

电磁场与电磁波

第7讲

3.1 积分与微分形式的麦克斯韦方程

3.1.1 – 3.1.4

1.7 正交坐标系（课后自学）

1873年Maxwell的巨著《A Treatise of Electricity and Magnetism》预言电磁波的存在

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \end{array} \right.$$

时域、微分形式Maxwell方程组



Maxwell

场量

单位

电场强度 E

伏特/米 (V/m)

电通量密度 (或电位移) D

库仑/米² (C/m²)

磁通量密度 (或磁感应强度) B

韦伯/米² (Wb/m²)

磁场强度 H

安培/米 (A/m)

真空中

$$D = \varepsilon_0 E \quad B = \mu_0 H$$

ε_0 真空介电常数 $\varepsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{F/m}$ (法拉/米)

μ_0 真空磁导率 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{H/m}$ (亨利/米)

一般介质中

$$D = \varepsilon E, \quad \varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$$

ε_r —— 介质相对介电常数

$$B = \mu H, \quad \mu = \mu_r \mu_0$$

μ_r —— 介质相对磁导率

对于通常介质, $\varepsilon_r, \mu_r \geq 1$

电荷与电流是产生电磁场的源

4

电荷量 Q 的单位是库仑 (C)

电流强度 I 的单位是安培(A)

体积 V 内电荷量 Q

流过截面 S 的电流 $I(t)$

$$Q(t) = \int_V \rho_v(\mathbf{r}', t) dV'$$

$$I(t) = \int_S \mathbf{J}(\mathbf{r}', t) \cdot d\mathbf{S}'$$

电荷体密度 ρ_v (C/m³)

电流体密度 $\mathbf{J}_v$ (A/m²) 定义为

$$\rho_v(\mathbf{r}', t) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta V}$$

$$\mathbf{J}_v = \rho_v \mathbf{v}$$

人们通过电荷之间的相互作用认识电场

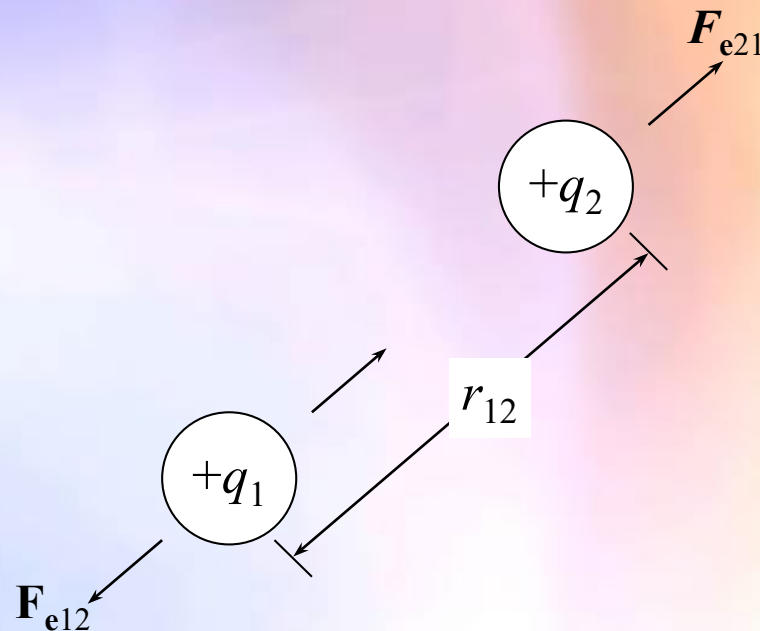
5

库仑定理

$$\mathbf{F}_{e21} = \mathbf{r}_{12_0} \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}^2}$$

