

电磁场与电磁波

第4讲

2.4 传输线圆图

2.5 圆图应用举例

魏兴昌

浙江大学

weixc@zju.edu.cn

作业：2.11, 2.12, 2.14, 2.17(a)&(d)

输入阻抗计算的两种途径

2

1、用公式
$$Z_{in} = Z_c \frac{Z_L + jZ_c \tan kl}{Z_c + jZ_L \tan kl}$$

2、通过反射系数求

$$Z_L \Rightarrow \Gamma_u(0) = \frac{Z_L - Z_c}{Z_L + Z_c} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Gamma_u(z = -l) = \Gamma_u(0)e^{j2kl}$$

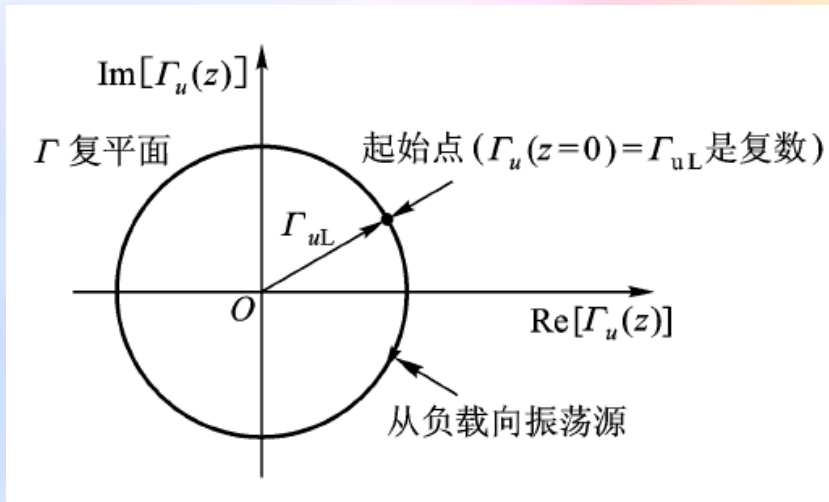
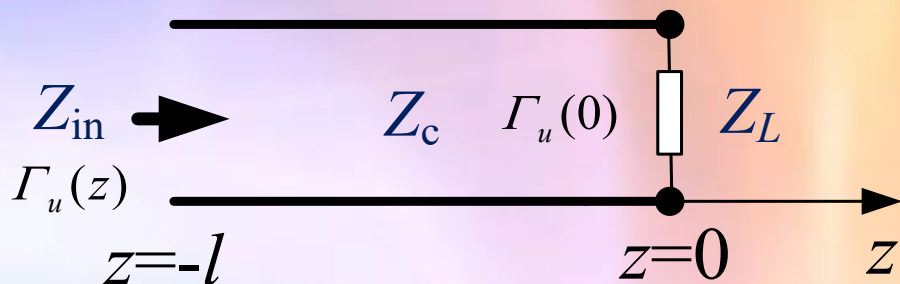
$$\Rightarrow Z(z = -l) = Z_c \frac{1 + \Gamma_u(z = -l)}{1 - \Gamma_u(z = -l)}$$

$\Gamma_u(z = 0) \Rightarrow \Gamma_u(z = -l)$ 沿 $|\Gamma_u|$ 的圆旋转即可得到(无耗线)。

如果在反射系数的圆上同时把阻抗以适当方式标出, 那么可直接用这个图

求解 $\Gamma_u \Rightarrow Z$ 或 $Z \Rightarrow \Gamma_u$

最终, 输入阻抗的计算完全可在图上进行。



圆图是一个超级计算器

1. 电压反射系数 Γ_u 复平面上的圆图
 - a) 阻抗圆图
 - b) 导纳圆图
2. 电流反射系数 Γ_i 复平面上的圆图
 - a) 阻抗圆图
 - b) 导纳圆图

Γ_u 复平面上的阻抗圆图

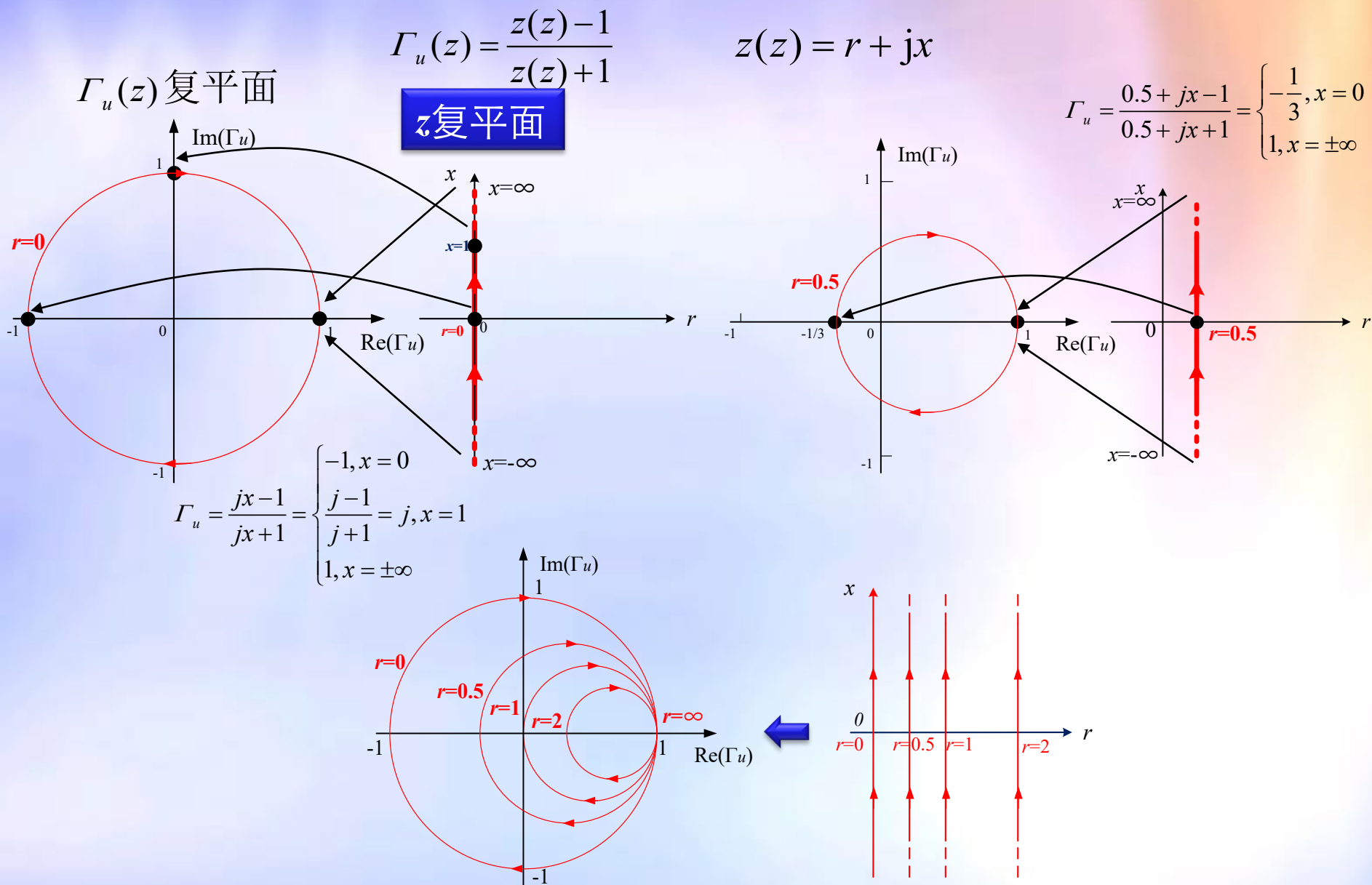
$$Z(z) = Z_c \frac{1 + \Gamma_u(z)}{1 - \Gamma_u(z)} \quad \text{以特征阻抗 } Z_c \text{ 归一化}$$

$$z(z) = \frac{Z(z)}{Z_c} = \frac{1 + \Gamma_u(z)}{1 - \Gamma_u(z)} \quad \Gamma_u(z) = \frac{z(z) - 1}{z(z) + 1} \quad \text{令 } z(z) = r + jx$$

$w = \frac{az + b}{cz + d}$, ($ad-bc \neq 0$, a, b, c, d 均为常数) 为分式线性映射/变换。

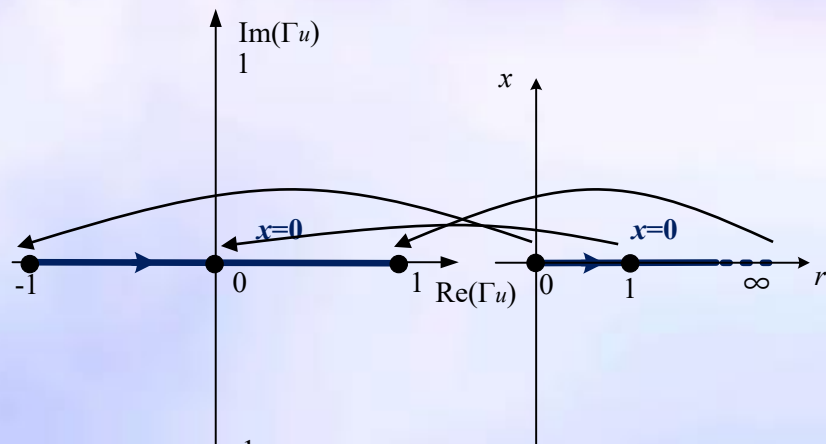
- 分式线性映射将 z 平面上的圆周映射成 w 平面上的圆周, 即具有保圆性。
- 根据保圆性, 在分式线性映射下, 如果给定的圆周或直线上没有点映射成无穷远点, 则它就映射成半径为有限的圆周; 如果有一个点映射成无穷远点, 它就映射成直线。
- 利用 z 平面上的三个点在 w 平面上的映射点, 即可画出 z 平面上的直线映射到 w 平面的曲线。

Γ_u 复平面上的阻抗圆图

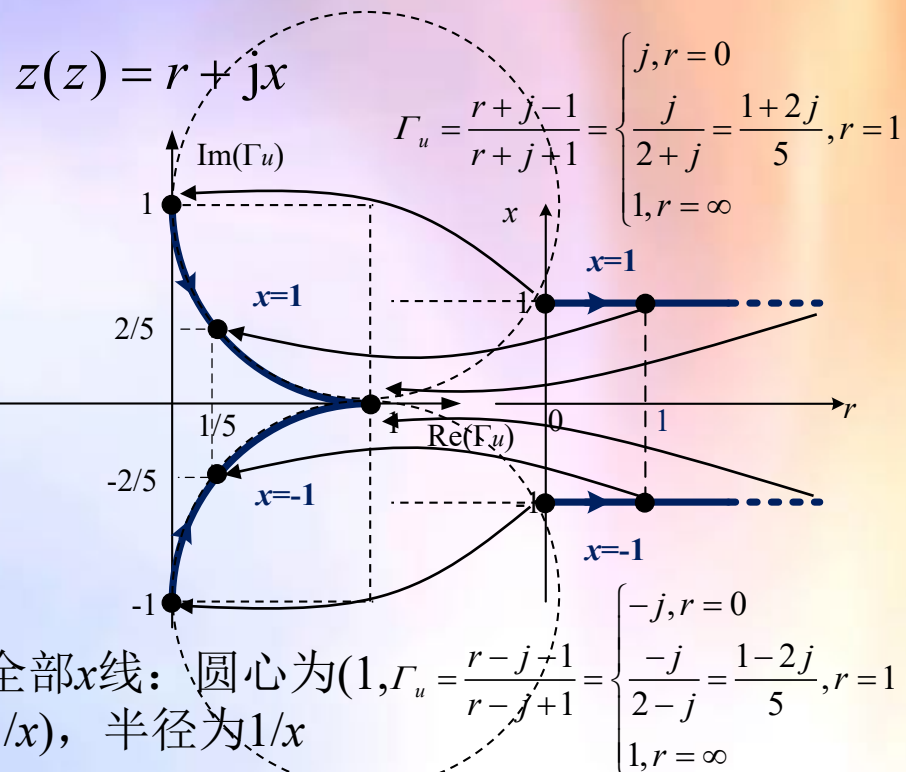
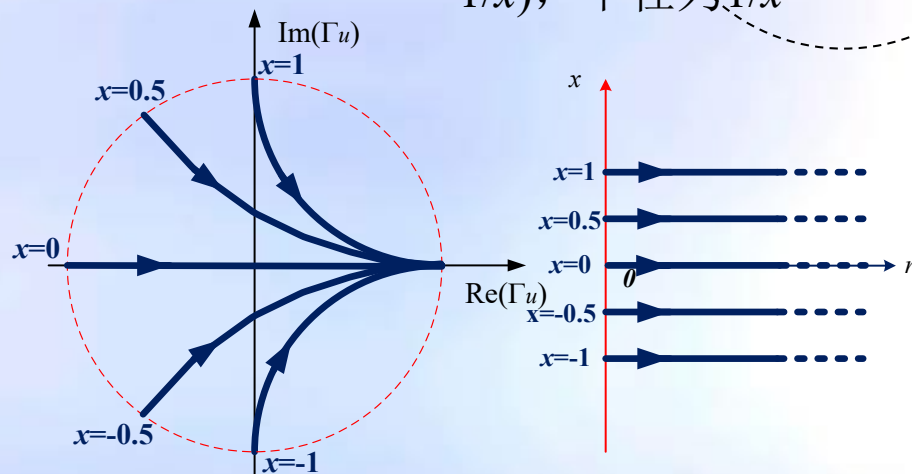


