

电磁场与电磁波

第3讲

2.2 描述传输线状态的特征量沿传输线的
变换

2.3 传输功率与传输效率

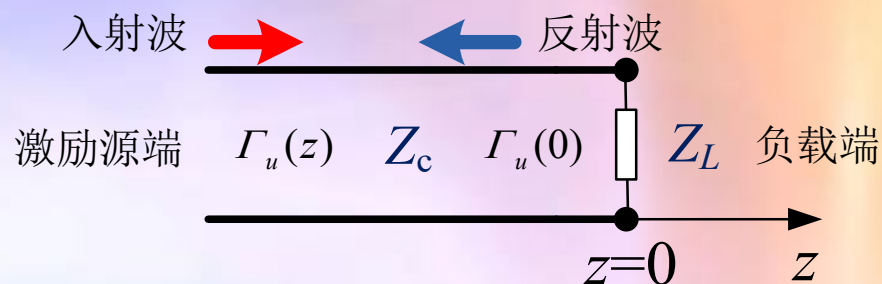
魏兴昌

浙江大学

weixc@zju.edu.cn

1. 传输线上电压 U 和电流 I 分布

$$\begin{cases} U(z) = U^i e^{-jkz} + U^r e^{jkz} \\ I(z) = \frac{1}{Z_c} (U^i e^{-jkz} - U^r e^{jkz}) \end{cases}$$

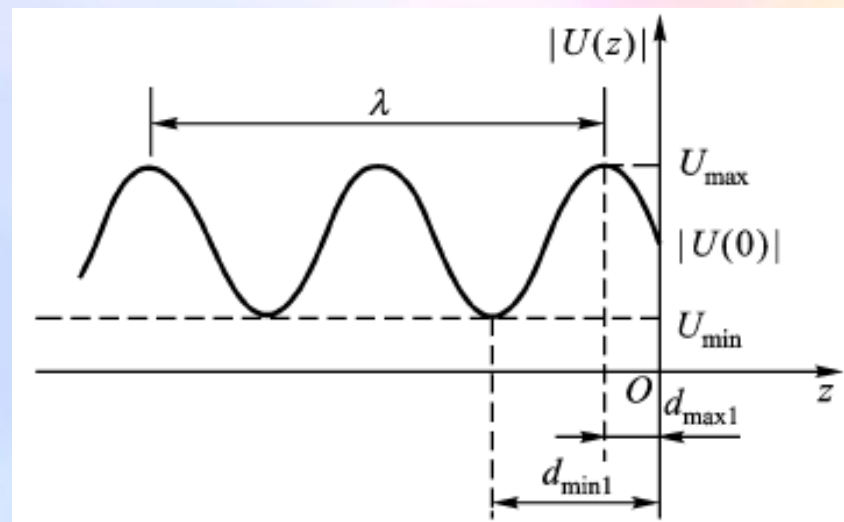


2. 用反射系数表示

$$\Gamma_u(z) = \frac{U^r e^{jkz}}{U^i e^{-jkz}}$$

3. 用阻抗（或导纳）表示

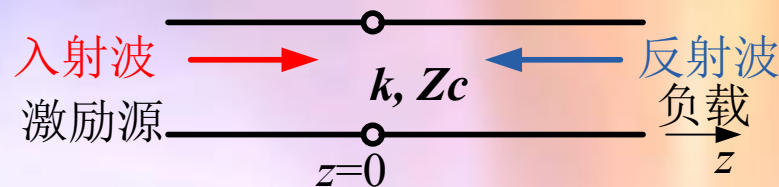
$$Z(z) = \frac{1}{Y(z)} = \frac{U(z)}{I(z)}$$



电压、电流沿传输线变换关系

3

$$\begin{cases} U(z) = U^i e^{-jkz} + U^r e^{jkz} \\ I(z) = \frac{1}{Z_c} (U^i e^{-jkz} - U^r e^{jkz}) \end{cases} \quad (1)$$



U^i 和 U^r 为待定系数，与传输线边界条件有关，下面求 U^i 和 U^r

坐标系的定义

入射波和反射波用电压和电流表示

$$\begin{cases} U^i e^{-jkz} = \frac{1}{2} [U(z) + Z_c I(z)] \\ U^r e^{jkz} = \frac{1}{2} [U(z) - Z_c I(z)] \end{cases}$$

在 $z=0$ 处

$$\begin{cases} U^i = \frac{1}{2} [U(0) + Z_c I(0)] \\ U^r = \frac{1}{2} [U(0) - Z_c I(0)] \end{cases}$$

带入 (1)，得到

$$\begin{cases} U(z) = U(0) \cos(kz) - jZ_c I(0) \sin(kz) \\ I(z) = -jY_c U(0) \sin(kz) + I(0) \cos(kz) \end{cases}$$