点电荷 Q 对另一点电荷 q 的作用可认为是点电荷 Q 在其周围产生的**电场** $\mathbf{E}$ 对另一点电荷 q 的作用。

$\mathbf{r}_0$ 是以点电荷 Q 所在点为球心的径向单位矢量

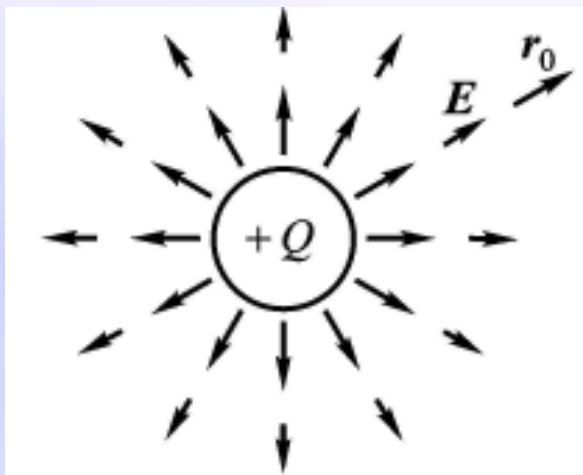


$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{r}_0$$

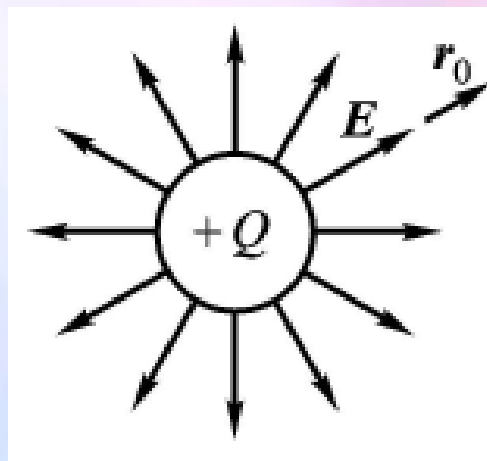
电荷 q 受到的作用力

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}$$

点电荷 $+Q$ 产生的电场

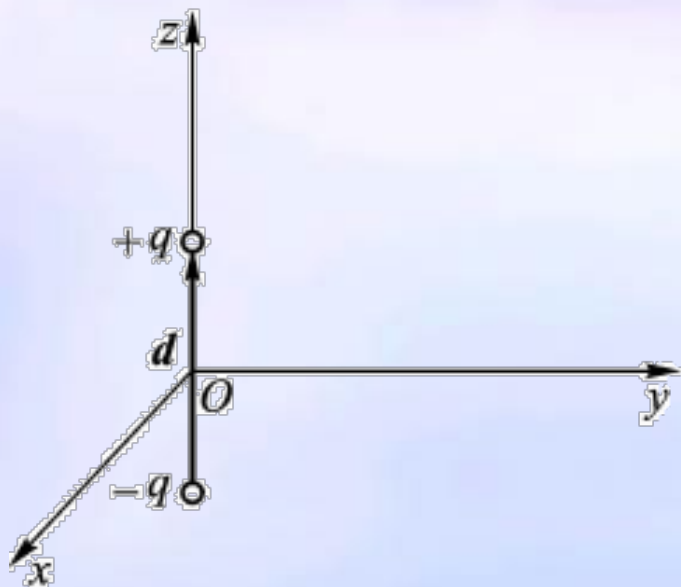


点电荷 Q 产生的电场线图



- 电场线上任一点的切线方向表示该点电场强度 E 的方向；
- 穿过垂直于电场线方向单位面积的电场线数就表示该点的电场强度。

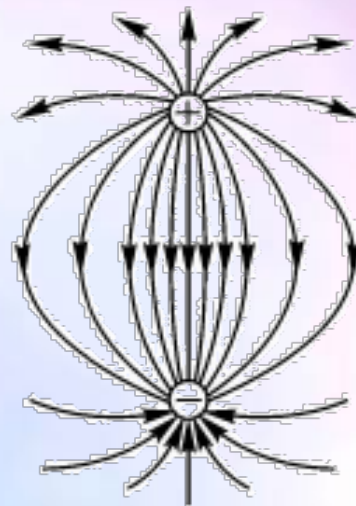
电偶极子产生的场就是两个点电荷产生场的叠加



电偶极子

电偶极子用**电矩** p 表示

$$\mathbf{p} = q\mathbf{d}$$



与单个电荷产生的场不同：
有起点和终点

电偶极子产生的电场线图

介质中总的电场包括没有介质时点电荷 q 产生的电场以及因介质极化而致的诸多偶极子 p 产生的电场

$$\mathbf{E} = r_0 \frac{q}{4\pi\epsilon r^2}$$

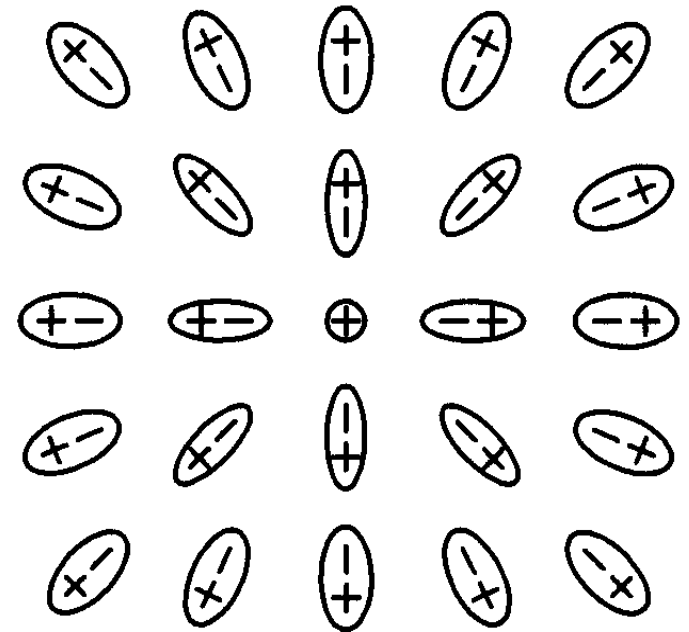
ϵ 叫做介质的介电常数（或电容率）

$$\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$$

定义电通量密度或电位移 D

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} = r_0 \frac{q}{4\pi r^2}$$