Γ_u 复平面上的阻抗圆图

$$\Gamma_u(z) = \frac{z(z) - 1}{z(z) + 1}$$



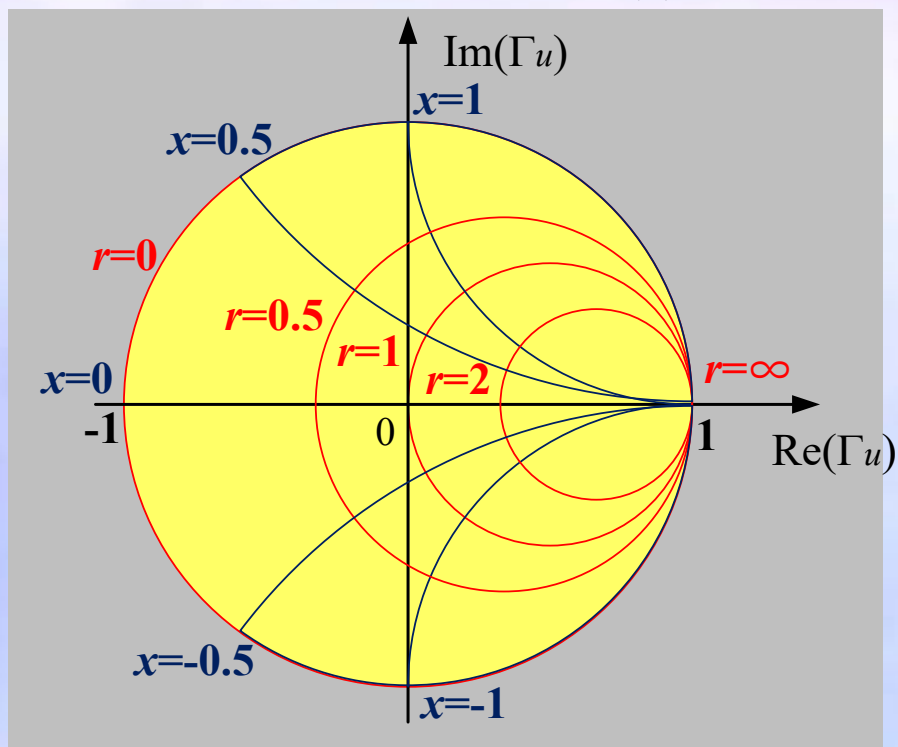
$$\Gamma_u = \frac{r-1}{r+1} = \begin{cases} -1, r=0 \\ 0, r=1 \\ 1, x=\infty \end{cases}$$



Γ_u 复平面上的阻抗圆图

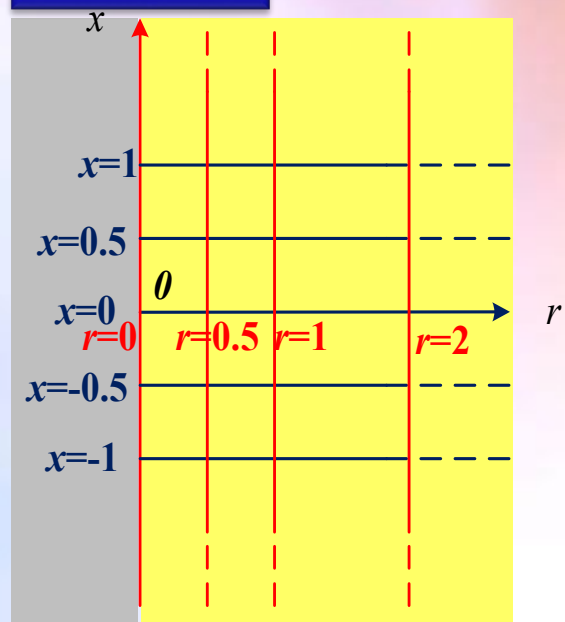
Γ_u 复平面

$$\Gamma_u(z) = \frac{z(z)-1}{z(z)+1}$$



z 复平面

$$z(z) = r + jx$$



- 将 z 平面的右半平面映射到 Γ_u 平面的单位圆内：传输线上所有可能的反射系数值必须落在半径为1的单位圆内。
- Γ_u 复平面上存在两套坐标系， Γ_u ， r 和 x 。因此在 Γ_u 平面上任一点的可以同时读出其 Γ_u 值和归一化阻抗值。

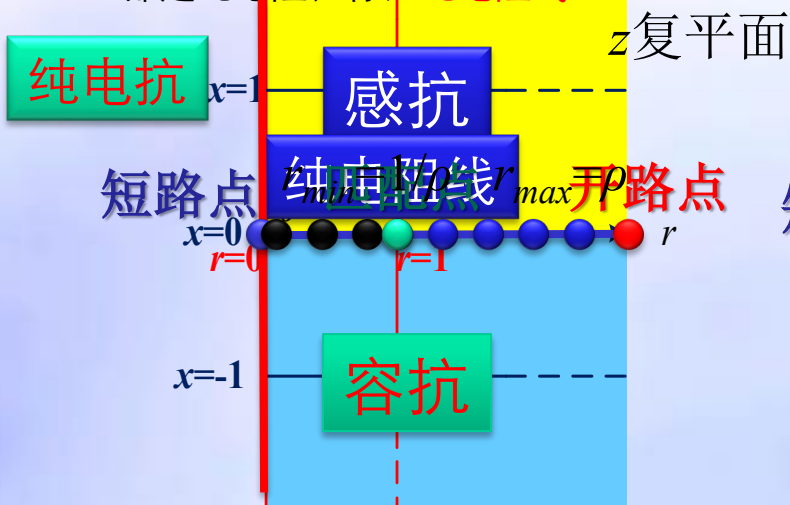
Γ_u 阻抗圆图上特征点、线、区域

区域

- 阻抗圆的上半圆内, $x > 0$, 其电抗为**感抗**;
- 下半圆内, $x < 0$, 其电抗为**容抗**。

特殊的线

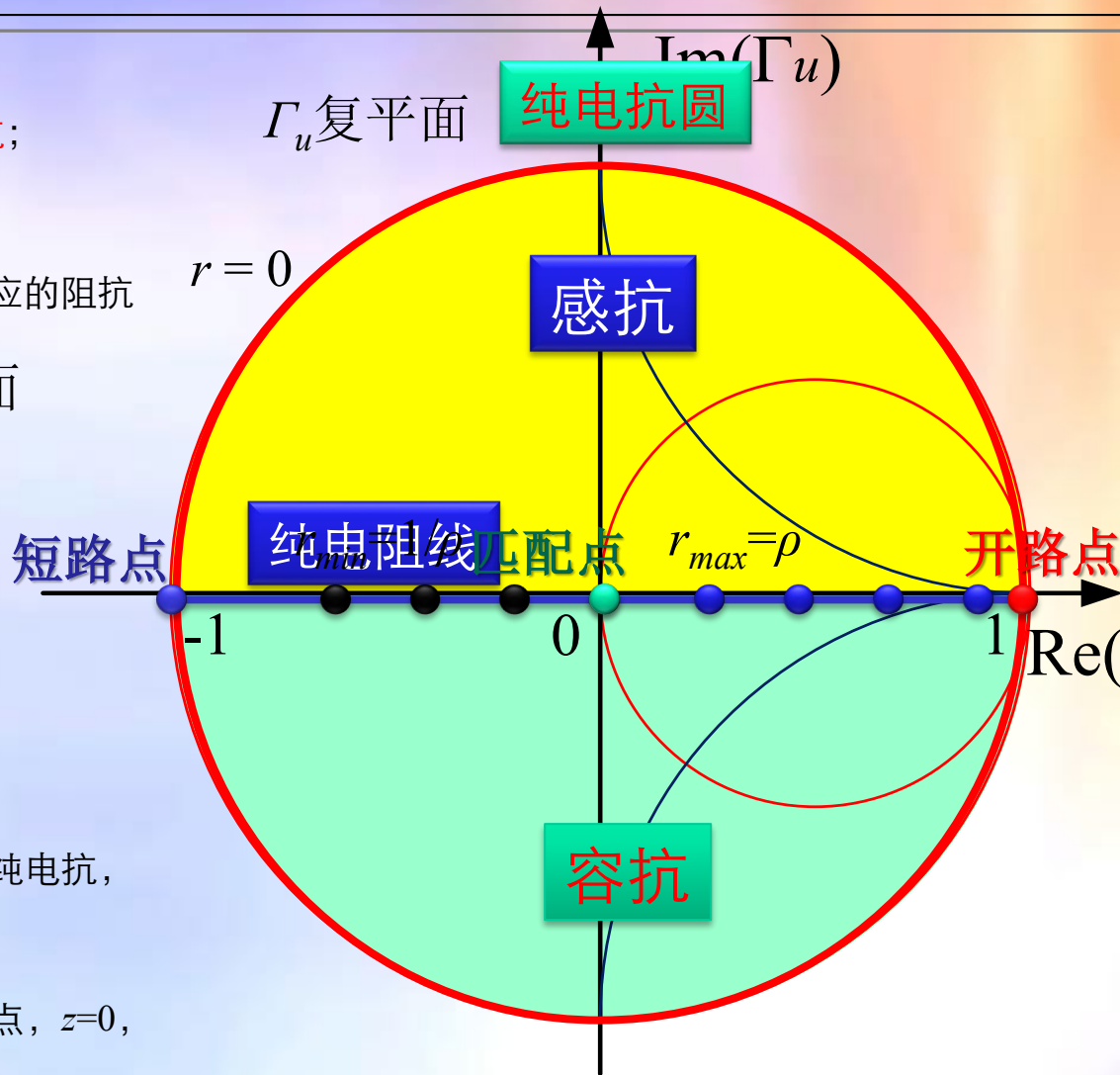
- 阻抗圆图的实轴 $x = 0$, 实轴上每一点对应的阻抗都是纯电阻, 称为**纯电阻线**。



- $|\Gamma| = 1$ 的圆, $r = 0$, 其上对应的阻抗都是纯电抗, 称为**纯电抗圆**。

特殊的点 (电阻线上)