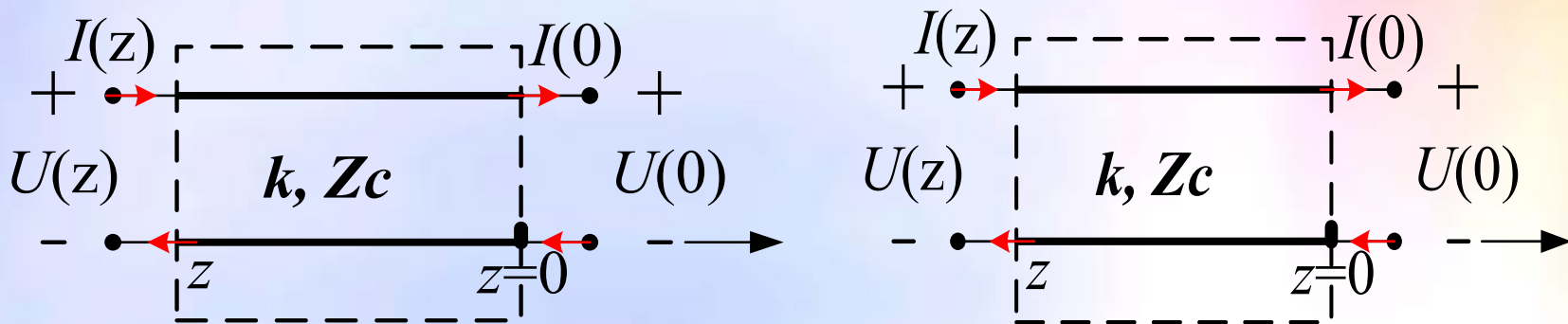
相当于用边界条件 $U(0)$ 和 $I(0)$ 解传输线方程

电压、电流沿传输线变换关系

4

电压电流的**传输矩阵**

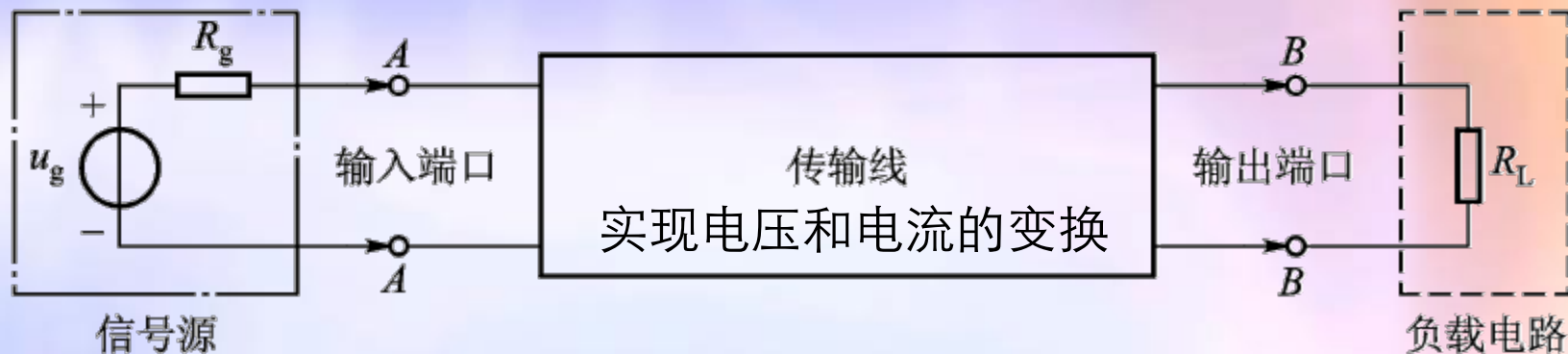
$$\begin{bmatrix} U(z) \\ I(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(kz) & -jZ_c \sin(kz) \\ -jY_c \sin(kz) & \cos(kz) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U(0) \\ I(0) \end{bmatrix}$$



- 描述电压和电流沿传输线的变换关系；
- 传输矩阵可用于级联不同的传输线

传输线在电路中相当于一个二端口网络

5



传输线在电路中相当于一个二端口网络，一个端口连接信号源，通常称为输入端，另一个端口连接负载，称为输出端。

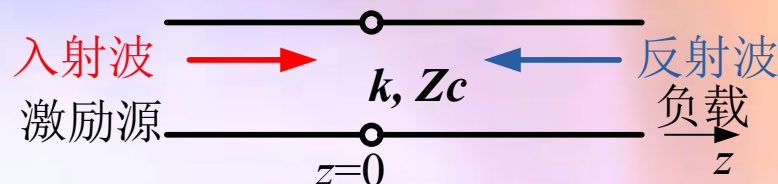
u_g 是信号源， R_g 是信号源的内阻， R_L 是负载。

反射系数沿传输线变换关系

电压反
射系数

$$\Gamma_u(z) \equiv \frac{U^r e^{jkz}}{U^i e^{-jkz}}$$

认为入射波 $U^i e^{-jkz}$ 是已知量



$$U^r e^{jkz} = \Gamma_u(z) U^i e^{-jkz}$$

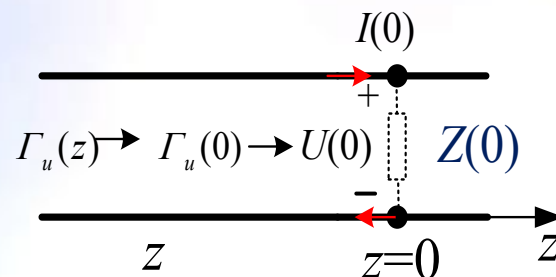
$$\begin{cases} U(z) = U^i e^{-jkz} + U^r e^{jkz} \\ I(z) = \frac{1}{Z_c} (U^i e^{-jkz} - U^r e^{jkz}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U(z) = [1 + \Gamma_u(z)] U^i e^{-jkz} \\ I(z) = [1 - \Gamma_u(z)] \frac{U^i e^{-jkz}}{Z_c} \end{cases}$$

根据反射系数 Γ_u 的定义

$$\Gamma_u(z) = \frac{U^r e^{jkz}}{U^i e^{-jkz}} = \frac{U^r}{U^i} e^{j2kz} = \Gamma_u(0) e^{j2kz}$$

$$\Gamma_u(0) = \frac{U^r}{U^i} \quad \text{反射系数沿传输线的变换关系}$$

由反射系数 $\Gamma_u(z)$ 即可决定其他表示传输线状态的量。



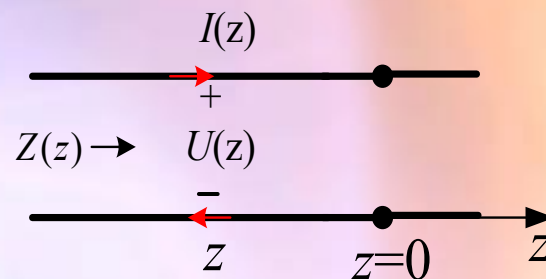
反射系数 (S参数)
是微波界对工程的一个主要贡献

阻抗或导纳沿传输线变换关系

7

定义传输线上电压与电流之比为阻抗

$$Z(z) = \frac{1}{Y(z)} \equiv \frac{U(z)}{I(z)}$$



反射系数和阻抗的关系

$$\begin{cases} U(z) = [1 + \Gamma_u(z)] U^i e^{-jkz} \\ I(z) = [1 - \Gamma_u(z)] \frac{U^i e^{-jkz}}{Z_c} \end{cases} \rightarrow$$