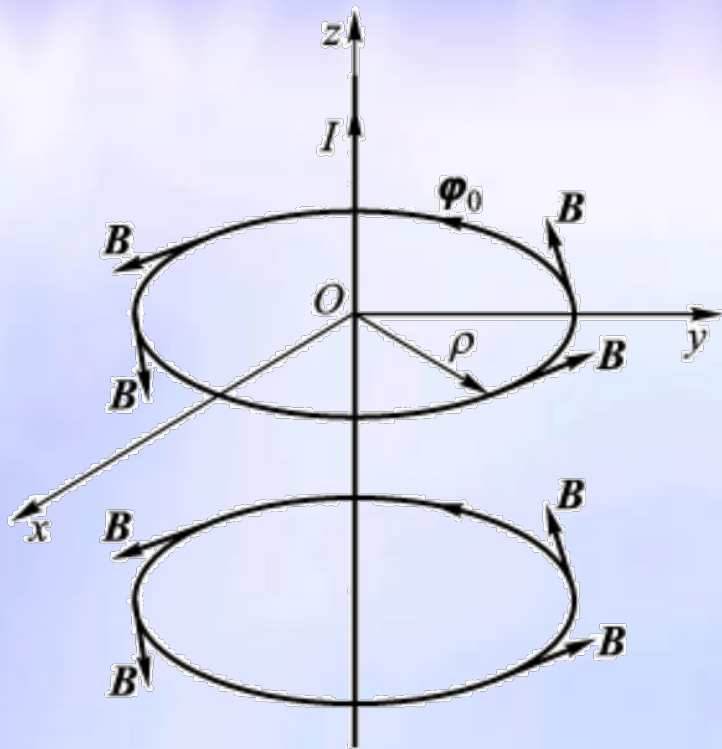
它与电场强度 $\mathbf{E}$ 的关系由介质特性决定。



正电荷 q 产生的场使介质原子极化

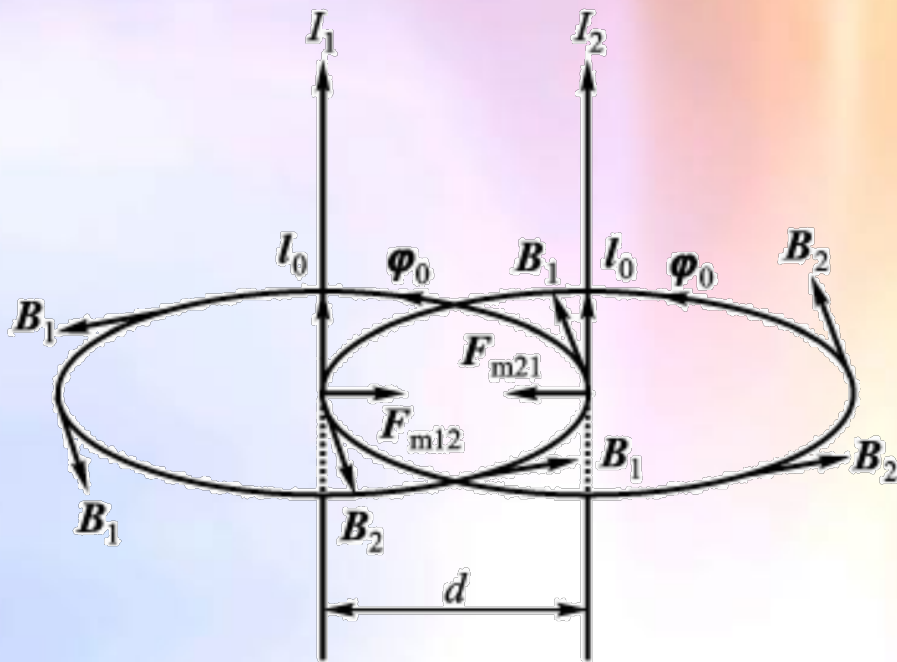
人们通过电流之间的相互作用认识磁场

毕奥-萨伐尔定律



磁通量
密度

$$B = \varphi_0 \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}$$

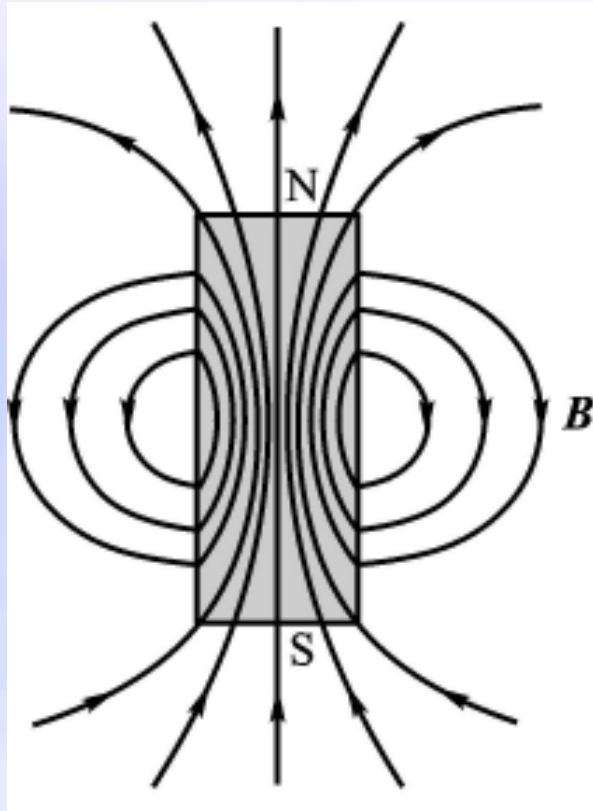


$$\mathbf{F}_{m21} = I_2 \hat{\mathbf{l}} \times \mathbf{B}$$

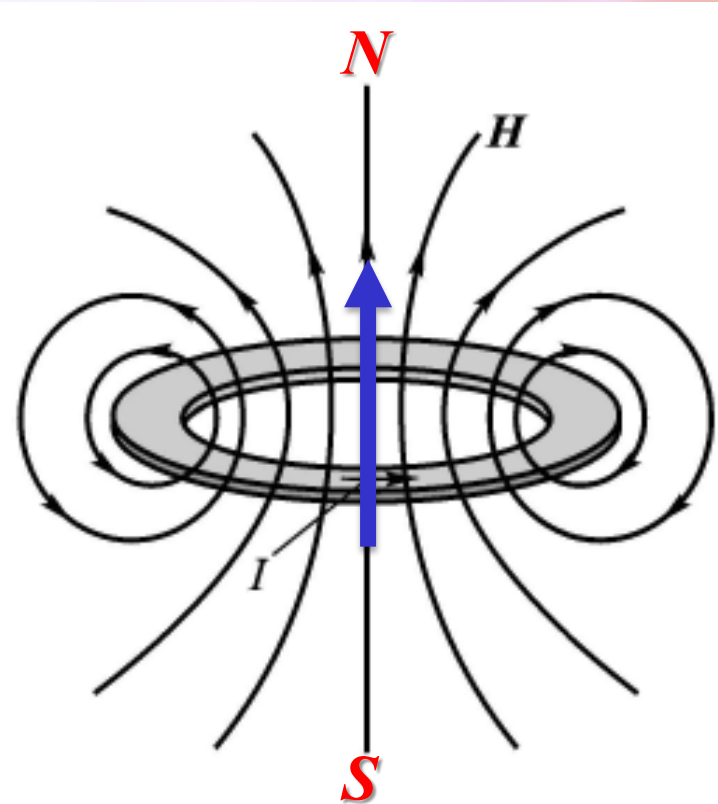
$\hat{\mathbf{l}}$ 为导线2上电流方向单位向量

μ_0 是一个常数，称为自由空间磁导率(或真空磁导率)

永磁体及其产生的磁场线



磁偶极子及其产生的磁场线



磁偶极子用磁矩 $\mathbf{m}$ 表示($d\mathbf{S}$ 为环面积) $\mathbf{m} = I d\mathbf{S}$

磁通量密度 B 和磁场 H

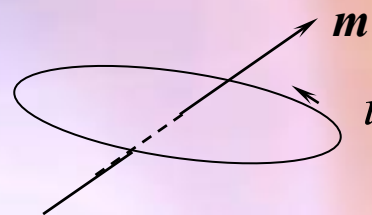
通电导线置于介质中时，除了介质不存在时通电导线产生的磁场外，又有在通电导线产生的磁场感应下，构成介质的无限多小磁体有序排列产生的净磁场。合成磁通量密度 B ：