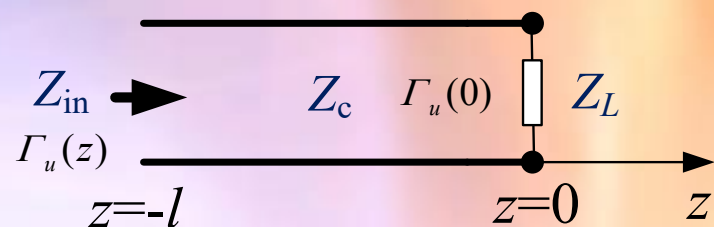
- 实轴左端点, 即左实轴与 $|\Gamma| = 1$ 的圆的交点, $z = 0$, 代表阻抗**短路点**;
- 而右实轴与 $|\Gamma| = 1$ 的圆的交点, 即右端点, $z = \infty$, 代表**开路点**;
- 圆图中心 $z = 1$, $|\Gamma| = 0$, $\rho = 1$, 称为阻抗**匹配点**。



- 实轴左半径上的点代表电压波节点, 其上阻抗值 $r_{min} = 1/\rho$;
- 实轴右半径上的点代表电压波腹点, 其上阻抗值 $r_{max} = \rho$ 。

Γ_u 阻抗圆图上特征点、线、区域

$$VSWR = \rho = \frac{U_{\max}}{U_{\min}} = \frac{1 + |\Gamma_u|}{1 - |\Gamma_u|} \geq 1 \quad \Gamma_u(z) = \frac{z(z) - 1}{z(z) + 1}$$



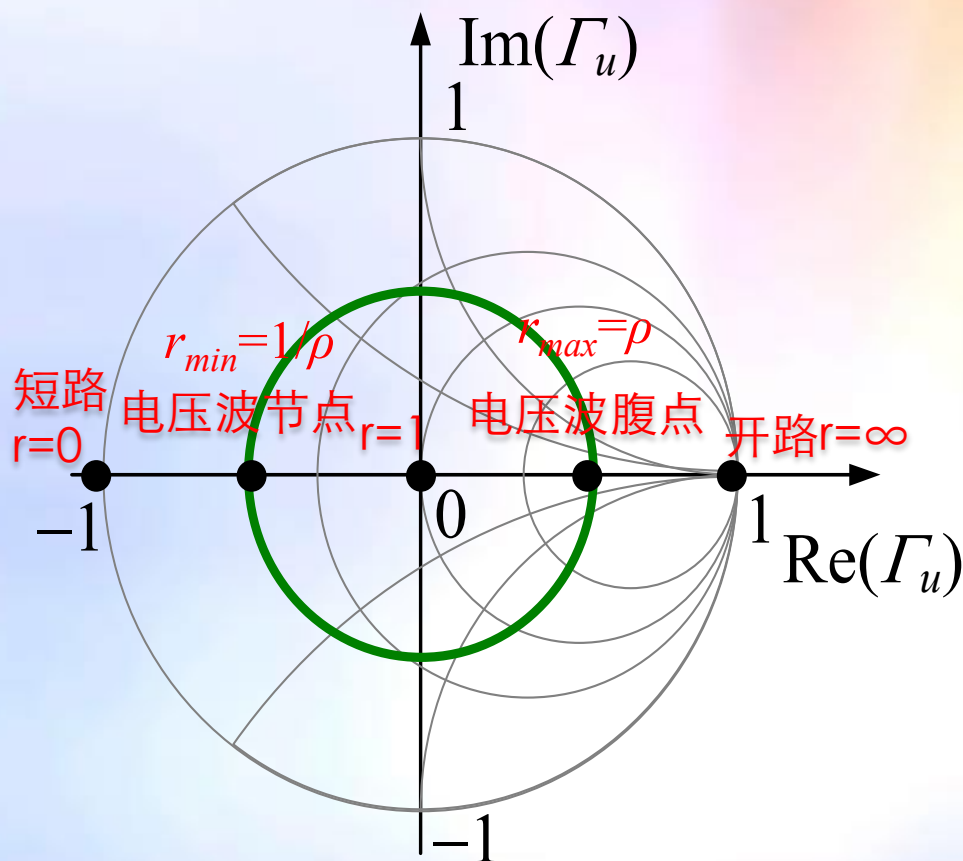
Γ_u 复平面的实轴上 $x=0$,
在实轴左半径, 归一化阻
抗为 $r_{\min} < 1$

$$|\Gamma_u(z)| = \frac{1 - r_{\min}}{1 + r_{\min}} \quad \rho = \frac{1}{r_{\min}}$$

Γ_u 复平面的实轴上 $x=0$,
在实轴右半径, 归一化阻
抗为 $r_{\max} > 1$

$$|\Gamma_u(z)| = \frac{r_{\max} - 1}{r_{\max} + 1}$$

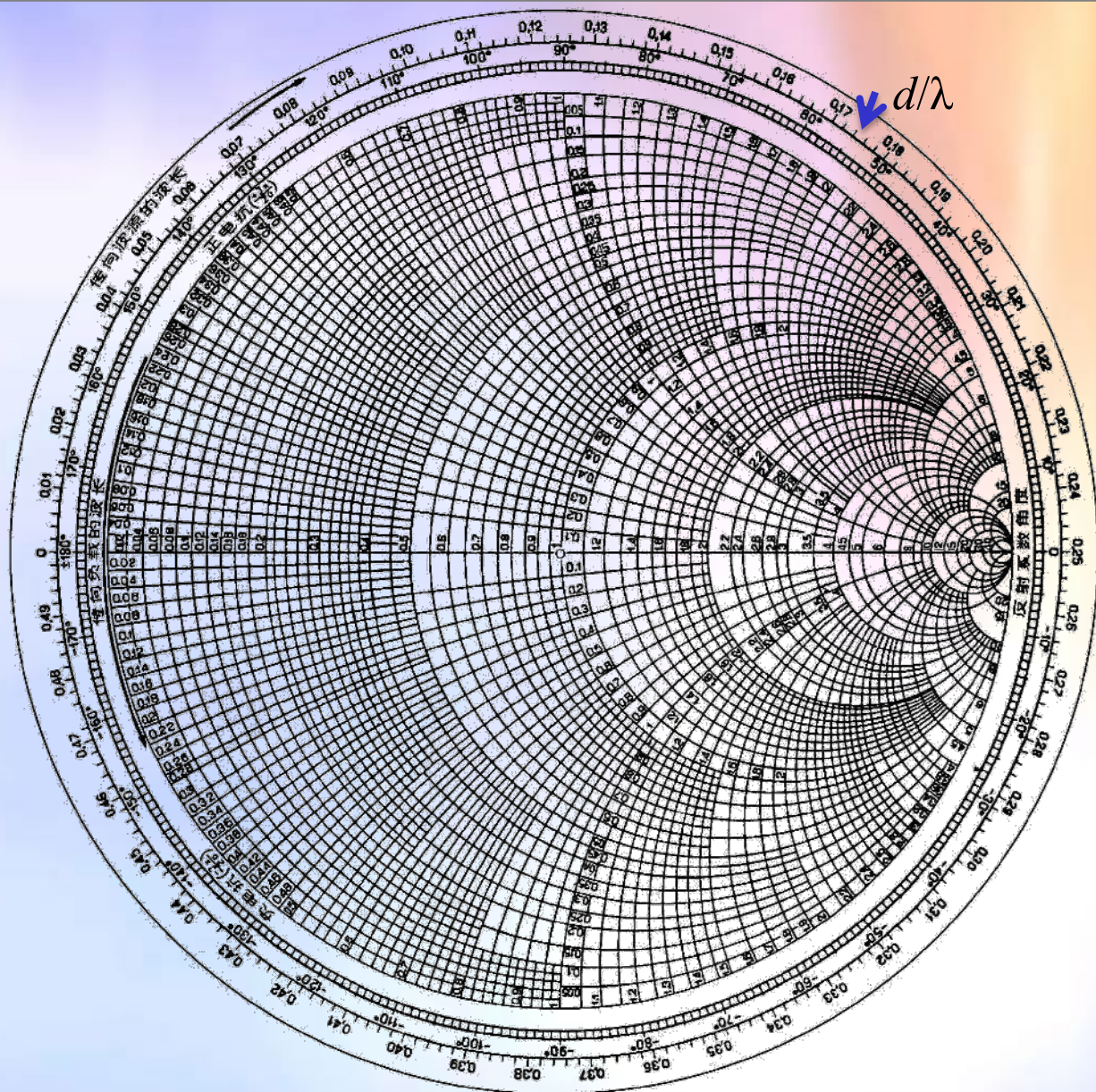
$$\rho = r_{\max}$$



Γ_u 复平面上的圆图 – 阻抗圆图

将归一化电阻圆、归一化电抗圆加到反射系数圆上，就得到完整的阻抗圆图。

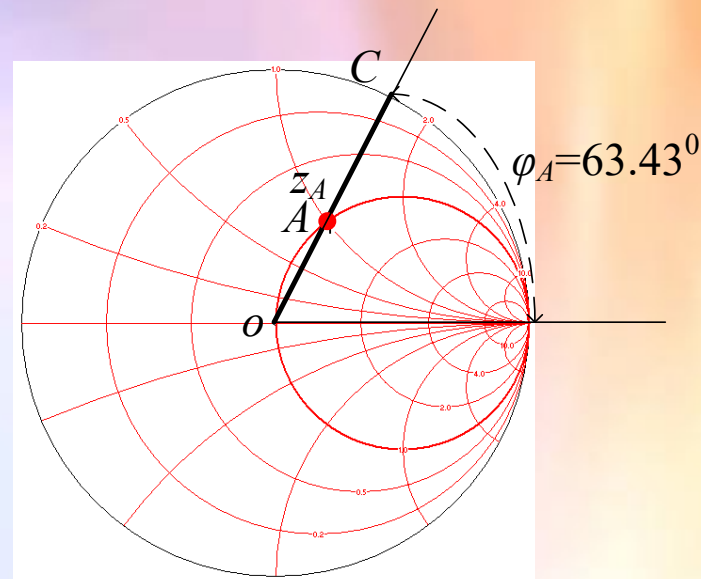
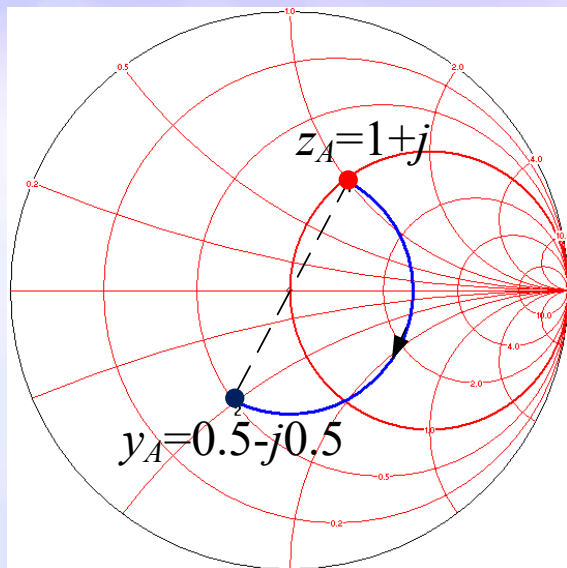
$$2kd = \frac{4\pi}{\lambda} d$$