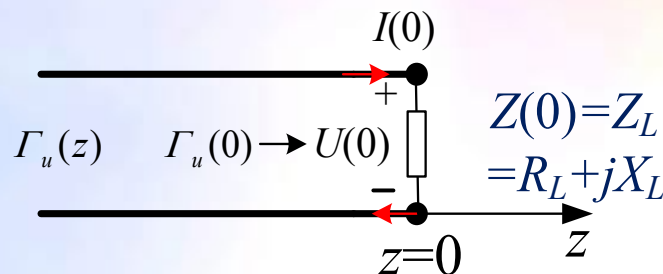
$$Z(z) = Z_c \frac{1 + \Gamma_u(z)}{1 - \Gamma_u(z)}$$

$$\Gamma_u(z) = \frac{Z(z) - Z_c}{Z(z) + Z_c}$$

假定负载接在 $z=0$ 处

$$|\Gamma_u(0)| = \left| \frac{Z_L - Z_c}{Z_L + Z_c} \right| = \sqrt{\frac{(R_L - Z_c)^2 + X_L^2}{(R_L + Z_c)^2 + X_L^2}} \leq 1$$

$$\varphi(0) = \arctan \frac{2X_L Z_c}{R_L^2 + X_L^2 - Z_c^2}$$



$$\Gamma_u(z) = \Gamma_u(0) e^{j2kz} \Rightarrow \Gamma_u(z) = |\Gamma_u(0)| e^{j(2kz + \varphi(0))}$$

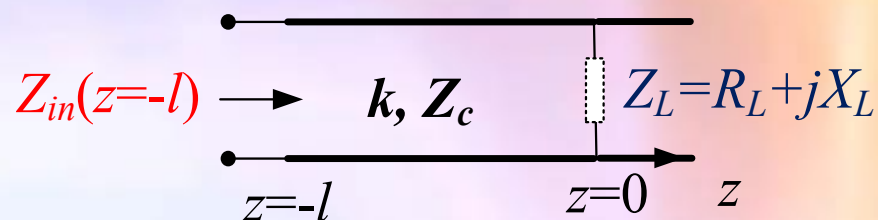
随 z 的变化在复平面上的轨迹为一个圆

阻抗或导纳沿传输线变换关系

8

根据

$$\begin{cases} U(z) = U(0) \cos(kz) - jZ_c I(0) \sin(kz) \\ I(z) = -jY_c U(0) \sin(kz) + I(0) \cos(kz) \end{cases}$$



$$Z_L = \frac{U(0)}{I(0)}$$

可得

$$Z_{in}(z = -l) = Z_c \frac{Z_L + jZ_c \tan kl}{Z_c + jZ_L \tan kl}$$

阻抗沿传输线的变换关系

阻抗或导纳沿传输线变换关系

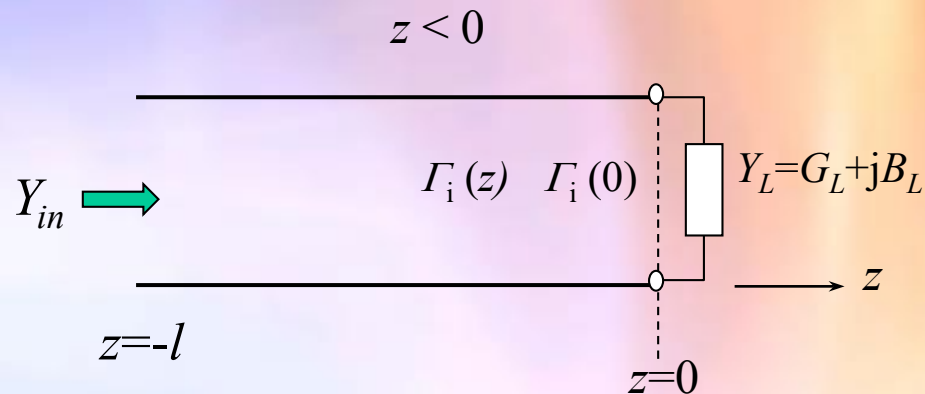
$$\begin{cases} U(z) = U^i e^{-jkz} + U^r e^{jkz} \\ I(z) = \frac{1}{Z_c} (U^i e^{-jkz} - U^r e^{jkz}) \end{cases}$$

电流反射系数 $\Gamma_i(z) \equiv \frac{-U^r e^{jkz}}{U^i e^{-jkz}} = -\Gamma_u(z)$

$$\Gamma_i(z) = \frac{Y(z) - Y_c}{Y(z) + Y_c}$$

$$Y(z) = Y_c \frac{1 + \Gamma_i(z)}{1 - \Gamma_i(z)}$$

$$Y_{in}(z = -l) = Y_c \frac{Y_L + jY_c \tan kl}{Y_c + jY_L \tan kl}$$



终端接负载 Y_L 的传输线

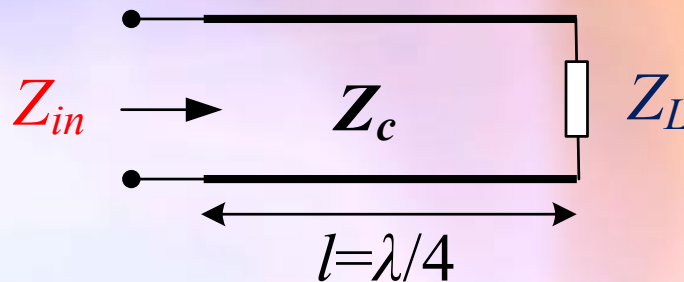
四分之一波长传输线变换器

10

$$Z_{\text{in}} = Z_c \frac{Z_L + jZ_c \tan kl}{Z_c + jZ_L \tan kl}$$

当 $l = \lambda/4$, $\tan(kl) = \infty$

$$Z_{\text{in}} = \frac{Z_c^2}{Z_L}$$



在工程上广泛应用

当 $l = \lambda/2$, $kl = 2\pi/2 = \pi$

$$Z_{\text{in}} = \boxed{}$$

例2-3

例 2-5 如图 2-7，一特性阻抗为 $50\ \Omega$ 的空气填充的同轴线终端接有 $Z_{L1} = (50 + j50)\ \Omega$ 的负载阻抗。在距终端 $l_1 = 2\ \text{cm}$ 处并联一特性阻抗为 $75\ \Omega$ 的同轴线，它的终端接有 $Z_{L2} = (75 - j75)\ \Omega$ 的负载，长度 $l_2 = 3\ \text{cm}$ 。已知工作波长 $\lambda = 10\ \text{cm}$ ，求接点 AA 前 $3.5\ \text{cm}$ 处传输线始端的输入阻抗，即传输线始端的状态。