$$B = \varphi_0 \frac{\mu I}{2\pi\rho} \quad \mu = \mu_r \mu_0$$

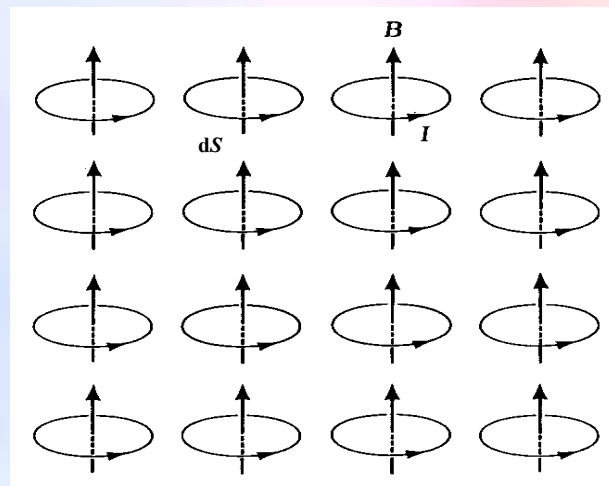
μ 叫做介质的磁导率， μ_r 叫做介质的相对磁导率，无量纲。

定义 **磁场强度 H** (单位 A/m)

$$H = \frac{1}{\mu} B$$



磁偶极子



磁矩沿磁场方向有序排列

小结: E 与 D , B 与 H , p 与 m

12

真空中

$$D = \varepsilon_0 E$$

$$B = \mu_0 H$$

一般介质中

$$D = \varepsilon E$$

$$B = \mu H$$

$$\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$$

$$\mu = \mu_r \mu_0$$

ε_r 称为介质的相对介电常数

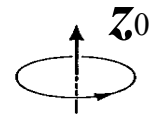
μ_r 称为介质的相对磁导率

电偶极子用电矩 p 表示

$$p = qd$$

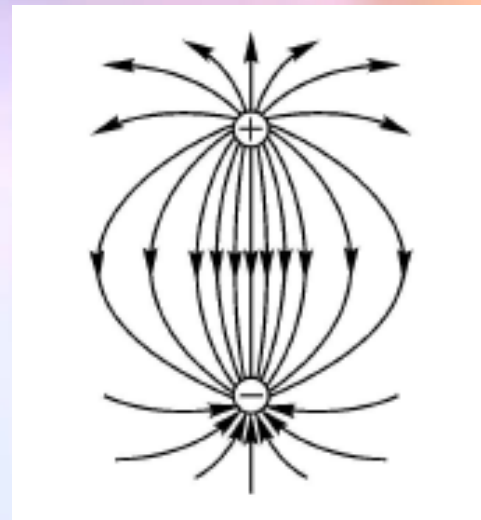
磁偶极子可用磁矩 m 表示

$$m = ISz_0$$



电场线从正电荷出发终止于负电荷，
电场线有头有尾，不自行闭合。

穿出闭曲面 S 电通量密度线数等于
闭曲面 S 包围的体积 V 中的电荷 Q



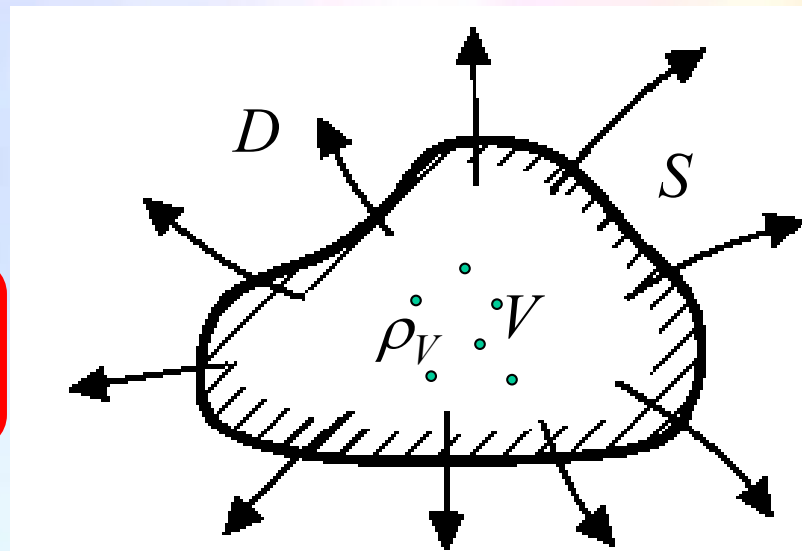
库伦定理 $\mathbf{D} = \frac{Q}{4\pi r^2} \mathbf{r}_0$



高斯定理 $\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q = \int_V \rho_V dV$

ρ_V 为体电荷密度。

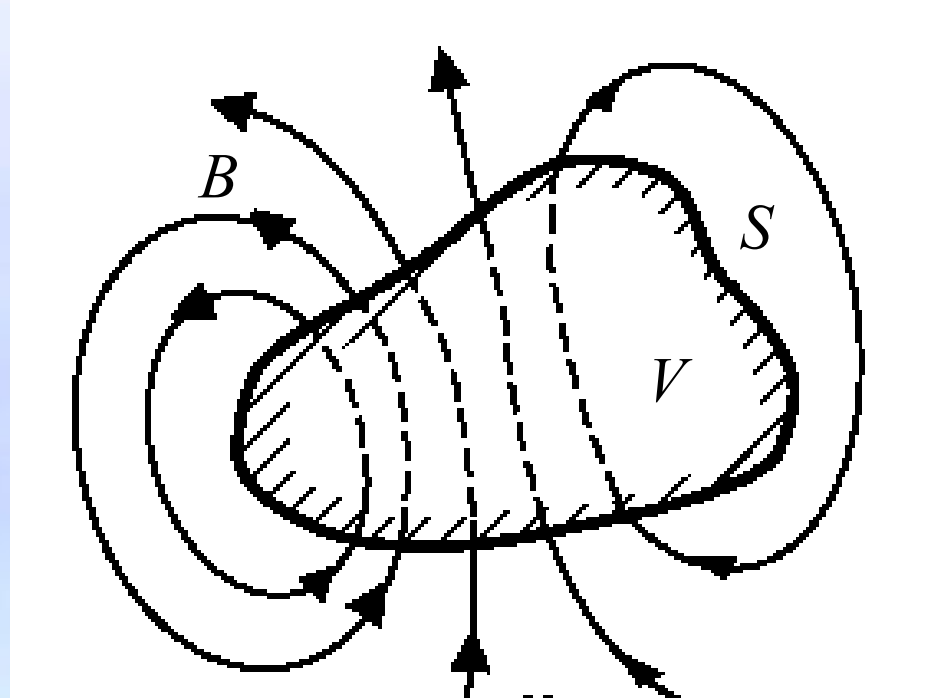
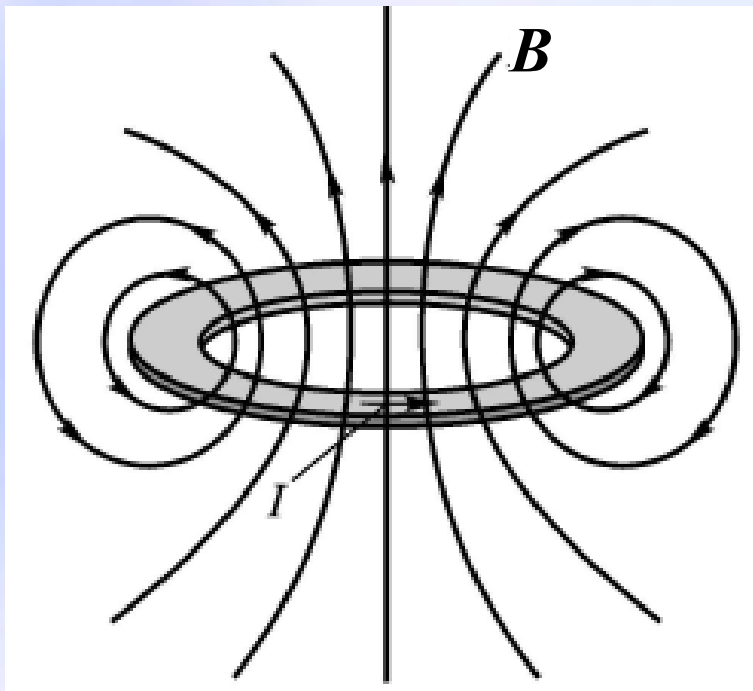
电荷产生电场