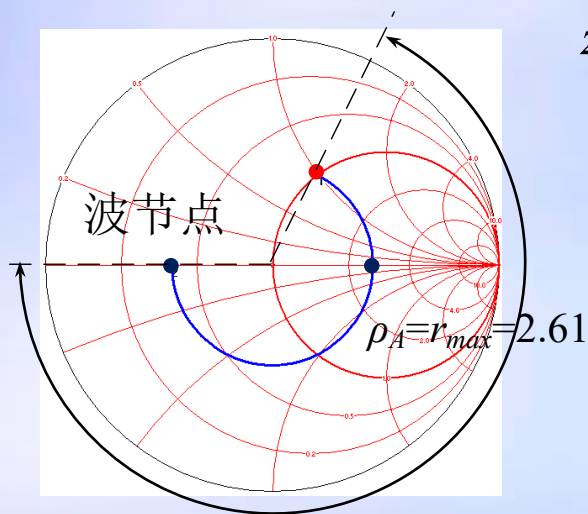
例2-7

11

求图所示圆图上A点对应的归一化阻抗 z_A 、
导纳 y_A ($|\Gamma_A|$, ψ_A)
(ρ_A , $d_{\min 1}$),



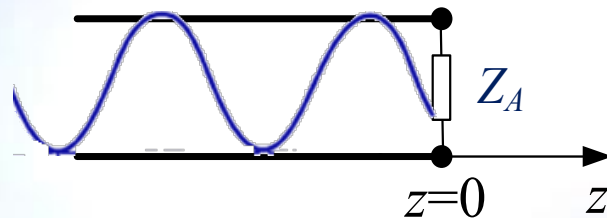
$$|\Gamma_A| = OA/OC = 0.447$$



$$z_A = 1 + j \quad y_A = 0.5 - j0.5$$

$$2kd_{\min 1} \rightarrow 63.43^\circ + 180^\circ$$

$$\frac{d_{\min 1}}{\lambda} = 0.388$$



例2-8

12

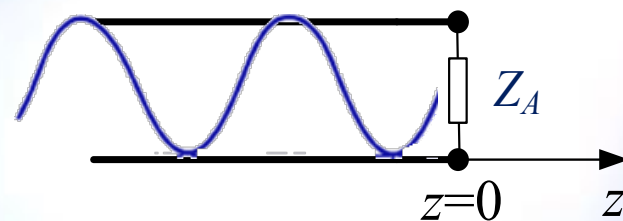
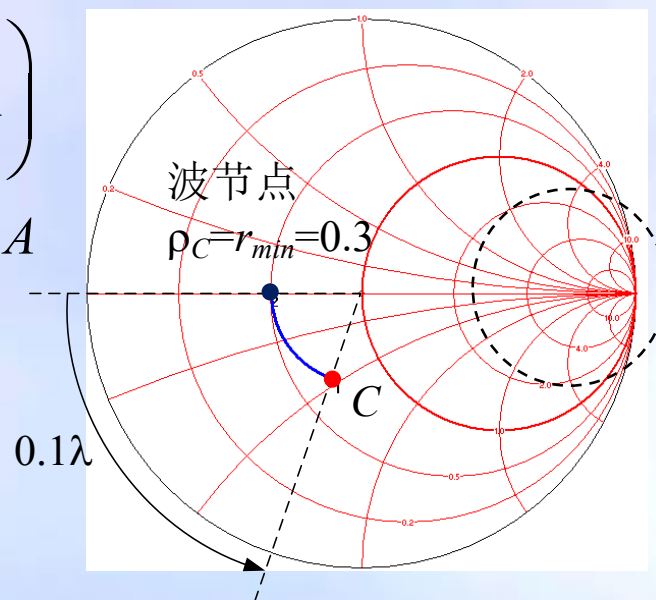
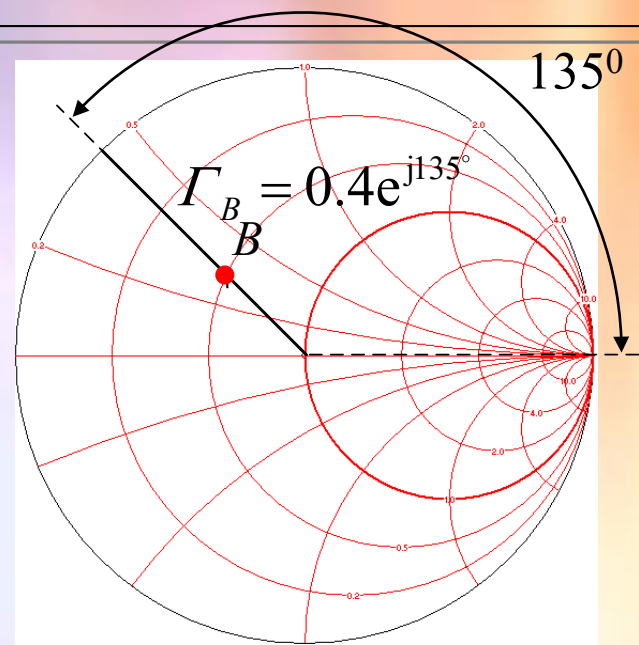
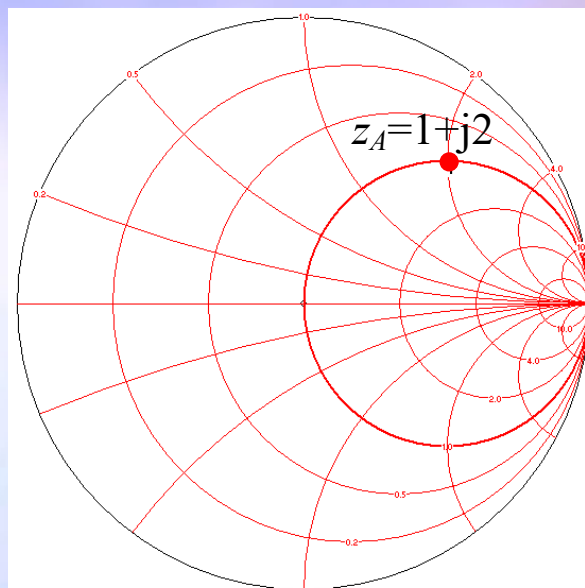
已知用阻抗表示的归一化负载 $z_A = 1 + j2$ ，用反射系数表示的负载

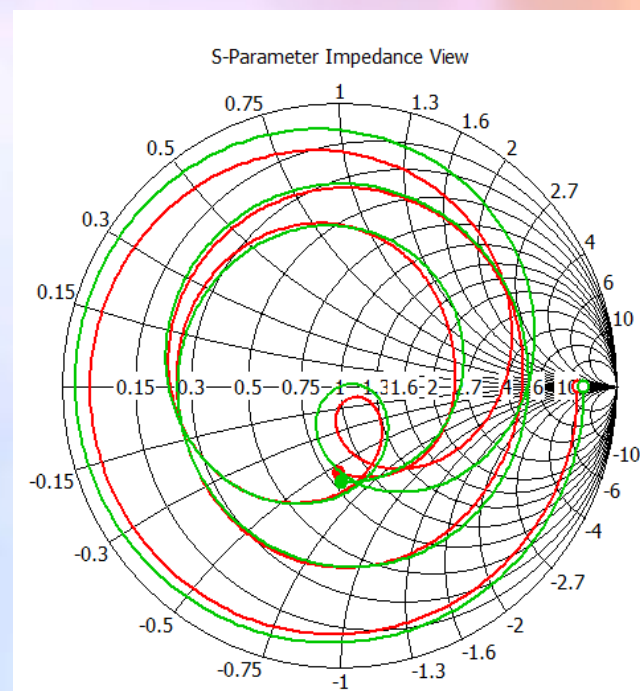
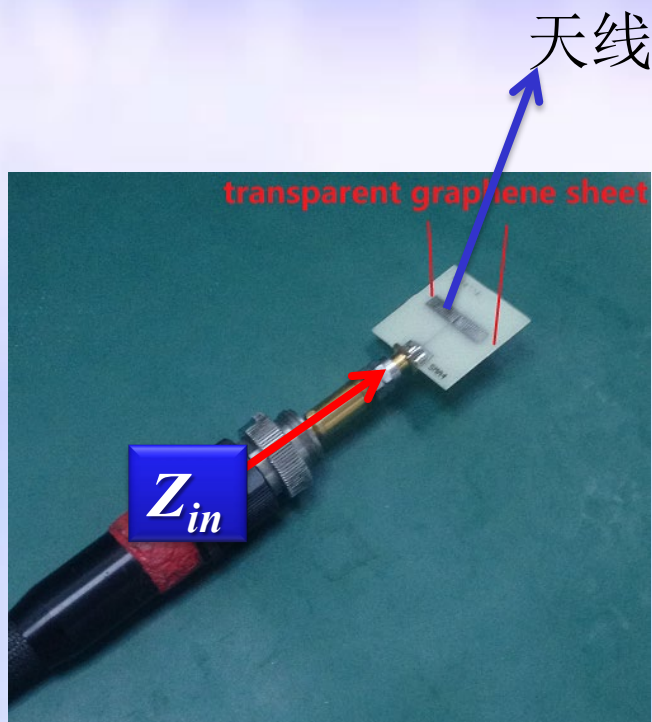
$$\Gamma_B = 0.4e^{j135^\circ}$$

用驻波系数及驻波最小点位置表示的负载

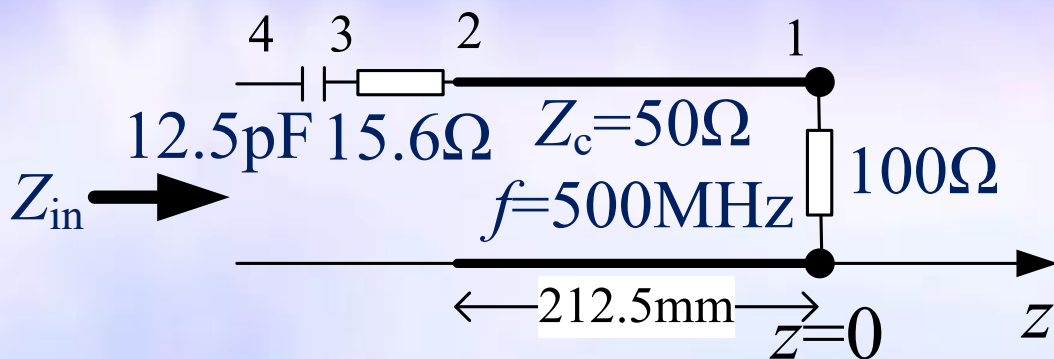
$$\left(\rho_c = 3, \frac{d_{\min c}}{\lambda} = 0.1 \right)$$

在圆图上标出相应的点A、B、C





天线输入端口的阻抗 Z_{in} 随频率的变化



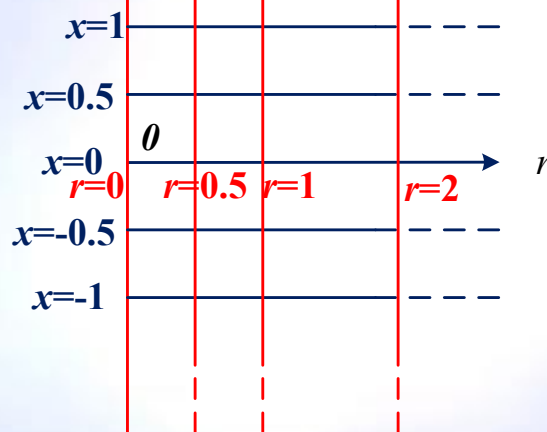
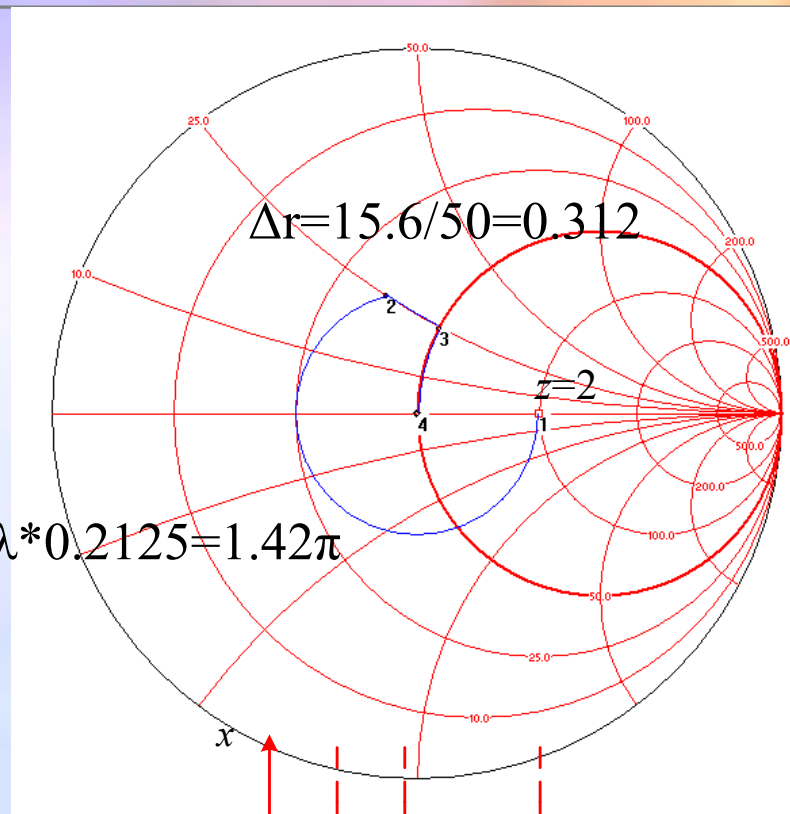
$$\frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j2\pi fC} = \frac{1}{j2\pi \cdot 500 \cdot 12.5 \cdot 10^{-6}} = -j25.5 \Omega$$

