{H}$ 和 $\mathbf{E} \times \mathbf{n}_0$ ，欲求 V 外某一点场时，有两种处理方法：

(1) 直接由 V 内的一次源求 V 外的场；

(2) 按照等效原理，假设 V 内为零场，而在界面 S 上有二次源 $\mathbf{n}_0 \times \mathbf{H}$ 和 $\mathbf{E} \times \mathbf{n}_0$ ，求该二次源在 V 外产生的场。(惠更斯原理)

根据唯一性定理，二次源可以产生唯一的与真实源相同的场。因为它们界面上有相同的切向场。



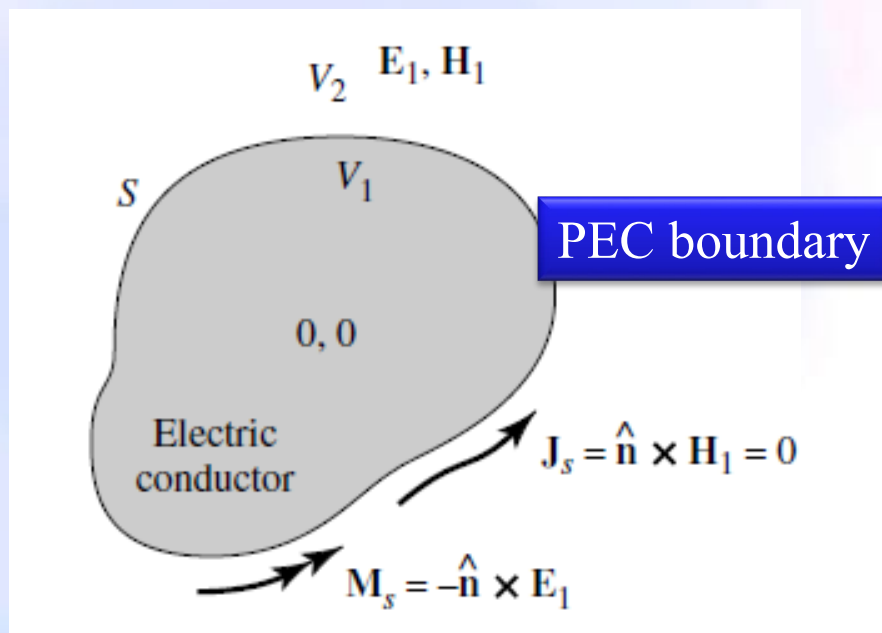
二次源是一种等效源，或者说是一种虚拟源。

$\mathbf{n}_0 \times \mathbf{H}$ 相当于电流密度矢量，记作 $\mathbf{n}_0 \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_s$ ，称为电型源。

对偶地把 $\mathbf{E} \times \mathbf{n}_0$ 称为磁流密度矢量，记作 $\mathbf{J}_{ms} = \mathbf{E} \times \mathbf{n}_0$ ，称为磁型源。

注意，这里所引进的新的波源磁流，实际上就是切向电场，这纯粹是为了数学上的方便。但是真正的波源还是电荷和电流，因为切向电场实际上也由电荷和电流产生的。

Love's 等效原理



磁型源作用下的麦克斯韦方程

位移电流密度和传导电流密度与
磁场强度 $\mathbf{H}$ 的关系为

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \mathrm{j}\omega \mathbf{D}$$

引进磁流密度后，仿此也可写出

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mathbf{J}_{\mathrm{m}} - \mathrm{j}\omega \mathbf{B}$$

引入磁流后，按照连续性原理，
必定有磁荷，于是有

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_{\mathrm{m}} = \frac{-\partial \rho_{\mathrm{m}}}{\partial t}$$

由于旋度的散度为零，可以推出

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \rho_{\mathrm{m}}$$

引进磁荷和磁流后，麦克斯韦方
程组变为

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = -\mathbf{J}_{\mathrm{m}} - \mathrm{j}\omega \mathbf{B} \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \mathrm{j}\omega \mathbf{D} \\ \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = \rho_{\mathrm{m}} \end{cases}$$

电的量和磁的量具有对偶性

电型源

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H} \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + j\omega\varepsilon\mathbf{E} \\ \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho / \varepsilon \\ \nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{J} = -j\omega\rho \end{cases}$$

磁型源

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{H} = j\omega\varepsilon\mathbf{E} \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\mathbf{J}_m - j\omega\mu\mathbf{H} \\ \nabla \cdot \mathbf{H} = \rho_m / \mu \\ \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{J}_m = -j\omega\rho_m \end{cases}$$