r 取足够远，面积分近似在球面上

磁场线无头无尾，总是一闭合曲线，因此穿出任一闭曲面磁场线数总是等于零的。

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$



穿过闭合导线 l 所包围的面积 S 的磁通量 ψ_m
 随时间变化，则会感应一个电动势 E_{emf} (V)

$$E_{\text{emf}} = \oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (1)$$

E_{emf} 的大小等于穿过闭合导线 l 所包围面积 S 的磁通量随时间变化率的负数，即

$$\psi_m = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (2)$$

结合 (1) 和 (2)

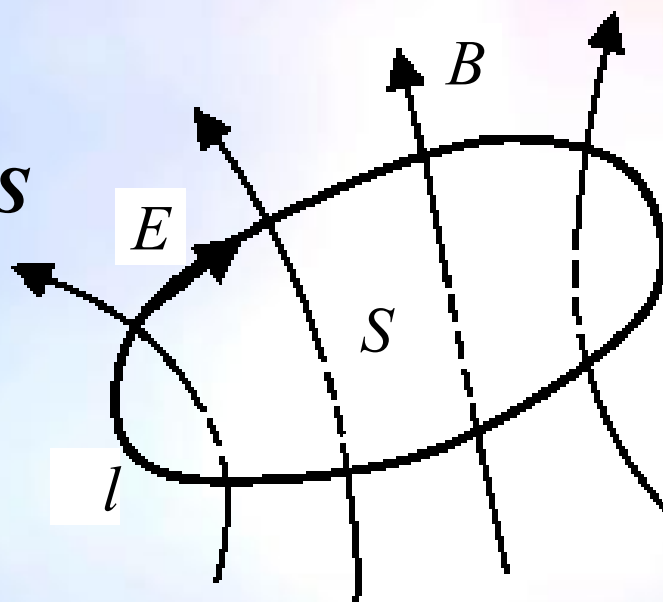
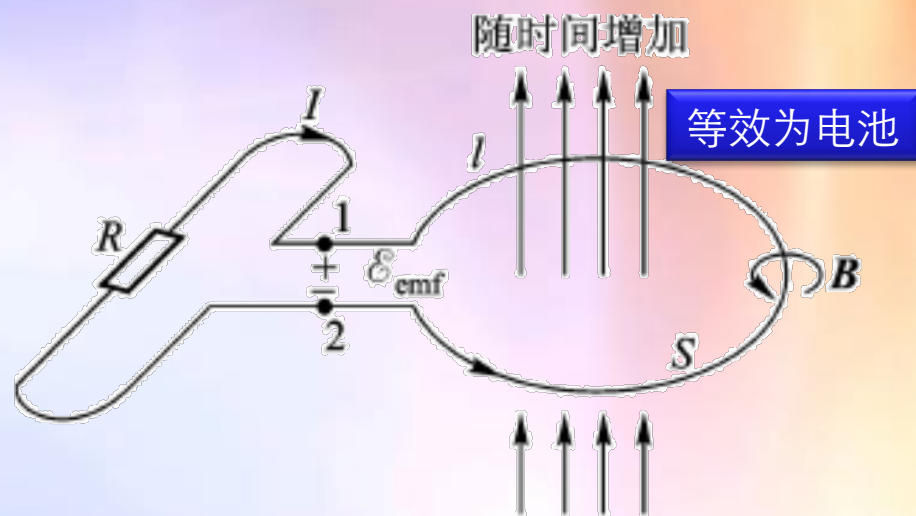
$$E_{\text{emf}} = \oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial \psi_m}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

磁场产生电场

所以

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

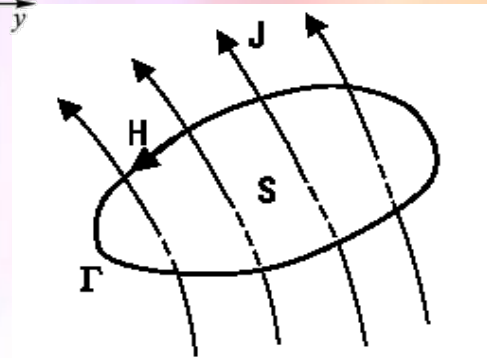
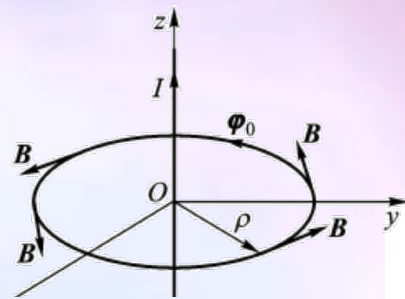
扩展：无导线时该式子也成立