$$\frac{25.5}{50} = 0.51$$

$$Z_{in} \approx 50 \Omega$$

阻抗匹配

$$2 \cdot 2\pi / \lambda \cdot 0.2125 = 1.42\pi$$



Γ_i 复平面上的导纳圆图

$$y(z) \equiv \frac{Y(z)}{Y_c} = g + jb \quad \text{归一化导纳}$$

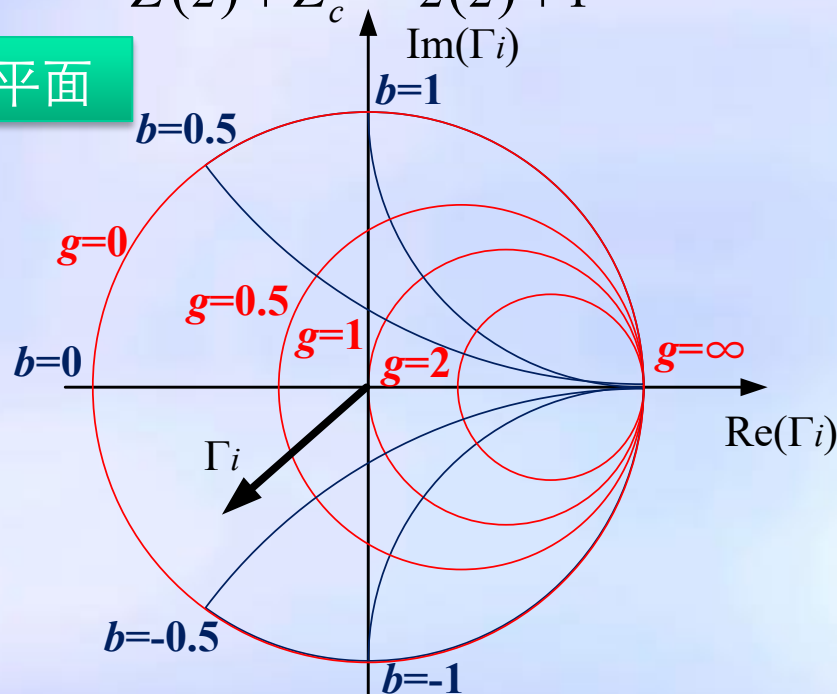
$$\Gamma_i(z) = \frac{Y(z) - Y_c}{Y(z) + Y_c} = \frac{y(z) - 1}{y(z) + 1}$$

$$\Gamma_u(z) = \frac{Z(z) - Z_c}{Z(z) + Z_c} = \frac{z(z) - 1}{z(z) + 1}$$

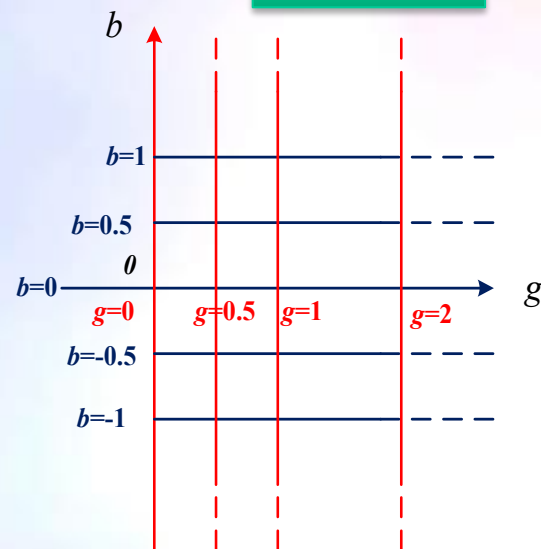
两式具有相同的分式线性映射

- Γ_i 复平面上等 g 线、等 b 线与 Γ_u 复平面上等 r 线与等 x 线相同；
- Γ_i 复平面上导纳圆图与 Γ_u 复平面上阻抗圆图具有相同形状。

Γ_i 复平面



y 复平面



Γ_i 复平面上导纳圆图的特征点、线、面

要注意 Γ_i 导纳圆图与 Γ_u 阻抗圆图上特征点、线、面的区别。

(1) 圆图上半圆 $b>0$ ，电抗为容抗； $\Gamma_i(z) \equiv \frac{-U^r e^{jkz}}{U^i e^{-jkz}} = -\Gamma_u(z)$

下半圆 $b<0$ ，其电抗为感抗。

(2) 圆图实轴 $b=0$ ，是纯电导线。

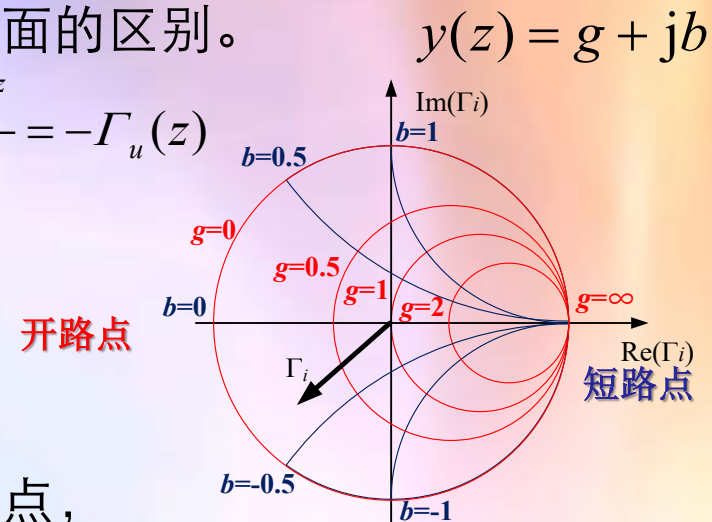
(3) $|\Gamma_i|=1$ 的圆 $g=0$ ，是纯电纳圆。

(4) 实轴左端点与 $|\Gamma_i|=1$ 的圆交点， $y=0$ ，是开路点，

而右实轴与 $|\Gamma_i|=1$ 的圆的交点，即右端点， $y=\infty$ ，代表短路，圆图中心仍是匹配点。

(5) 圆图实轴左半径上点代表电压波腹、电流波节，其上数据代表 $g_{\min}=1/\rho$ ，而实轴右半径上的点代表电压波节，电流波腹，其上数据代表 $g_{\max}=\rho$ 。

所以具体应用时，阻抗圆图、导纳圆图实际上是同一张图，只要记住圆图上特征点、线、面所代表的物理意义的区别。

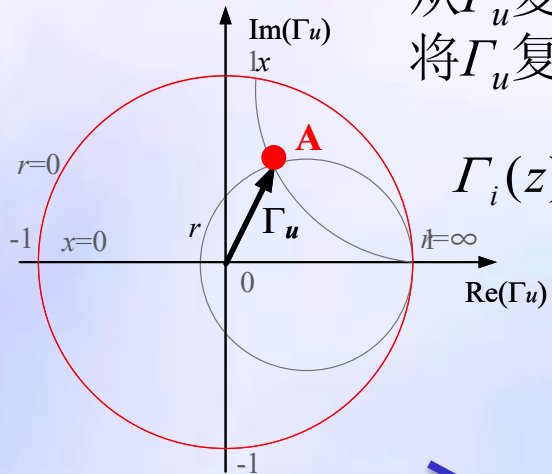


Γ_u 阻抗圆图与 Γ_i 导纳圆图的切换

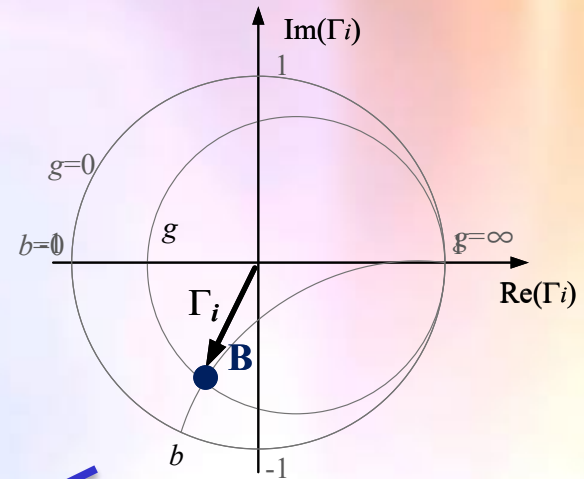
利用 Γ_u 阻抗圆图和 Γ_i 导纳圆图的切换，可以求解某一阻抗 z 的导纳 y ，或者反之。

从 Γ_u 复平面变换到 Γ_i 复平面：
将 Γ_u 复平面旋转180°

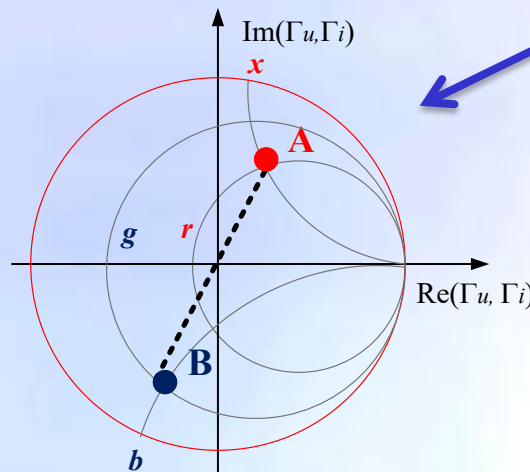
$$\Gamma_i(z) \equiv \frac{-U^r e^{jkz}}{U^i e^{-jkz}} = -\Gamma_u(z)$$



Γ_u 复平面上的阻抗圆图



Γ_i 复平面上的导纳圆图



在同一个圆图上，A点读数的单位为阻抗，将A点旋转180°得到B点，B点读数的单位即为导纳。**A、B点对应传输线上同一物理位置。旋转后，阻抗圆图就变为导纳圆图。**