这两组方程式之间存在着明显的对应关系，如果将上两组方程式中的所有场量和源量作如下代换

$$\mathbf{E} \Rightarrow \mathbf{H}$$

$$\mathbf{H} \Rightarrow -\mathbf{E}$$

$$\varepsilon \Rightarrow \mu$$

$$\mu \Rightarrow \varepsilon$$

$$\rho \Rightarrow \rho_m$$

$$\mathbf{J} \Rightarrow \mathbf{J}_m$$

$$\mathbf{E} \Rightarrow \mathbf{H}$$

$$\mathbf{H} \Rightarrow -\mathbf{E}$$

$$\varepsilon \Rightarrow \mu$$

$$\mu \Rightarrow \varepsilon$$

$$\rho_m = \rho$$

$$\mathbf{J}_m \Rightarrow \mathbf{J}$$

电型源方程变为磁型源方程，而磁型源方程则变为电型源方程。电型源方程和磁型源方程式的这种对应形式称为二重性或**对偶性**。

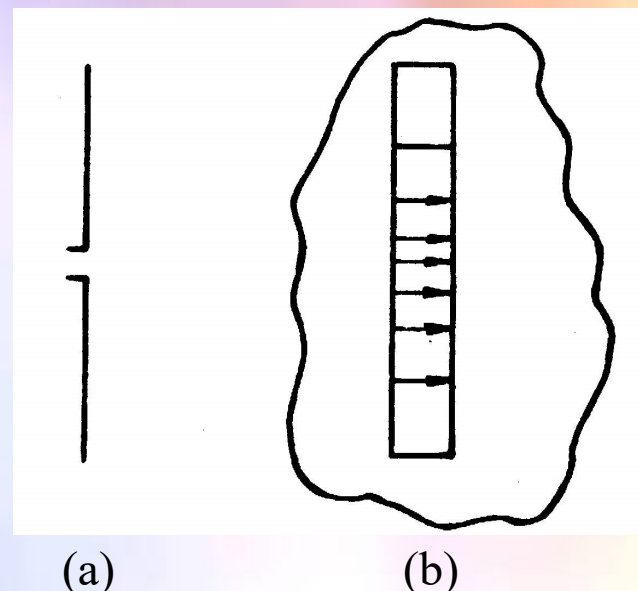
电和磁对偶性的应用

电磁场方程式的二重性提供了这样一种便利，如果知道一个问题（例如电型源问题）的解就可由对偶关系得出它的对偶问题（磁型源问题）的解，而无需重复求解方程。

由电基本振子[图(a)]的辐射场写出磁基本振子[图 (b)]的辐射场可作为二重性应用的简单例子。引入磁流、磁荷概念后，这两种基本辐射单元极其相似。

电基本振子天线表面上有交变电流，在天线的两端电流为零，而有电荷的堆积，电流和电荷之间满足连续性方程。

作为实际可行的**磁振子的裂缝天线**，其口径上有切向电场，相当于磁流密度，在裂缝的两端切向电场为零，即磁流为零，因而裂缝的两端也相当于磁荷的堆积。



(a) 电振子 (b) 磁振子（裂缝）

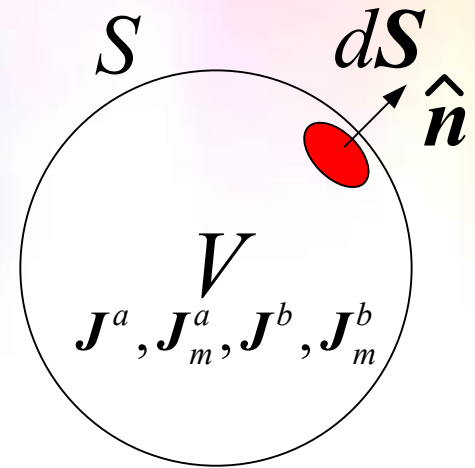
电磁互易定理反映两组不同的场源之间的影响和响应关系。

考虑同一线性介质中的两组频率相同的源 $\mathbf{J}^a$ 、 $\mathbf{J}_m^a$ 和 $\mathbf{J}^b$ 、 $\mathbf{J}_m^b$ 。我们用 $\mathbf{E}^a$ 、 $\mathbf{H}^a$ 表示源 a 产生的场，用 $\mathbf{E}^b$ 、 $\mathbf{H}^b$ 表示源 b 产生的场。利用麦式方程组的两个旋度方程得到

$$-\nabla \cdot (\mathbf{E}^a \times \mathbf{H}^b - \mathbf{E}^b \times \mathbf{H}^a) = \mathbf{E}^a \cdot \mathbf{J}^b + \mathbf{H}^b \cdot \mathbf{J}_m^a - \mathbf{E}^b \cdot \mathbf{J}^a - \mathbf{H}^a \cdot \mathbf{J}_m^b$$