磁场强度 $\mathbf{H}$ 沿闭合曲线 l 的线积分等于穿过闭合曲线 l 所包围的面积 S 的电流 I

$$\mathbf{H} = \hat{\phi} \frac{I}{2\pi\rho} \quad \text{毕奥-萨伐尔定律}$$

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \oint_l \left(\hat{\phi} \frac{I}{2\pi\rho} \right) \cdot d\mathbf{l} \hat{\phi} = \int_0^{2\pi} \frac{I}{2\pi\rho} \rho d\phi = I$$



电流产生磁场

扩展: $I \rightarrow \mathbf{J}$

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_c + \mathbf{J}_v + \mathbf{J}_d$$

真空或气体中 $\mathbf{J}_v = \rho \mathbf{v}$

导体中 $\mathbf{J}_c = \sigma \mathbf{E}$

位移电流 $\mathbf{J}_d = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$

$$I_c = \int_S \mathbf{J}_c \cdot d\mathbf{S}$$

$$I_v = \int_S \mathbf{J}_v \cdot d\mathbf{S}$$

$$I_d = \int_S \mathbf{J}_d \cdot d\mathbf{S}$$

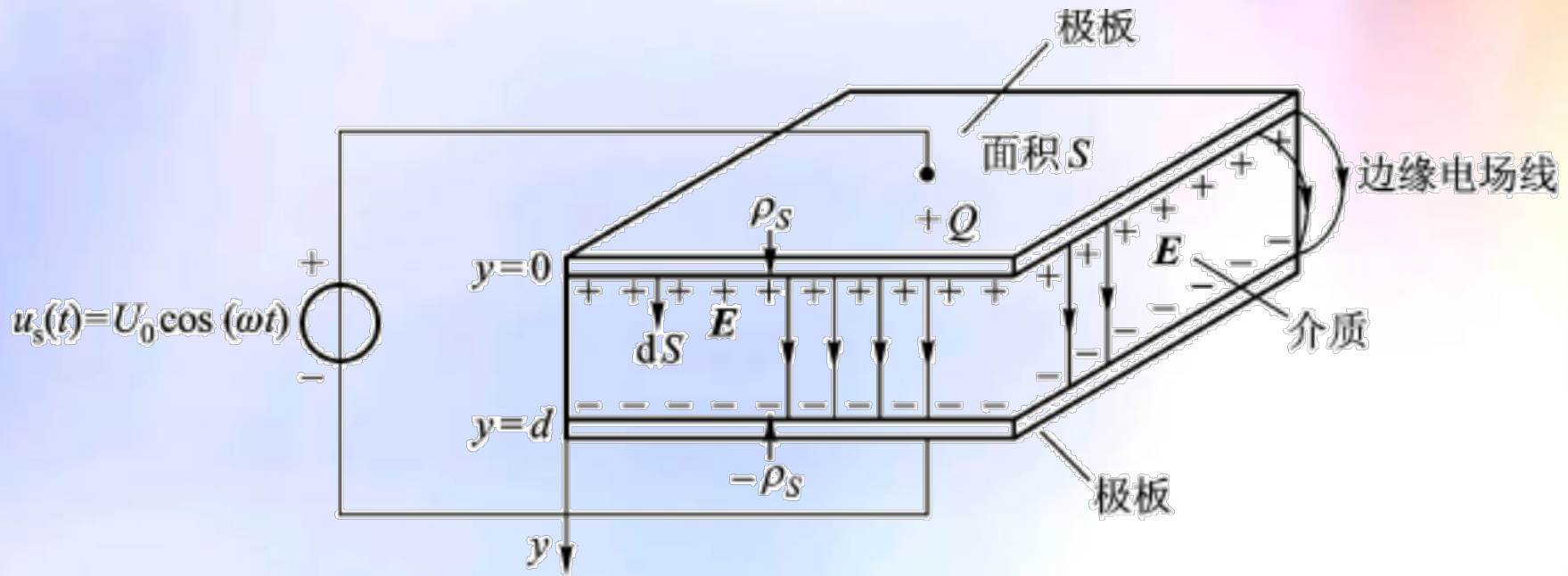
推广的安培定理

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_s \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S}$$