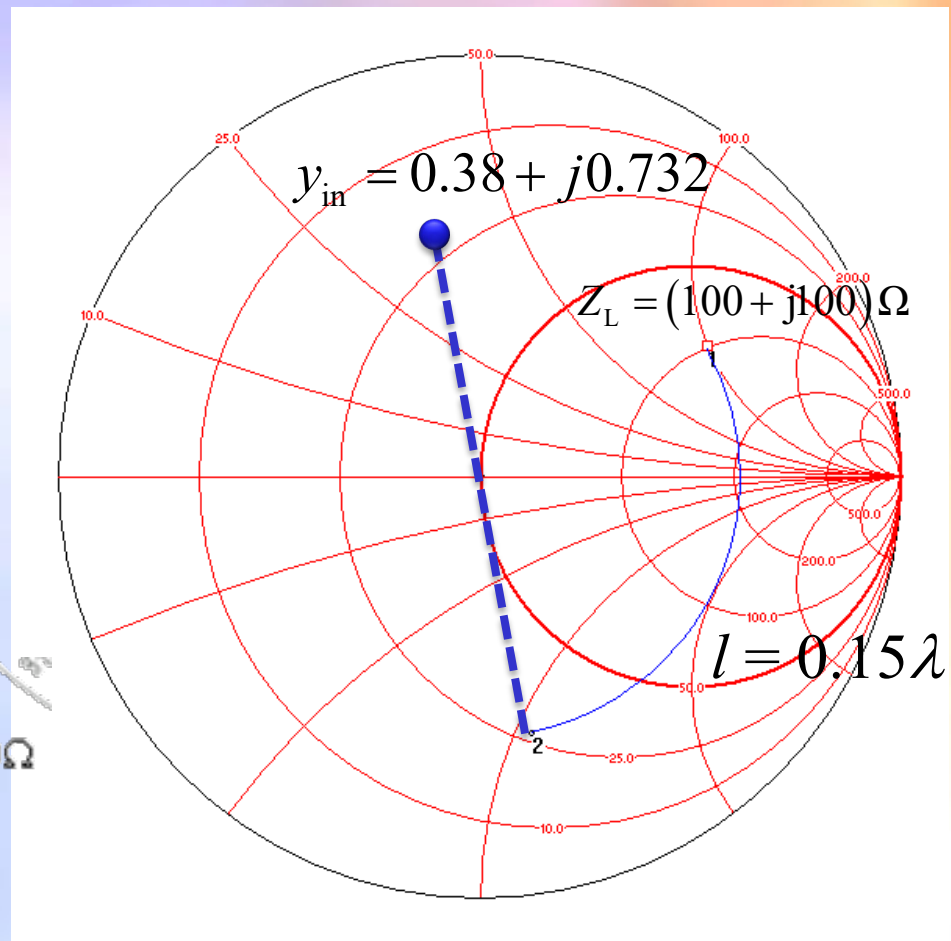
例2-9

19

传输线特征阻抗为 50Ω ，负载阻抗

$$Z_L = (100 + j100)\Omega$$

求距负载 $l = 0.15\lambda$ 处的输入导纳 Y_{in}

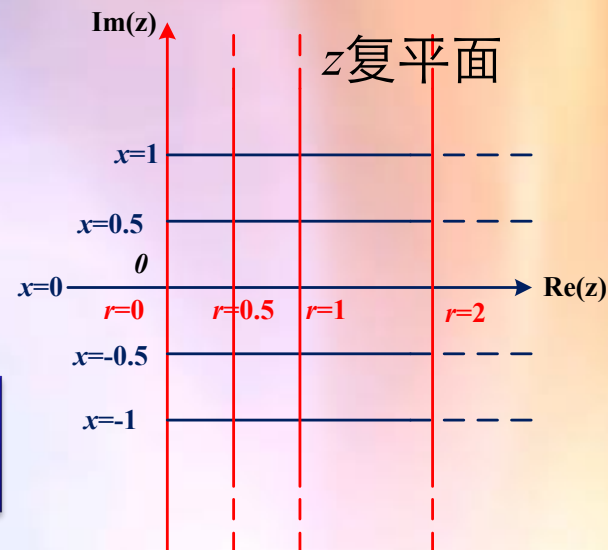
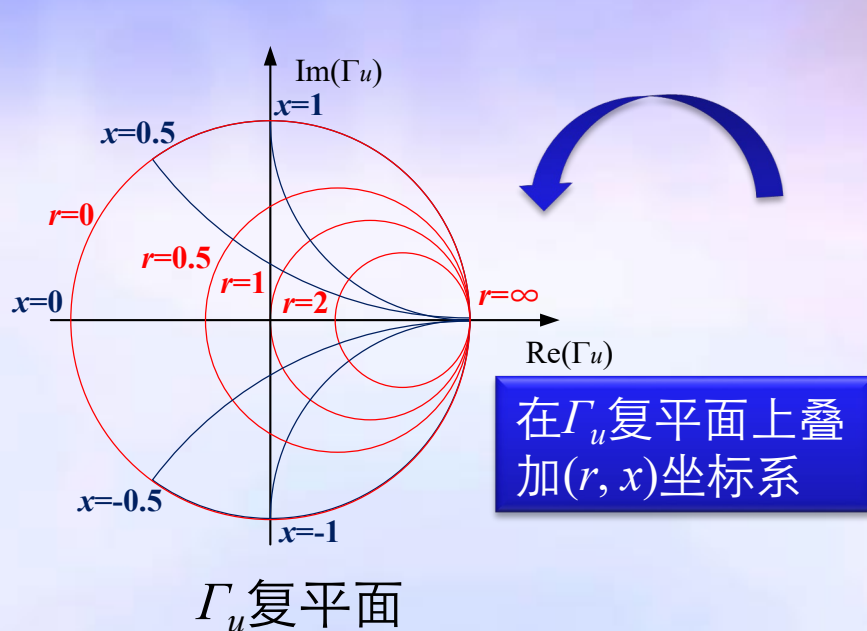


1. 电压反射系数 Γ_u 复平面上的圆图
 - a) 阻抗圆图
 - b) 导纳圆图
2. 电流反射系数 Γ_i 复平面上的圆图
 - a) 阻抗圆图
 - b) 导纳圆图

Γ_u 复平面上的圆图 - 导纳圆图

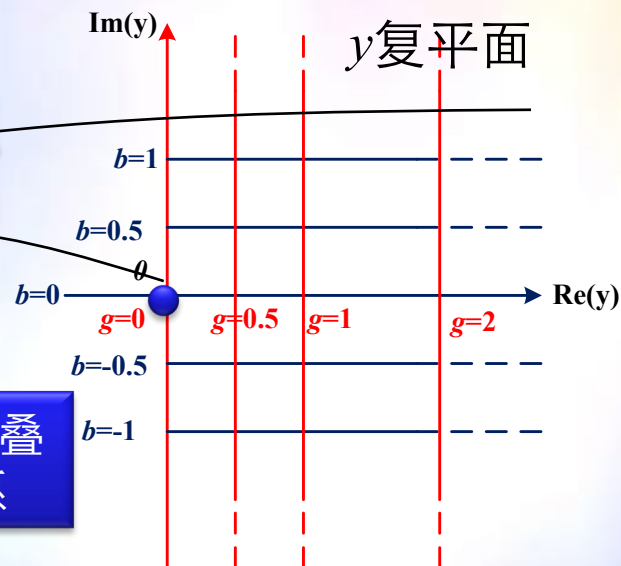
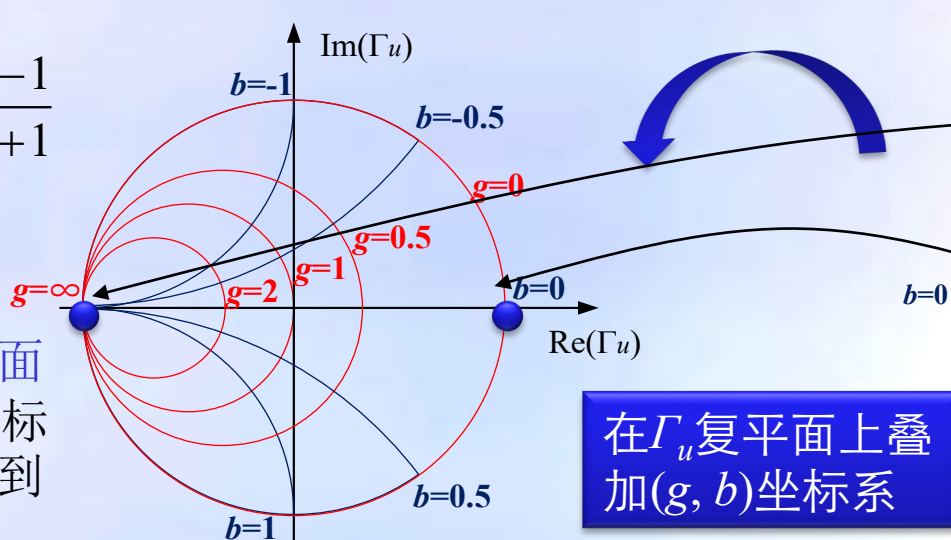
$$\Gamma_u(z) = \frac{z(z)-1}{z(z)+1}$$