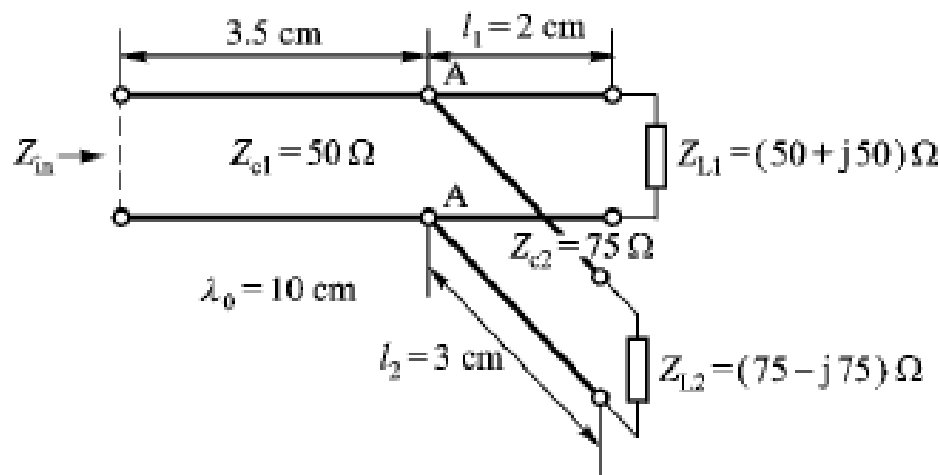


图 2-7 例 2-5 中的并联分支传输线

采用阻抗变换公式计算
$$Z_{\text{in}}(z = -l) = Z_c \frac{Z_L + jZ_c \tan kl}{Z_c + jZ_L \tan kl}$$

解：从负载 Z_{L1} 到接点 AA 截面相移 $kl_1 = \frac{2\pi}{10} \times 2 = 0.4\pi$ ，从负载 Z_{L2} 到 AA 截面相移 $kl_2 = \frac{2\pi}{10} \times 3 = 0.6\pi$ ，所以从 Z_{L1} 变换到接入点 AA 的输入阻抗 Z_{A1} 为

$$Z_{A1} = Z_{e1} \frac{Z_{L1} + jZ_{e1} \tan kl_1}{Z_{e1} + jZ_{L1} \tan kl_1} = (38 - j42) \Omega$$

从 Z_{L2} 变换到接入点 AA 的输入阻抗 Z_{A2} 为

$$Z_{A2} = Z_{e2} \frac{Z_{L2} + jZ_{e2} \tan kl_2}{Z_{e2} + jZ_{L2} \tan kl_2} = (57 + j63) \Omega$$

Z_{A1} 与 Z_{A2} 并联，其并联导纳 Y_A 为

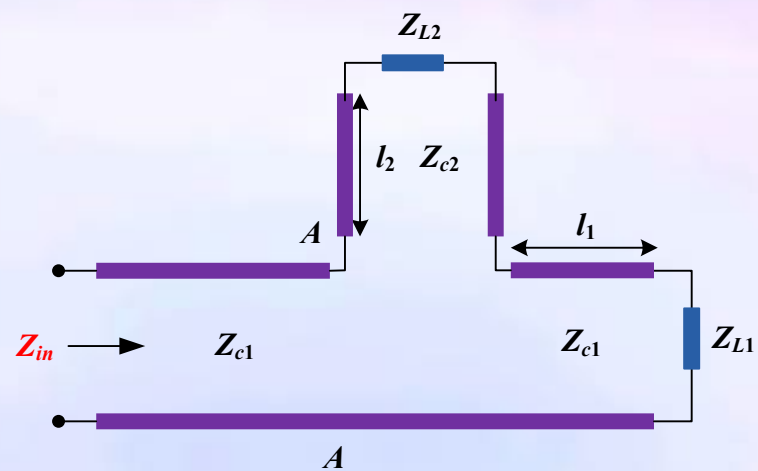
$$Y_A = Y_{A1} + Y_{A2} = \frac{1}{Z_{A1}} + \frac{1}{Z_{A2}} = (0.0198 + j0.00436) S$$

并联阻抗

$$Z_A = \frac{1}{Y_A} = (48.12 - j10.59) \Omega$$

从接入点 AA 到始端相移 $kl_3 = \frac{2\pi}{10} \times 3.5 = 0.7\pi$ ，所以始端输入阻抗 Z_{in} 为

$$Z_{in} = Z_{e1} \frac{Z_A + jZ_{e1} \tan kl_3}{Z_{e1} + jZ_A \tan kl_3} = (61.5 + j3.4) \Omega$$



图示法求解传输线 电压、电流分布

反射系数沿传输线变换的图示

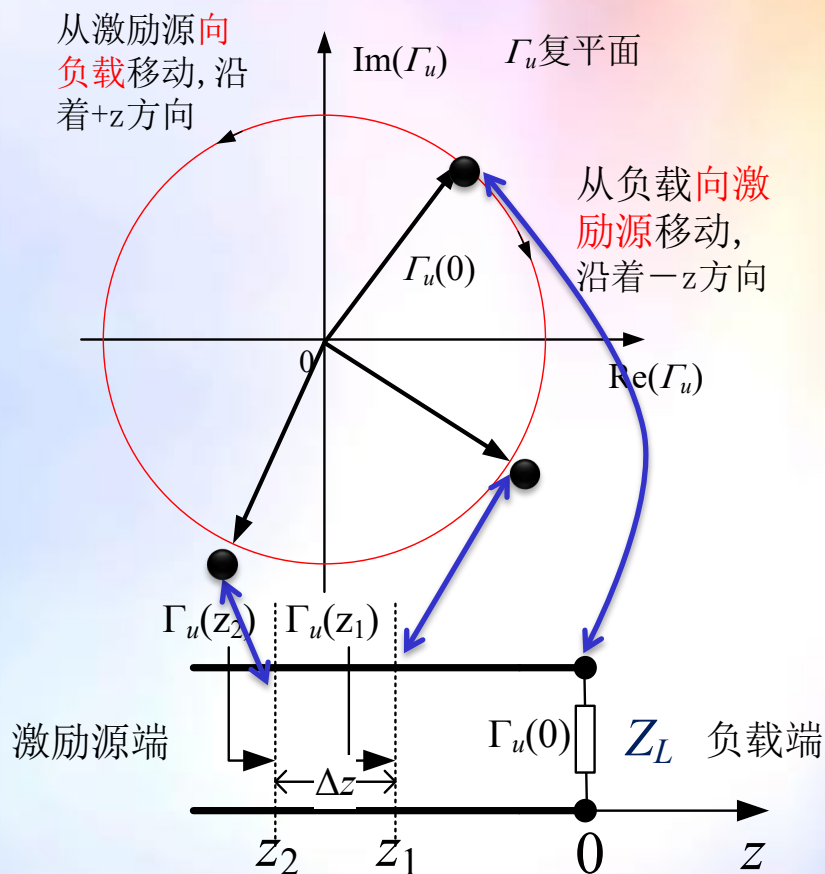
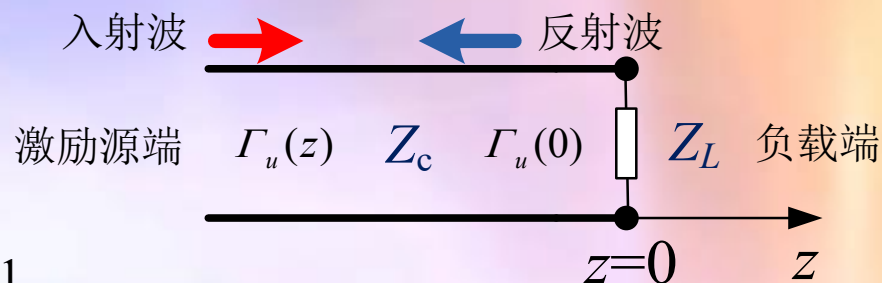
$$\Gamma_u(z) = |\Gamma_u(0)| e^{j(2kz + \varphi(0))}$$