位移电流

$$\mathbf{J}_d = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

- 解释了回路电流的连续性
- 揭示了电磁波的存在：电场产生磁场



交流电源与平行板电容器相连构成的回路

积分形式的麦克斯韦方程组

高斯定理

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \rho_V dV$$

电荷是产生电场的源，电场线从正电荷出发终止于负电荷

磁通连续性原理

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

磁场线总是闭合的

安培全电流定理

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S}$$

电流产生磁场，
随时间变化的电场产生磁场

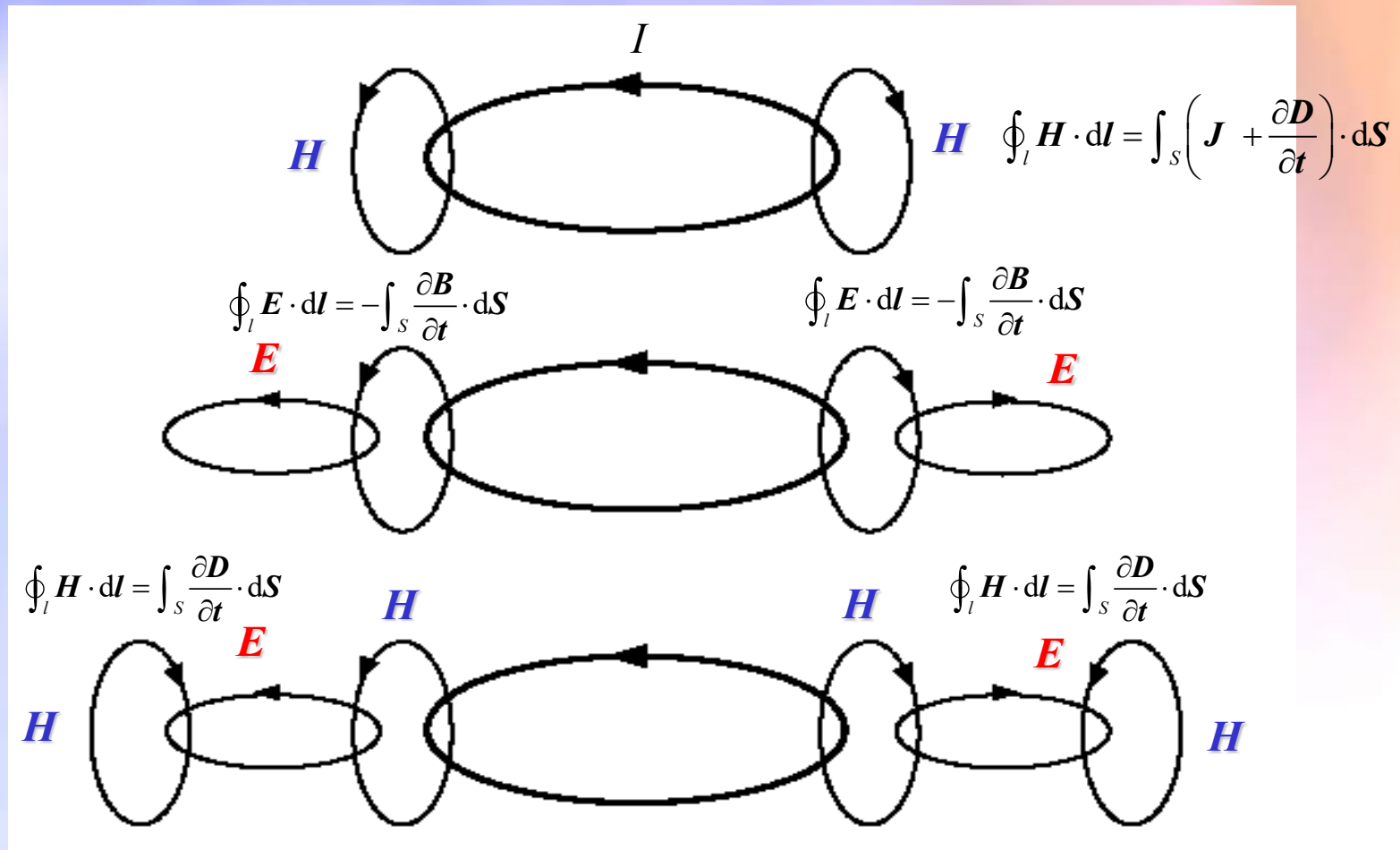
法拉第电磁感应定理

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

随时间变化的磁场产生电场

从这四个方程麦克斯韦预言电磁波的存在。

赫兹实验证明电磁波的存在，因此麦克斯韦引入位移电流概念是正确的。



随时间变化的电场产生磁场，随时间变化的磁场产生电场

麦克斯韦方程（积分形式）

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \rho_v dV$$

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S}$$

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

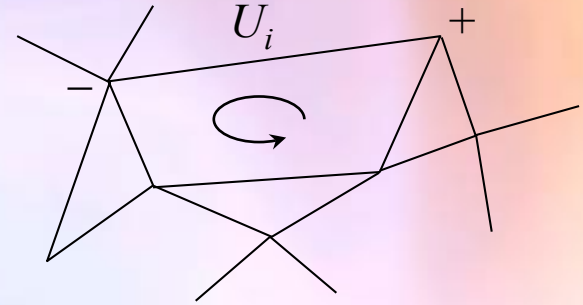
麦克斯韦方程包含电流连续与电荷守恒定律

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = - \frac{\partial Q}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho_v dV$$

当 $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow 0$ (或所研究对象线度比波长小得多时, 即低频情况下)

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_s \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = 0 \rightarrow \sum U = 0$$

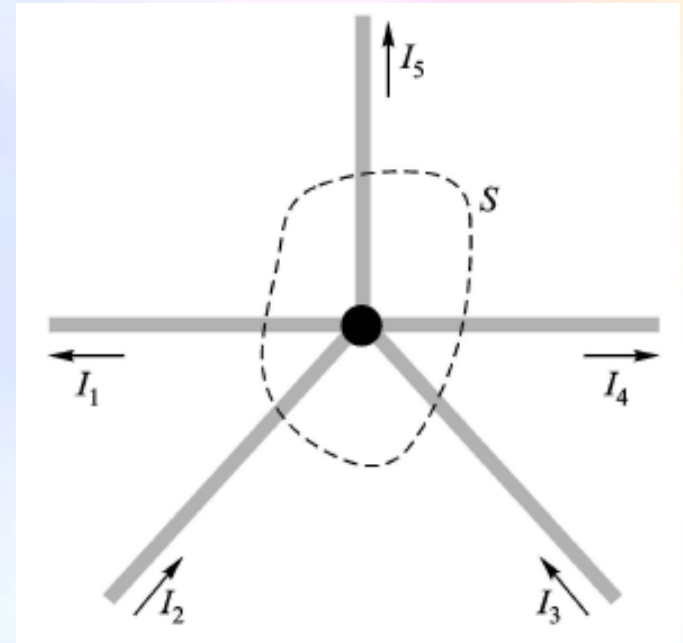
基尔霍夫电压定理



$$\oint_s \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = - \frac{\partial Q}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho_V dV = 0 \rightarrow \sum I = 0$$