$$z(z) = r + jx$$



$$\Gamma_u(z) = -\frac{y(z)-1}{y(z)+1}$$

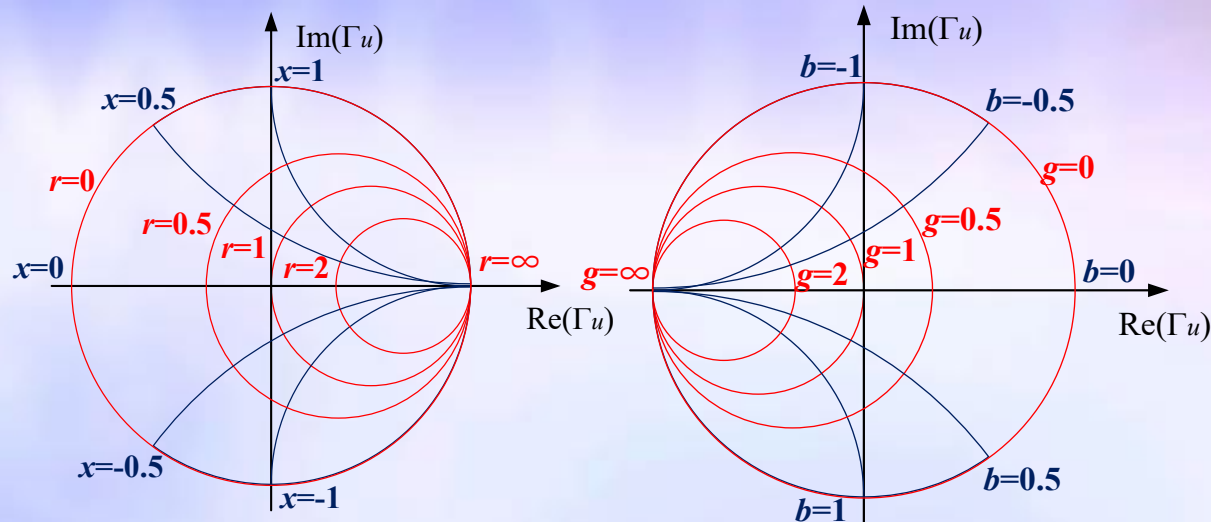
$$y(z) = g + jb$$



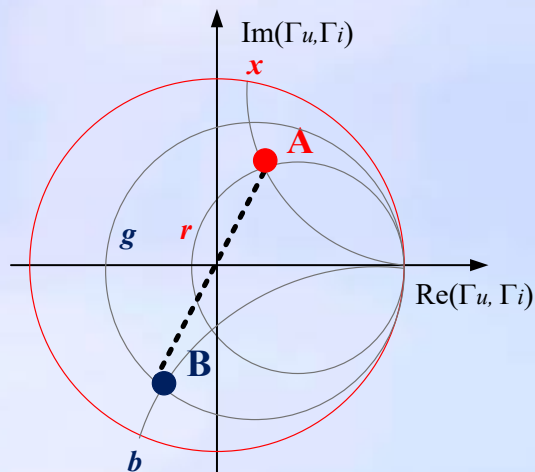
在同一个 Γ_u 复平面上，阻抗圆图坐标系转过 180° 就得到导纳圆图坐标系

如何利用 Γ_u 复平面上阻抗和导纳圆图求 $Y_A = 1/Z_A$

Γ_u 复平面上的圆图 - 导纳圆图

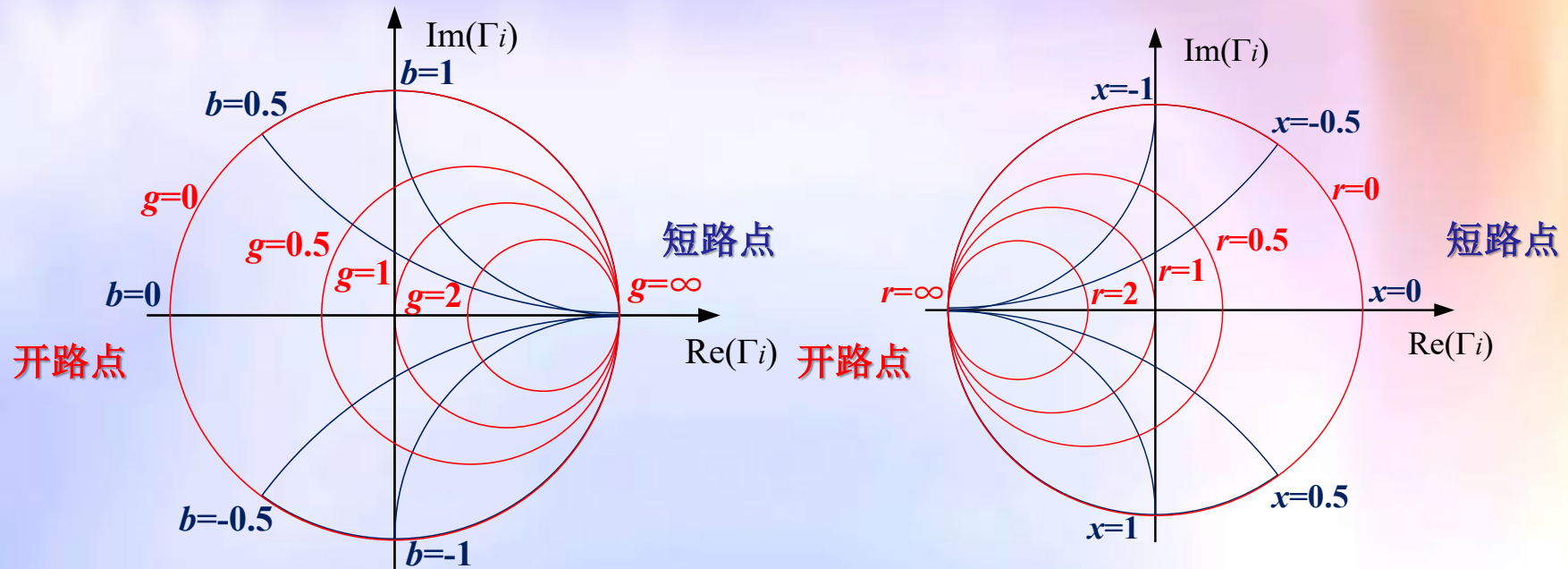


- Γ_u 复平面不变，旋转 (r, x) 坐标系到 (g, b) 坐标系；
- 因为在同一个 Γ_u 复平面上，旋转后阻抗圆图和导纳圆图有相同的特征点、线、面：开路点、短路点。



- 旋转 Γ_u 复平面到 Γ_i 复平面；
- 因为旋转前后分别是 Γ_u 复平面到 Γ_i 复平面，旋转后两个圆图有相反的特征点、线、面、开路点、短路点。

Γ_i 复平面上的圆图 – 阻抗圆图

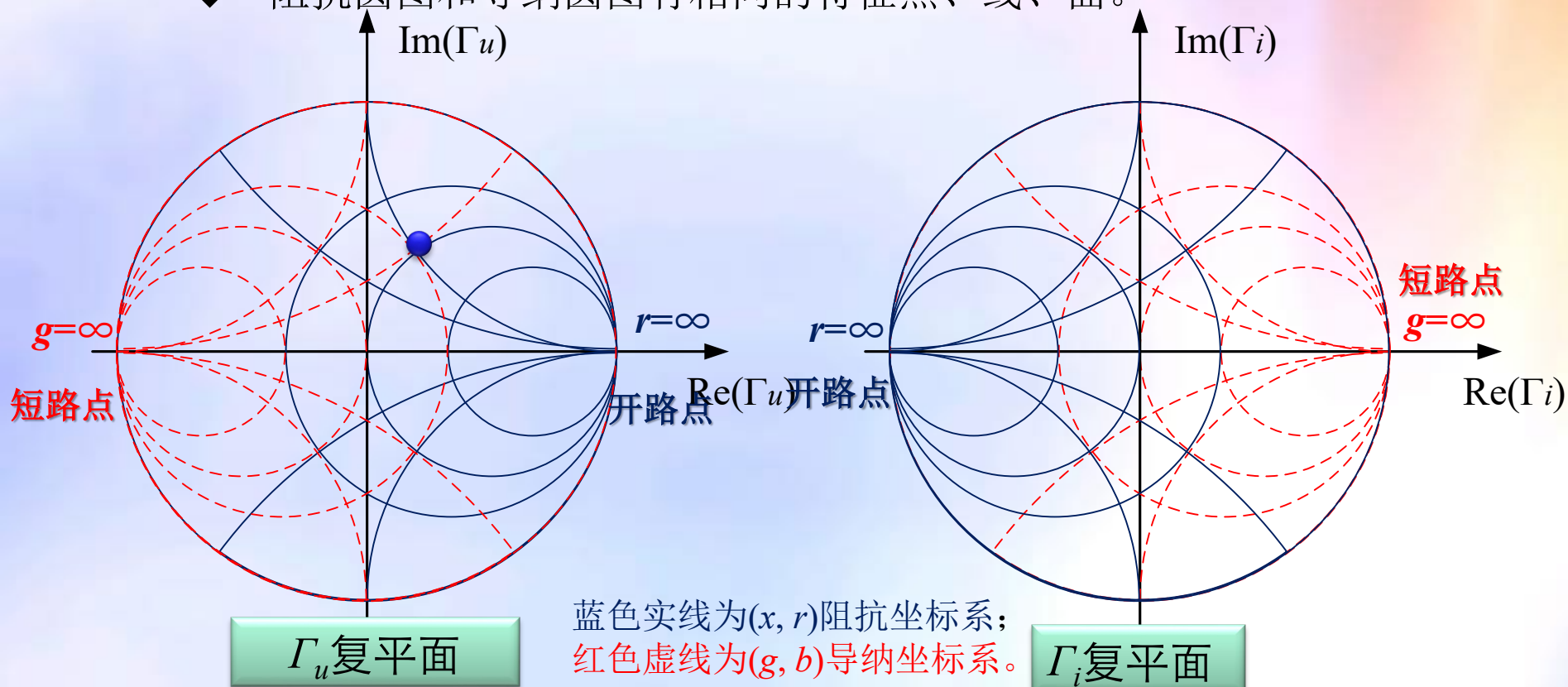


Γ_i 复平面上的导纳圆图

Γ_i 复平面上的阻抗圆图

在同一个 Γ_i 复平面上，导纳圆图坐标系转过 180° 就得到阻抗圆图坐标系；
 同一个 Γ_i 复平面上，阻抗圆图和导纳圆图有相同特征点、线、面：开路点、
 短路点等。

- Γ_u 复平面和 Γ_i 复平面上都定义了三套坐标系：反射系数坐标系； (r, x) 坐标系-阻抗圆图； (g, b) 坐标系-导纳圆图。
- 同一个 Γ_i 或者 Γ_u 复平面上
 - ◆ 从导纳圆图转过 180° 就得到阻抗圆图；
 - ◆ 阻抗圆图和导纳圆图有相同的特征点、线、面。



本教材采用 Γ_u 复平面上的阻抗圆图来解题。如无特殊说明，以后圆图都指 Γ_u 复平面上的阻抗圆图。

圆图应用举例

由输入端测得，终端
短路时输入阻抗

$$Z_{in}^{sc} = j106\Omega$$

终端开路时输入阻抗

$$Z_{in}^{oc} = -j23.6\Omega$$

终端接上负载时输入
阻抗

$$Z_{in} = 25 - j70\Omega$$

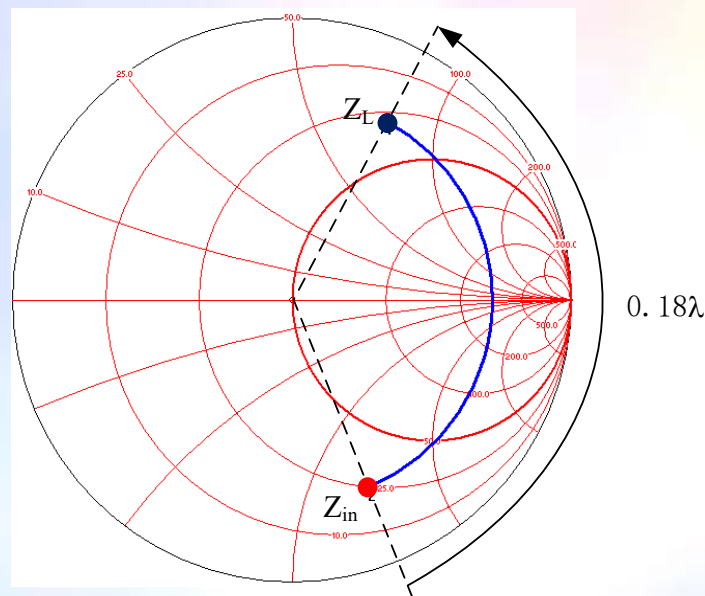
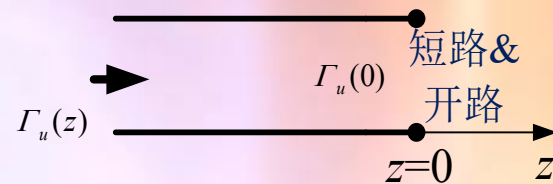
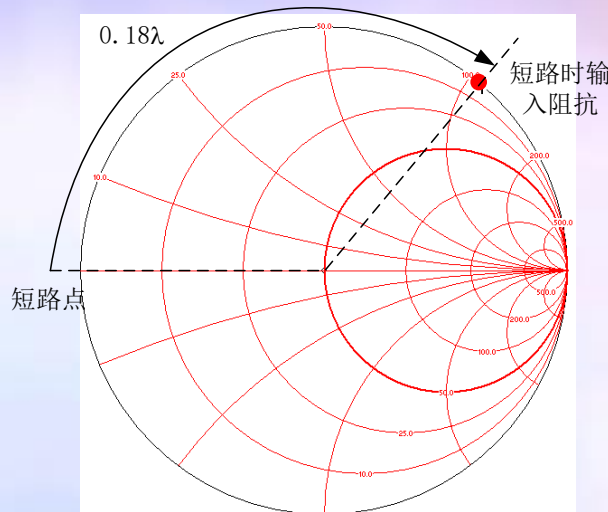
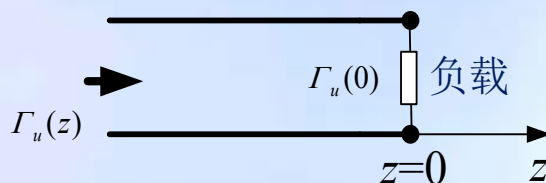
求负载阻抗 Z_L 。