其中

$$\Gamma_u(0) = \frac{Z_L - Z_c}{Z_L + Z_c} = |\Gamma_u(0)| e^{j\varphi(0)} \quad |\Gamma_u(0)| \leq 1$$

反射系数沿传输线的变换只是相角变化（无耗线）。在 Γ_u 复平面上，当阻抗 Z_L 不变时，沿传输线移动时 Γ_u 轨迹是以原点为圆心、半径为 $|\Gamma_u(0)|$ 的圆。

- 从负载向激励源移动，沿顺时针方向转；
- 从激励源向负载移动，沿逆时针方向转；
- Γ_u 转动角度的绝对值 $2k\Delta z = 4\pi * \Delta z / \lambda$

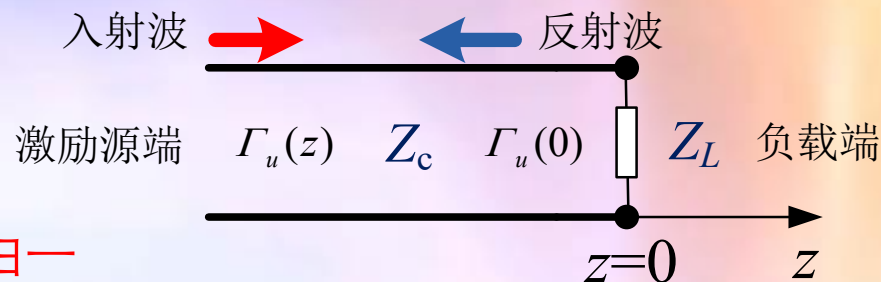


图示法求解传输线电压、电流分布

16

$$\left| \frac{U(z)}{U^i e^{-jkz}} \right| = |1 + \Gamma_u(z)| \quad \text{沿传输线归一化电压的模}$$

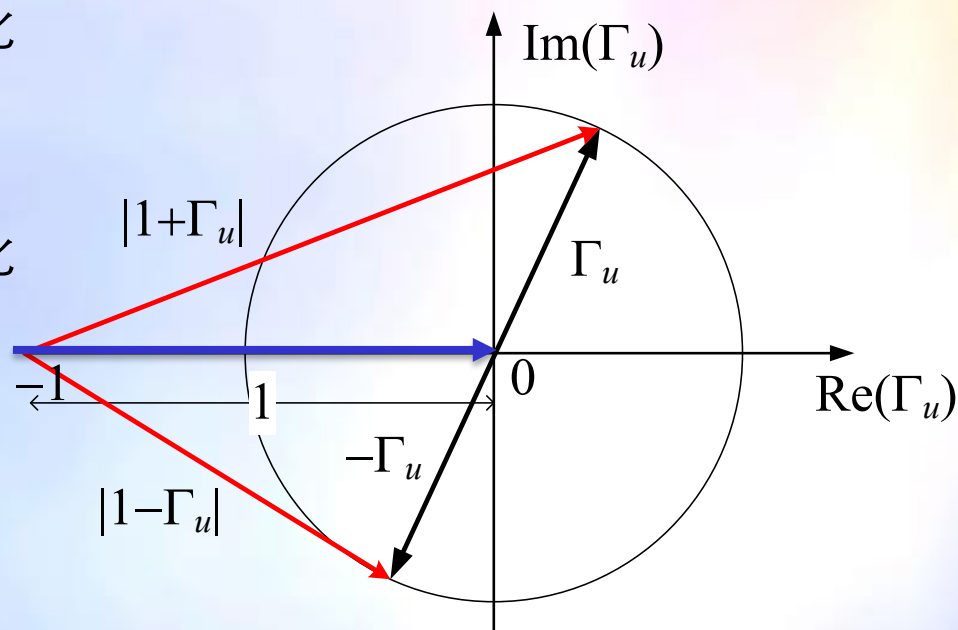
$$\left| \frac{I(z)}{U^i e^{-jkz} / Z_c} \right| = |1 - \Gamma_u(z)| \quad \text{沿传输线归一化电流的模}$$