基尔霍夫电流定理

这就是基尔霍夫定律, 它是我们分析低频电路的理论基础。



基尔霍夫定理适用范围

频率低时基尔霍夫定律是适用的，

频率高时基尔霍夫定律不再适用。

低频时由于

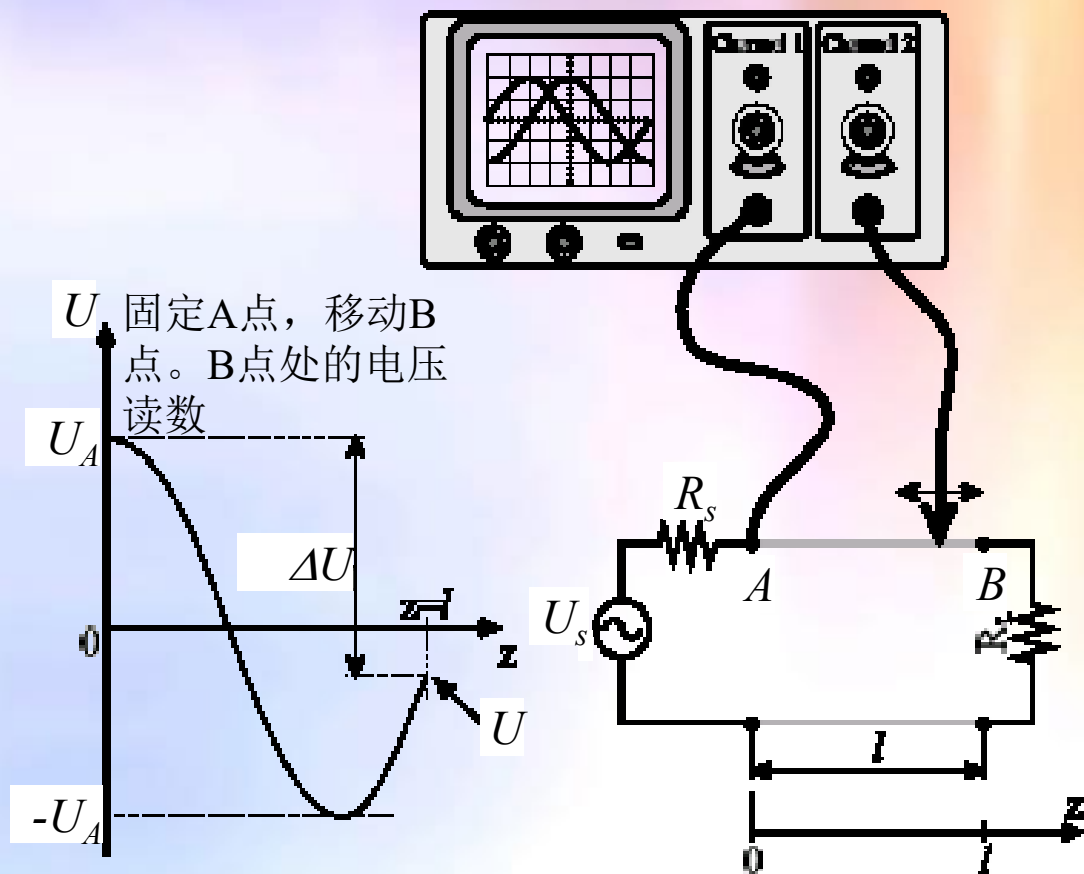
$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_s \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S} = \int_s \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

$$\oint_s \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_v \rho_v dV$$

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \oint_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

电场和磁场可以单独求解，

静态场(静电场和恒定磁场)

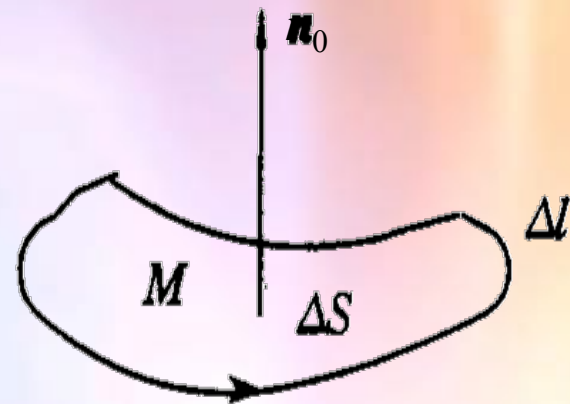


根据矢量场的斯托克斯定律 $\oint_l \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S}$

麦克斯韦方程组中两个旋度方程可写为

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} = \int_S \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S}$$



由上两式可得

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \end{cases}$$

根据矢量场的散度定律 $\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_V (\nabla \cdot \mathbf{A}) dV$

麦氏方程组中两个散度方程可写成

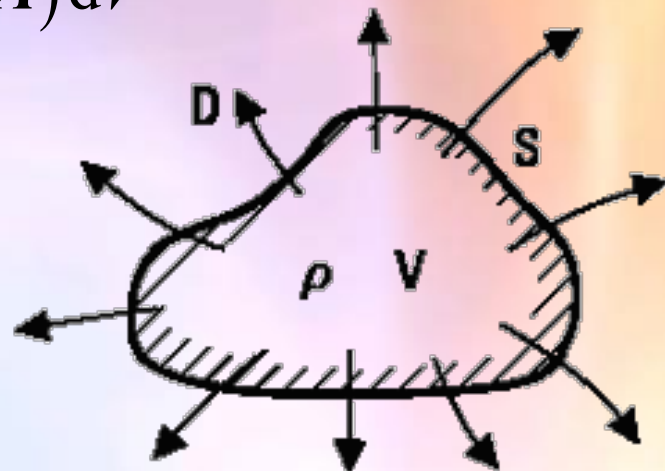
$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{D} dV = \int_V \rho_V dV$$

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{B} dV = 0$$

由此可得

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_V$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$



微分形式的麦克斯韦方程组

法拉第定律

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

高斯定律

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_V$$

推广的安培定律

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

磁通连续性原理

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

- 积分形式的麦克斯韦方程组反映电磁运动在某一局部区域的平均性质。
- 微分形式的麦克斯韦方程反映场在空间每一点的性质，它是积分形式的麦克斯韦方程当积分域缩小到一个点的极限。
- 以后我们对电磁问题的分析一般都从微分形式的麦克斯韦方程出发。

从麦克斯韦方程组能看出什么？

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_V$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

两个旋度方程表示变化的磁场产生电场，变化的电场产生磁场。

两个散度方程，一个表示磁通的连续性，即磁场线既没有起始点也没有终点。这意味着空间不存在自由磁荷，或者说在人类研究所能达到的空间区域中至今还没有发现单独的磁荷存在。另一个表明电场是有源的。

时变场中电场的散度和旋度都不为零，所以电场线起始于正电荷而终止于负电荷。磁场的散度恒为零，而旋度不为零，所以磁场线是与电流交链的闭合曲线，并且磁场线与电场线两者还互相交链。在远离场源的无源区域中，电场和磁场的散度都为零，这时磁场线和电场线将自行闭合，相互交链，在空间形成电磁波。

复习要点：

描述电磁场与电磁波的四个场量及其单位；

电磁运动规律——麦克斯韦所依据的四个从实验研究得出的定理（在理解的基础上背过）

(1) 高斯定理

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \rho_V dV$$

(2) 磁通连续性原理

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

(3) 法拉第电磁感应定理

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S}$$

(4) 推广的安培定理

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_V \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \end{array} \right.$$

基尔霍夫电压、电流定理是麦克斯韦方程组当 $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow 0$ 的极限。

复习范围：1.1, 1.2, 1.7, 3.1.1~3.1.4;

作业：3.1, 3.3