$$Z_{in} = Z_c \frac{Z_L + jZ_c \tan kl}{Z_c + jZ_L \tan kl}$$

$$Z_{in}^{sc} = jZ_c \tan kl$$

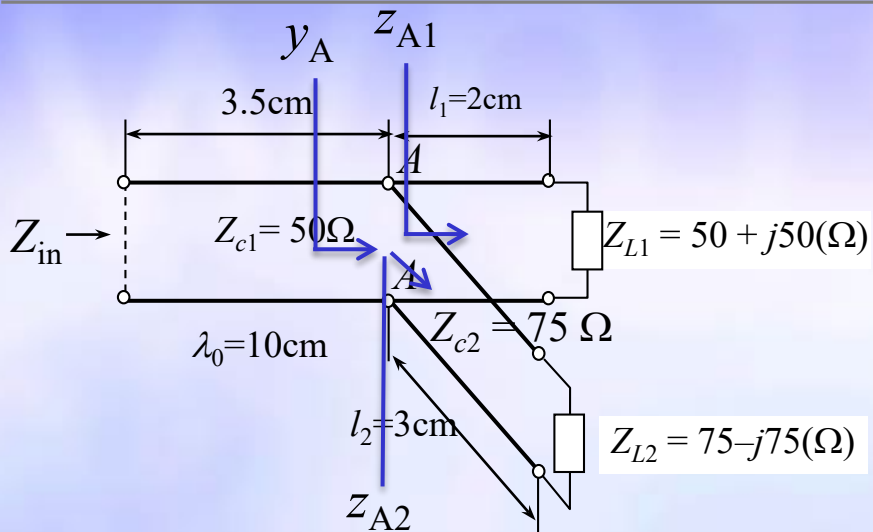
$$Z_{in}^{oc} = Z_c / j \tan kl$$

$$Z_c = \sqrt{Z_{in}^{sc} Z_{in}^{oc}}$$



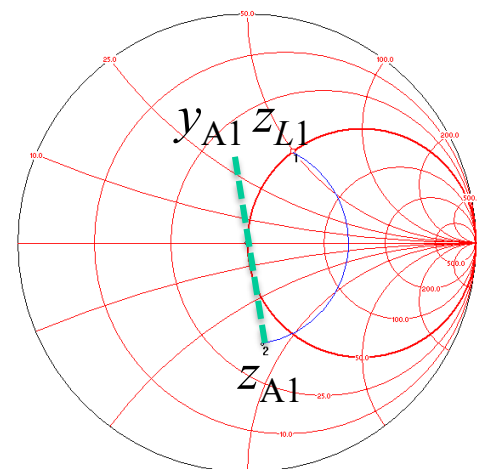
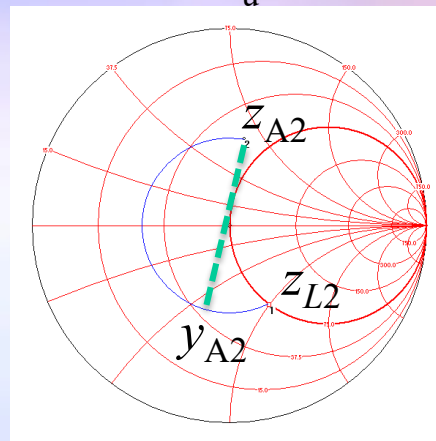
例2-11

27

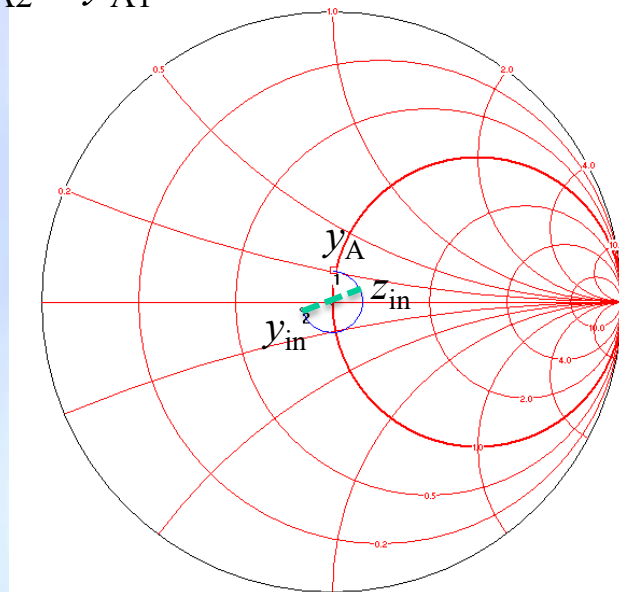


$$f = \frac{c}{\lambda_0} = 3\text{GHz}$$

Γ_u 复平面上的阻抗圆图



y_{A2} 和 y_{A1} 反归一化后相加，得到 y_A



Γ_i 复平面上的导纳圆图

从网上可以下载Smith-Chart。

可以验证作业的结果，通过使用软件熟练如何转圆图。

考试不能用软件。

复习要点

- Γ_u 复平面和 Γ_i 复平面上都定义了三套坐标系：反射系数坐标系； (r, x) 坐标系-阻抗圆图； (g, b) 坐标系-导纳圆图。
- 圆图上特殊的区域、线、点。
- Γ_u 复平面上的阻抗圆图旋转 180° 即得到 Γ_u 复平面上的导纳圆图。同一张圆图如起始是当阻抗圆图用，转过 180° ，这张图就变成导纳圆图，反之亦然。
- Γ_u 复平面上的阻抗圆图也可当作 Γ_i 复平面上的导纳圆图用，但其特征点、线、面的物理意义是不同的。电路并联运算时宜用导纳圆图，串联运算时宜用阻抗圆图。

复习范围

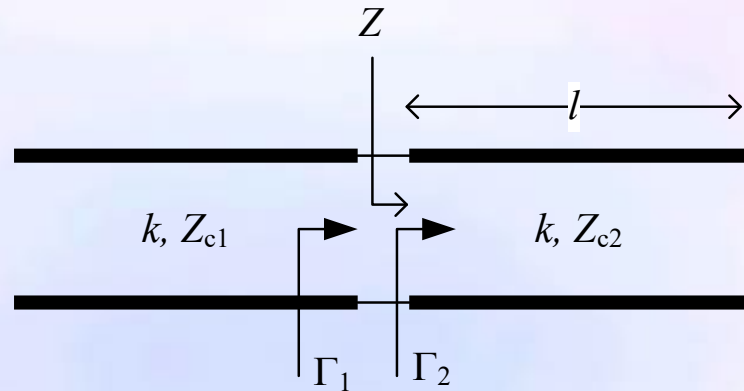
2.4, 2.5, 熟悉课堂所有例子, 自己用圆图计算

作业: 2.11, 2.12, 2.14, 2.17(a)&(d)

级联传输线的圆图

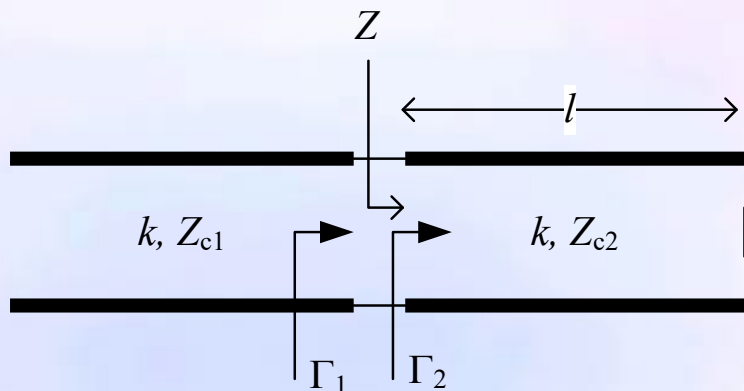
30

问题：传输线1和传输线2级联，传输线2终端接任意负载阻抗，如图所示。当 l 变化时， Γ_1 的轨迹？ Γ_1 以 Z_{c1} 为参考阻抗， Γ_2 以 Z_{c2} 为参考阻抗。



级联传输线的圆图

问题：传输线1和传输线2级联，传输线2终端接任意负载阻抗，如图所示。当 l 变化时， Γ_1 的轨迹？ Γ_1 以 Z_{c1} 为参考阻抗， Γ_2 以 Z_{c2} 为参考阻抗。



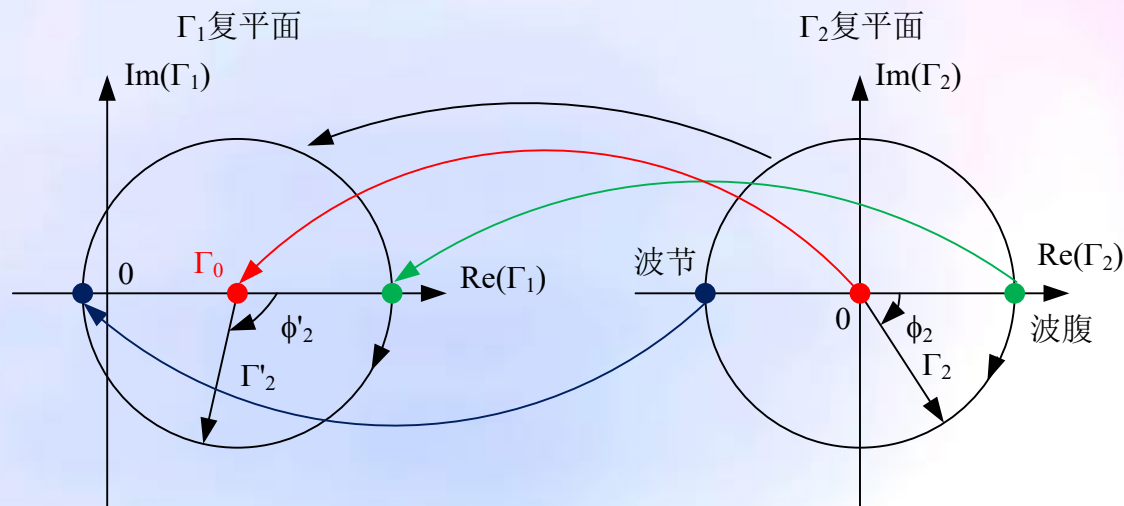
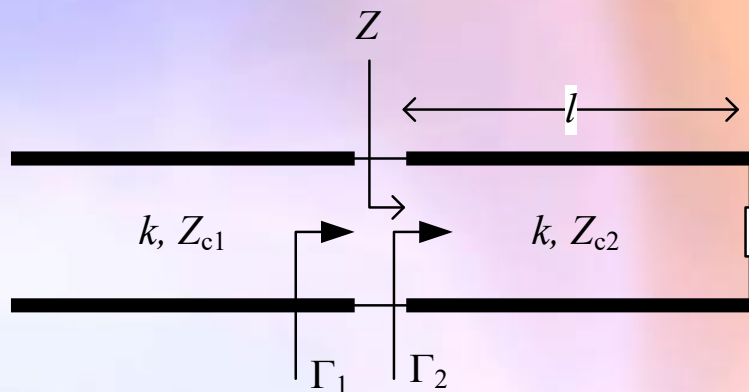
$$\begin{cases} Z = Z_{c2} \frac{1 + \Gamma_2}{1 - \Gamma_2} \\ \Gamma_1 = \frac{Z - Z_{c1}}{Z + Z_{c1}} \end{cases} \quad \begin{matrix} \rightarrow \\ \downarrow \end{matrix} \quad \Gamma_1 = \frac{\Gamma_2 + \Gamma_0}{\Gamma_2 \Gamma_0 - 1} \quad \Gamma_0 = \frac{Z_{c2} - Z_{c1}}{Z_{c2} + Z_{c1}}, -1 \leq \Gamma_0 \leq 1 \quad \Gamma_0 \text{ 不随 } l \text{ 变化}$$

Γ_2 到 Γ_1 的分式线性映射，当 $\Gamma_0 \neq \pm 1$ 时，具有保圆性

级联传输线的圆图

$$\Gamma_1 = \frac{\Gamma_2 + \Gamma_0}{\Gamma_2 \Gamma_0 - 1}$$

$$\Gamma_0 = \frac{Z_{c2} - Z_{c1}}{Z_{c2} + Z_{c1}}, -1 \leq \Gamma_0 \leq 1$$



- 随着 l 的变化, 原 Γ_2 圆和象 Γ'_2 圆的绕向相同;
- φ_2 不一定等于 φ'_2 ; $|\Gamma'_2|$ 不一定等于 $|\Gamma_2|$