$$\Gamma_u(z) = |\Gamma_u(0)| e^{j(2kz + \varphi(0))}$$

$|1 + \Gamma_u|$ 沿 $|\Gamma_u|$ 圆旋转就得到归一化电压沿传输线的变换

$|1 - \Gamma_u|$ 沿 $|\Gamma_u|$ 圆旋转就得到归一化电流沿传输线的变换



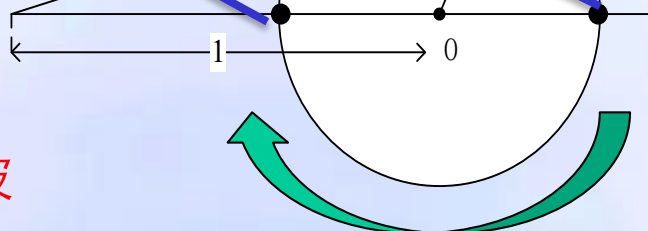
图示法求解传输线电压、电流分布

17



归一化电压

$$|1 + \Gamma_u|$$

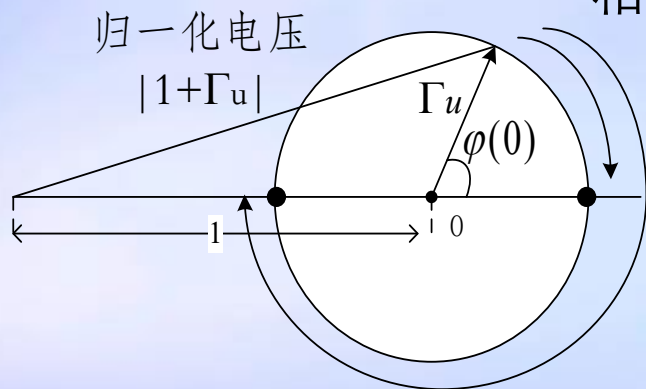


$$\Gamma_u(z) = |\Gamma_u(0)| e^{j(2kz + \varphi(0))}$$

归一化电压取得最大值 $U_{\max} = 1 + |\Gamma_u|$, 电压波腹点

归一化电压取得最小值 $U_{\min} = 1 - |\Gamma_u|$, 电压波节点

波腹到波节的距离 l : $2kl = \pi$, 即 $l = \lambda/4$;
相邻波腹/节的距离为 $\lambda/2$ 。



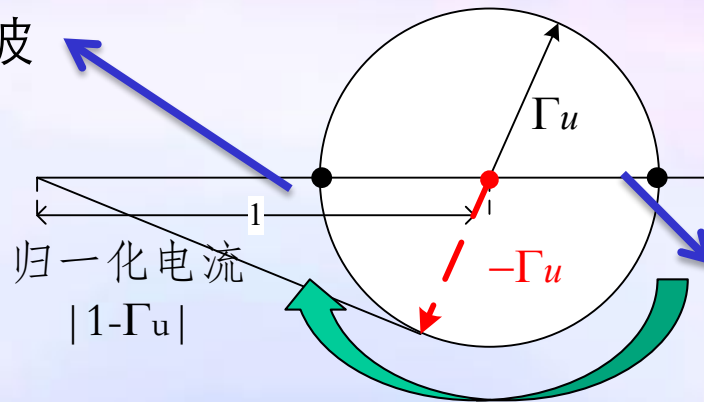
$$e^{j2kd_{\max 1}} \quad \varphi(0) = 2kd_{\max 1}, \quad d_{\max 1} = \frac{\varphi(0)}{2k} = \frac{\varphi(0)\lambda}{4\pi}$$

$$e^{j2kd_{\min 1}} \quad \varphi(0) - 2kd_{\min 1} = -\pi, \quad d_{\min 1} = \frac{\varphi(0)\lambda}{4\pi} + \frac{\lambda}{4} = d_{\max 1} + \frac{\lambda}{4}$$

图示法求解传输线电压、电流分布

用同样的图示法可以分析电流分布

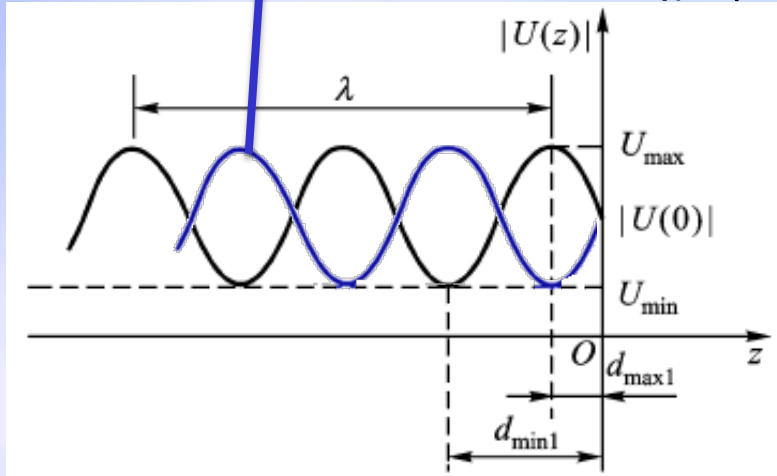
归一化电流取得最大值 $I_{\max}=1+|\Gamma_u|$ ，电流波腹点



归一化电流取得最小值 $I_{\min}=1-|\Gamma_u|$ ，电流波节点

归一化电流

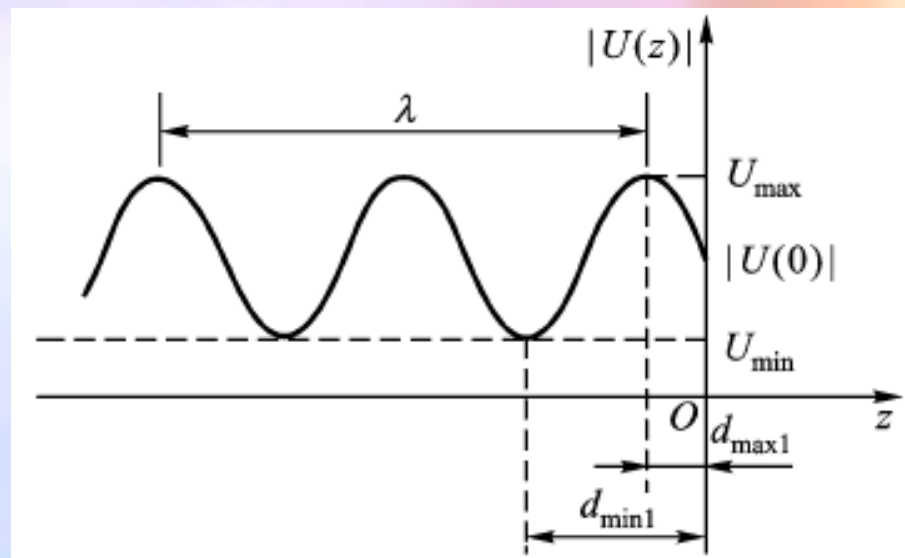
波腹到波节的距离 l : $2kl=\pi$, 即 $l=\lambda/4$;
相邻波腹/节的距离为 $\lambda/2$ 。