在体积 V 上积分，利用散度定理

$$-\oint_S (\mathbf{E}^a \times \mathbf{H}^b - \mathbf{E}^b \times \mathbf{H}^a) \cdot d\mathbf{S} = \int_V (\mathbf{E}^a \cdot \mathbf{J}^b + \mathbf{H}^b \cdot \mathbf{J}_m^a - \mathbf{E}^b \cdot \mathbf{J}^a - \mathbf{H}^a \cdot \mathbf{J}_m^b) dV$$



S 趋向无穷远， S 面上电磁场成为横电磁波（TEM）平面波，具有

$$\mathbf{H}^a = \frac{\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}^a}{\eta} \quad \mathbf{H}^b = \frac{\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}^b}{\eta}$$

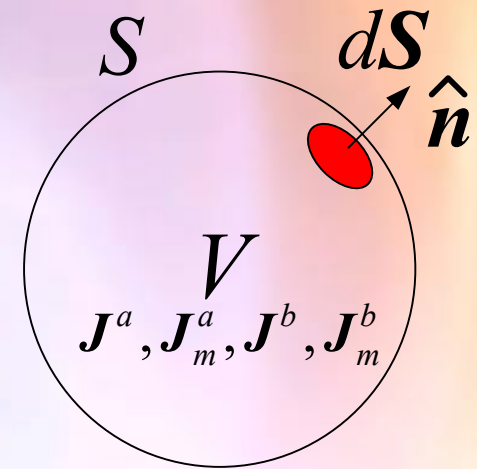
$$\int_V (\mathbf{E}^a \cdot \mathbf{J}^b - \mathbf{H}^a \cdot \mathbf{J}_m^b) dV = \int_V (\mathbf{E}^b \cdot \mathbf{J}^a - \mathbf{H}^b \cdot \mathbf{J}_m^a) dV$$

$$\mathbf{E}_a \times \mathbf{H}_b - \mathbf{E}_b \times \mathbf{H}_a$$

$$= \frac{1}{\eta} \left[\mathbf{E}_a \times (\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{E}_b) - \mathbf{E}_b \times (\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{E}_a) \right]$$

$$= \frac{1}{\eta} \left\{ (\mathbf{E}_a \cdot \mathbf{E}_b) \hat{\mathbf{r}} - (\cancel{\mathbf{E}_a \cdot \hat{\mathbf{r}}} \mathbf{E}_b - [(\mathbf{E}_b \cdot \mathbf{E}_a) \hat{\mathbf{r}} - (\cancel{\mathbf{E}_b \cdot \hat{\mathbf{r}}} \mathbf{E}_a] \right\}$$

$$= 0$$



互易定理

$$\int_V (\mathbf{E}^a \cdot \mathbf{J}^b - \mathbf{H}^a \cdot \mathbf{J}_m^b) dV = \int_V (\mathbf{E}^b \cdot \mathbf{J}^a - \mathbf{H}^b \cdot \mathbf{J}_m^a) dV$$

左右两式的量纲为瓦，但并不表示功率，表示反应（reaction）。

场 a 对于源 b 的反应 $\langle a, b \rangle = \int_V (\mathbf{E}^a \cdot \mathbf{J}^b - \mathbf{H}^a \cdot \mathbf{J}_m^b) dV$

场 b 对于源 a 的反应 $\langle b, a \rangle = \int_V (\mathbf{E}^b \cdot \mathbf{J}^a - \mathbf{H}^b \cdot \mathbf{J}_m^a) dV$