驻波系数 $VSWR$

$$VSWR = \rho \equiv \frac{U_{\max}}{U_{\min}} = \frac{1 + |\Gamma_u|}{1 - |\Gamma_u|} \geq 1$$

$$|\Gamma_u| = \frac{\rho - 1}{\rho + 1}$$



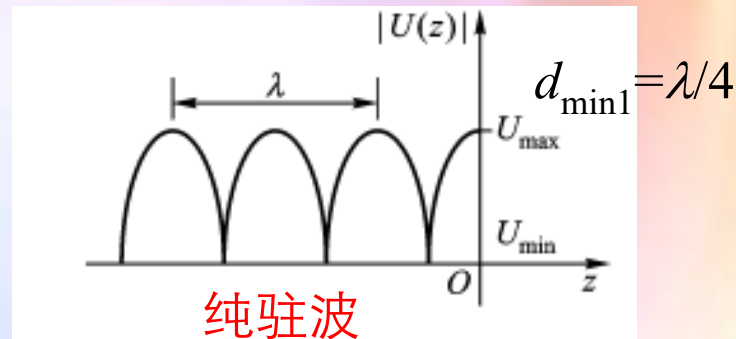
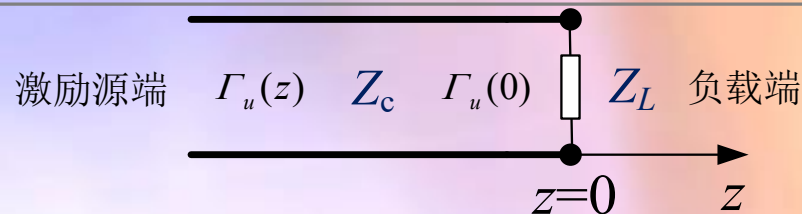
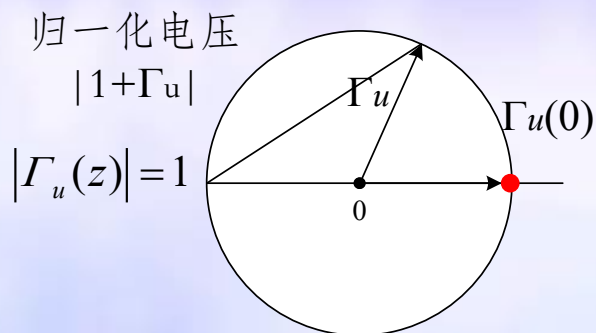
$VSWR=1$ ，无反射；

驻波系数常用于定义器件端口的反射，比如天线、滤波器的输入端口。

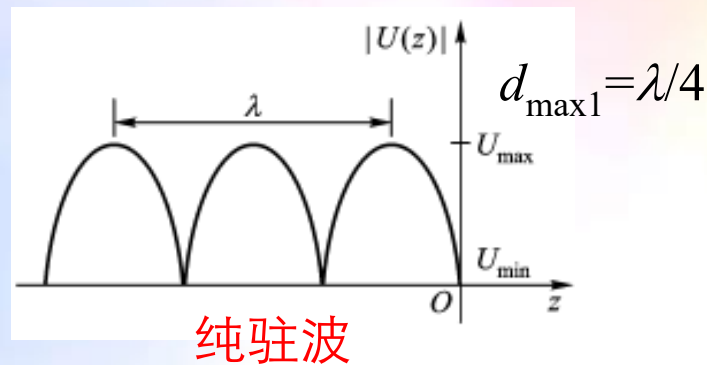
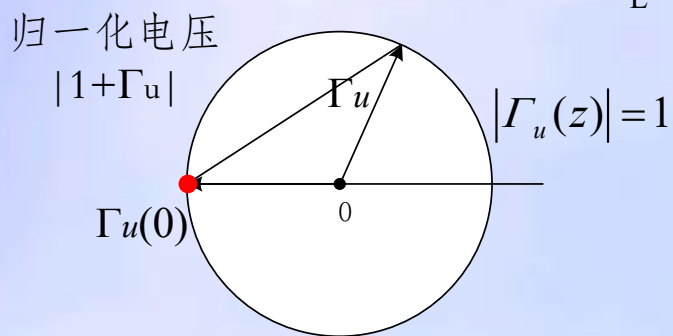
开路、短路、匹配时的电压、电流分布

20

负载开路 $Z_L = \infty$ $\Gamma_u(0) = \frac{Z_L - Z_c}{Z_L + Z_c} = 1$

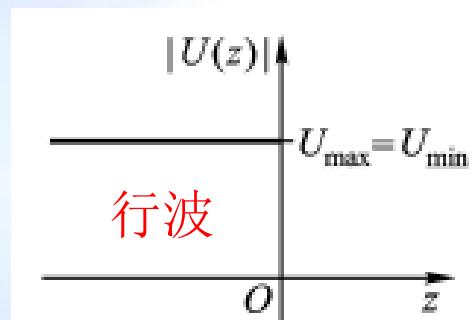
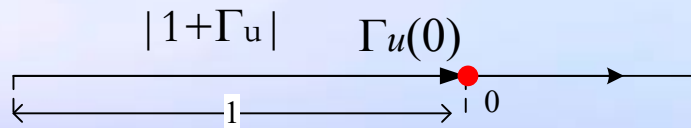


负载短路 $Z_L = 0$ $\Gamma_u(0) = \frac{Z_L - Z_c}{Z_L + Z_c} = -1$



负载匹配 $Z_L = Z_c$ $\Gamma_u(0) = \frac{Z_L - Z_c}{Z_L + Z_c} = 0$

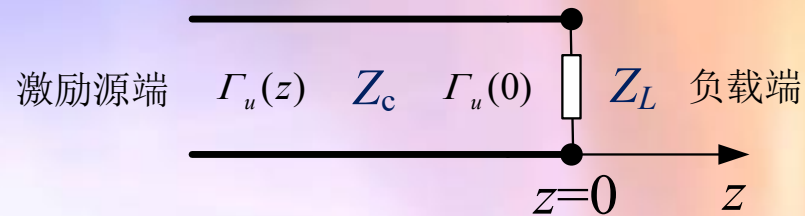
归一化电压



传输线上传输的功率

传输线上传输的功率可按下式计算

$$P(z) = \langle u(t)i(t) \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [U(z) \cdot I^*(z)]$$



$U(z)$ 、 $I(z)$ 由入射波、反射波两项构成

$$\begin{aligned} P(z) &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[U^i (1 + \Gamma_u(z)) \cdot \frac{U^{i*}}{Z_c^*} (1 - \Gamma_u^*(z)) \right] \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\frac{|U^i|^2}{Z_c^*} - \frac{|U^i|^2}{Z_c^*} |\Gamma_u(z)|^2 + \frac{|U^i|^2}{Z_c^*} (\Gamma_u(z) - \Gamma_u^*(z)) \right] \end{aligned}$$