于是互易定理用反应可表示为 $\langle a, b \rangle = \langle b, a \rangle$

互易定理

互易定理的应用

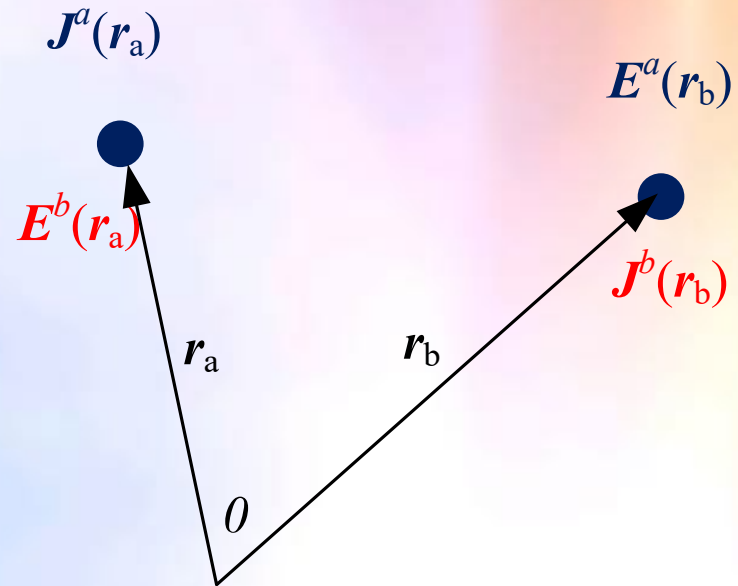
$$\int_V (\mathbf{E}^a \cdot \mathbf{J}^b - \mathbf{H}^a \cdot \mathbf{J}_m^b) dV = \int_V (\mathbf{E}^b \cdot \mathbf{J}^a - \mathbf{H}^b \cdot \mathbf{J}_m^a) dV$$

如果空间中只包含两个单位点源

$$\mathbf{J}^a = \mathbf{x}_0 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a), \mathbf{J}^b = \mathbf{x}_0 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_b)$$

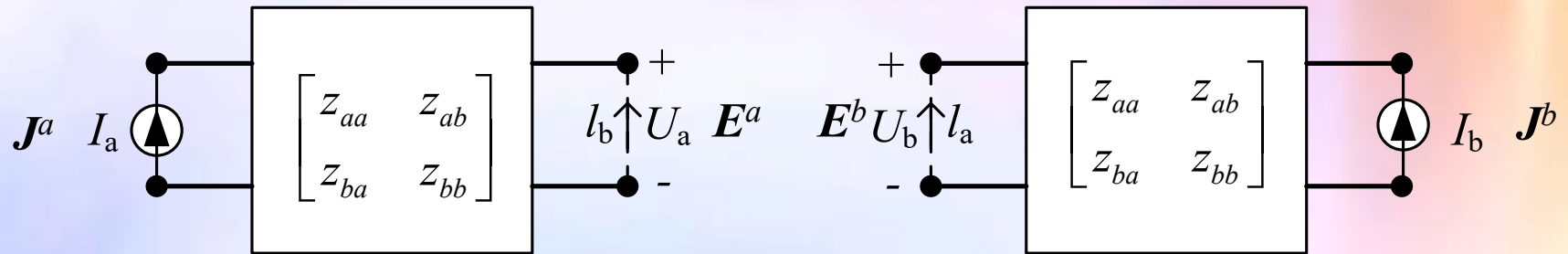
根据互易定理可得

$$\mathbf{E}_x^a(\mathbf{r}_b) = \mathbf{E}_x^b(\mathbf{r}_a)$$

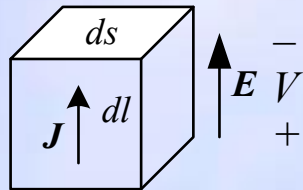


在线性和各向同性的媒质中，如果互换源点和观察点的位置而不改变源量，则在新观察点的场就等于互换前在原观察点的场

互易定理在电路中的应用



$$dV = dS dl$$



$$\int_V (\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}) dV = \int_S \mathbf{J} ds \cdot \int_l \mathbf{E} dl = I \cdot U$$

$$\int_V (\mathbf{E}^a \cdot \mathbf{J}^b) dV = \int_V (\mathbf{E}^b \cdot \mathbf{J}^a) dV$$

$$-I_b U_a = -I_a U_b \Rightarrow \frac{U_a}{I_a} = \frac{U_b}{I_b}$$

根据网络Z参数的定义

$$\begin{cases} Z_{ba} = \frac{U_a (\text{when } I_b = 0)}{I_a} \\ Z_{ab} = \frac{U_b (\text{when } I_a = 0)}{I_b} \end{cases}$$

$$Z_{ab} = Z_{ba}$$

互易网络 = 对称Z矩阵

复习要点

- 坡印廷定理反映电磁运动符合能量守恒定律。
- 只要媒质是线性的，电磁场满足叠加定理。只要边界面上切向场量给定，边界内的场是唯一的，这就是唯一性定理。由唯一性定理可得出镜像定理与等效原理。引入虚拟的磁流与磁荷后，麦克斯韦方程可分为电型源激励的与磁型源激励的方程，它们具有对偶性，这就是电磁对偶定理。互易定理反映彼此独立的场与源之间的响应。

复习范围: 3.5, 3.6, 3.7