对于**无损耗传输线**， Z_c 是实数，则上式第三项等于零。 $|\Gamma_u|$ 为常数
所以 **$P(z)=P$** ，不随位置而变

$$P = \frac{1}{2} \frac{|U^i|^2}{Z_c} - \frac{1}{2} \frac{|U^i|^2}{Z_c} |\Gamma_u|^2 = P^i - P^r$$

$$P^i = \frac{1}{2} \frac{|U^i|^2}{Z_c} \quad \frac{P^r}{P^i} = |\Gamma_u|^2$$

传输线上任一点功率等于入射波功率与反射波功率之差，而且 $\frac{P^r}{P^i} = |\Gamma_u|^2$ 。

传输线上传输的功率

对于无损传输线，通过线上任一点的传输功率是相同的。但是为了简便起见，一般都取电压腹点或节点处计算。

如取电压腹点，则得功率为

$$P = \frac{1}{2} |U_{\max}| \cdot |I_{\min}| = \frac{1}{2} \frac{|U_{\max}|^2}{Z_c \rho}$$

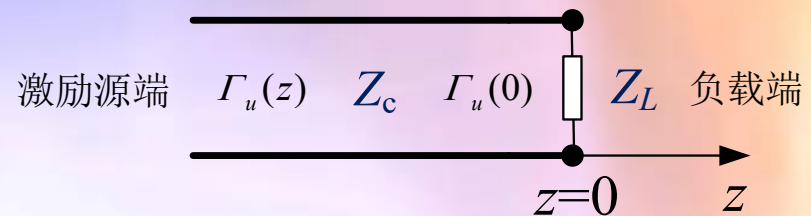
如果取电压节点，则得

$$P = \frac{1}{2} |U_{\min}| \cdot |I_{\max}| = \frac{1}{2} \frac{Z_c |I_{\max}|^2}{\rho}$$

可见，当传输线的耐压一定或能载的电流一定，驻波系数 ρ 越趋近于1，传输功率越大。

在不发生电压击穿条件下，传输线允许传输的最大功率称为传输线的**功率容量**。据此定义，传输线的功率容量为（行波时传输线能传输最大功率）

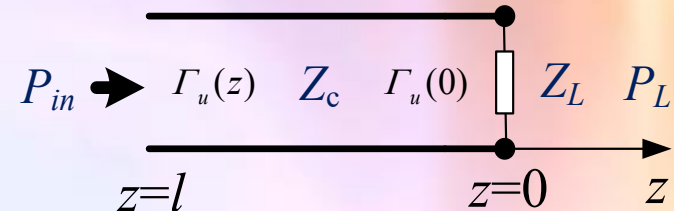
$$P_{\text{br}} = \frac{1}{2} \frac{|U_{\text{br}}|^2}{Z_c} \quad \text{式中的 } U_{\text{br}} \text{ 为线间击穿电压。}$$



传输效率

定义传输效率为传输线终端 $z=0$ 处所接负载吸收功率 P_L 与传输线入口 $z=-l$ 处的输入功率 P_{in} 之比，用 η 表示

$$\eta = \frac{P_L}{P_{in}} (\%)$$



考虑损耗后传输线上电压、电流表示式为

$$U = U^i \left(e^{-k_i z} e^{-jk_r z} + \Gamma_u(0) e^{k_i z} e^{jk_r z} \right)$$

$$I = \frac{U^i}{Z_c} \left(e^{-k_i z} e^{-jk_r z} - \Gamma_u(0) e^{k_i z} e^{jk_r z} \right)$$

$$\Gamma_u(0) = \frac{U^r}{U^i}$$

传输线任一点传输功率为

$$P(z) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(UI^*) = \frac{1}{2} \frac{|U^i|^2}{Z_c^*} \left(e^{-2k_i z} - |\Gamma_u(0)|^2 e^{2k_i z} \right)$$

传输效率

传输线任一点传输功率为
$$P(z) = \frac{1}{2} \frac{|U^i|^2}{Z_c^*} \left(e^{-2k_i z} - |\Gamma_u(0)|^2 e^{2k_i z} \right)$$

$z=0$ 处负载吸收功率为
$$P_L = P(z=0) = \frac{|U^i|^2}{2 Z_c^*} \left(1 - |\Gamma_u(0)|^2 \right)$$

$z=-l$ 处输入功率为
$$P_{in} = P(z=-l) = \frac{|U^i|^2}{2 Z_c^*} \left(e^{2k_i l} - |\Gamma_u(0)|^2 e^{-2k_i l} \right)$$

所以传输效率为
$$\eta = \frac{1 - |\Gamma_u(0)|^2}{e^{2k_i l} - |\Gamma_u(0)|^2 e^{-2k_i l}}$$

利用指数函数与双曲函数之间关系
$$\eta = \frac{1}{\operatorname{ch} 2k_i l + \frac{1}{2} \left(\rho + \frac{1}{\rho} \right) \operatorname{sh} 2k_i l}$$

假如传输线损耗很小，或传输线长度很小，满足 $k_i l \ll 1$ ，则

$\operatorname{ch} 2k_i l \approx 1$ ， $\operatorname{sh} 2k_i l \approx 2k_i l$ ，并可得出

(1) ρ 一定时， k_i 越小， l 越短， η 越高；

(2) k_i 一定时， ρ 越接近1， η 越高。

复习要点

■ 描述传输线状态量的特征量有 $(U、I)$, Γ, Z (或 Y) , $(\rho, d_{\min})$

■ 电压和电流沿传输线的变换公式。

$$\begin{bmatrix} U(z) \\ I(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(kz) & -jZ_c \sin(kz) \\ -jY_c \sin(kz) & \cos(kz) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U(0) \\ I(0) \end{bmatrix}$$

$$Z(z) = Z_c \frac{1 + \Gamma_u(z)}{1 - \Gamma_u(z)}$$

■ 反射系数沿传输线的变换公式 $\Gamma_u(z) = \Gamma_u(0)e^{j2kz}$

■ 阻抗和导纳沿传输线的变化公式

$$Z_{in}(z = -l) = Z_c \frac{Z_L + jZ_c \tan kl}{Z_c + jZ_L \tan kl} \quad Y_{in}(z = -l) = Y_c \frac{Y_L + jY_c \tan kl}{Y_c + jY_L \tan kl}$$

■ 利用图解法求传输线上的电压电流分布。

■ 传输线的传输功率和效率。

复习范围

2.2, 2.3, 需要熟记公式

作业: 2.3, 2.5(对 Z_c 归一化), 2.6, 2.9。第二章的习题比较重要, 除了作业外, 建议其它题目也多练习。

复习“复变函数”的分式线性映射: 什么是分式线性映射、保圆性?