

电磁场与电磁波

第24讲

8.3 电基本振子的辐射

8.4 磁基本振子的辐射

魏兴昌

浙江大学

weixc@zju.edu.cn

8.3 电基本振子的辐射

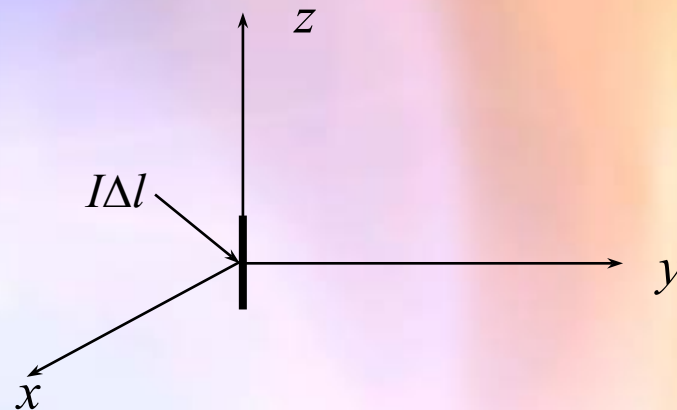
8.4 磁基本振子的辐射

电基本振子（也称赫兹电偶极子 E Dipole）

磁基本振子（也称赫兹磁偶极子 H Dipole）

众多天线都可分解为基本振子的组合。

这两类基本振子具有对偶性，即知道了电基本振子辐射的场就可对偶地写出磁基本振子辐射的场。场的对偶性。



电基本振子模型

电基本振子分析模型：一段有高频电流的短导线，

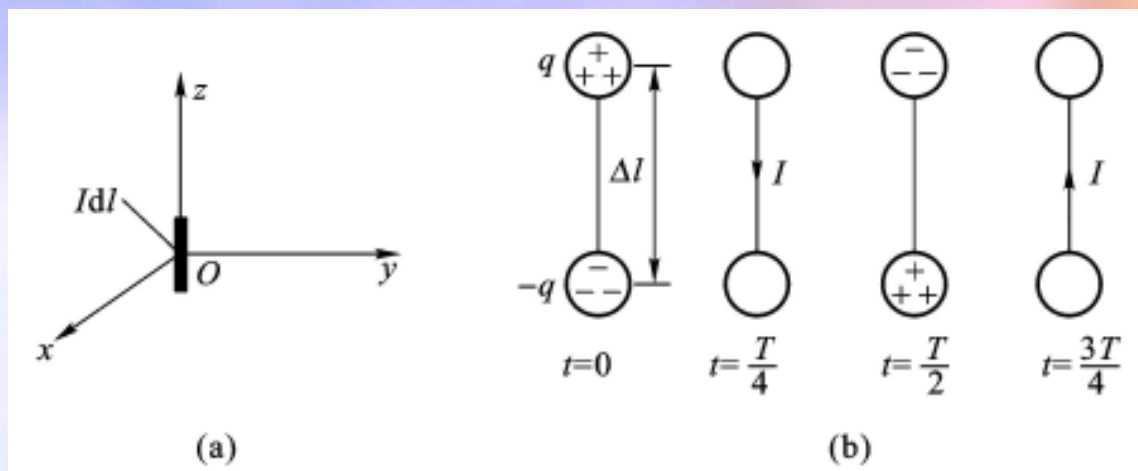
(1) 导线的直径 $d/\lambda \rightarrow 0$ ，因而可用线电流模型近似。

(2) 长度 $\Delta l/\lambda \rightarrow 0$ ， Δl 与波长相比很小。

(3) 假定导线上各点电流的振幅和相位是相同的。

实际线天线上电流是不均匀分布的。如果我们把实际线天线分成 n 段，只要 n 足够大，每段长度比波长小得多，这样每一段上电流可视为常数，就可看成是一个电基本振子。整个线天线辐射的场就是所有这些电基本振子辐射场的总和。所以电基本振子辐射场的分析是线天线工程计算的基础。

电基本振子与电偶极子等效



电基本振子模型：

第一种表述：在 Δl 长度内电流分布是与空间坐标无关的常数
 第二种表述：实际上是一个振荡偶极子。 } 两者等价

设被 Δl 分开的两个储存电荷的小槽各存储 $+q$ 与 $-q$ 电荷量， $q(t)=\cos(\omega t)$ ，构成一个电偶极子。两个小槽之间通过电流 I 交换电荷， $I=dq/dt=-\sin(\omega t)$ ， I 沿 z 等幅同相。

电偶极子的偶极矩定义为 $P = q\Delta l$

当偶极子作简谐振荡时 $\frac{\partial P}{\partial t} = j\omega P = \Delta l \frac{\partial q}{\partial t} = I\Delta l$

第一步：求电基本振子产生矢量位 $\mathbf{A}$

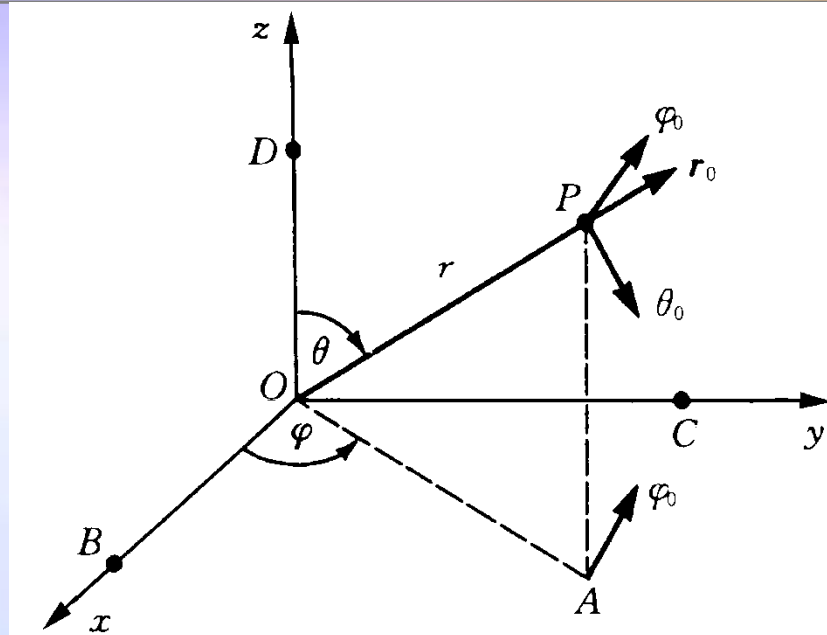
$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') e^{-jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV'$$

因为电流源所占有空间 $V' = \Delta S' \Delta l'$ ， $\Delta S'$ 为导线截面积，而 $J\Delta S' = I$ 。

$$\Delta V' \mathbf{J}(\mathbf{r}') = I(\mathbf{r}') \Delta l \mathbf{z}_0$$

把电基本振子放到球坐系的原点，偶极矩 $\mathbf{P}$ 的方向与坐标轴 z 重合。实际的电偶极子尺寸很小但不为零，理论上的电偶极子尺寸为零（是一个点源，也是电磁软件中的电偶极子），故 $\mathbf{r}'=0$ ， I 与 $\mathbf{r}'$ 无关，可以拿到积分号外。由此得到电基本振子产生的矢量位 $\mathbf{A}$ 为

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{z}_0 \frac{\mu I \Delta l e^{-jkr}}{4\pi r}$$



球坐标

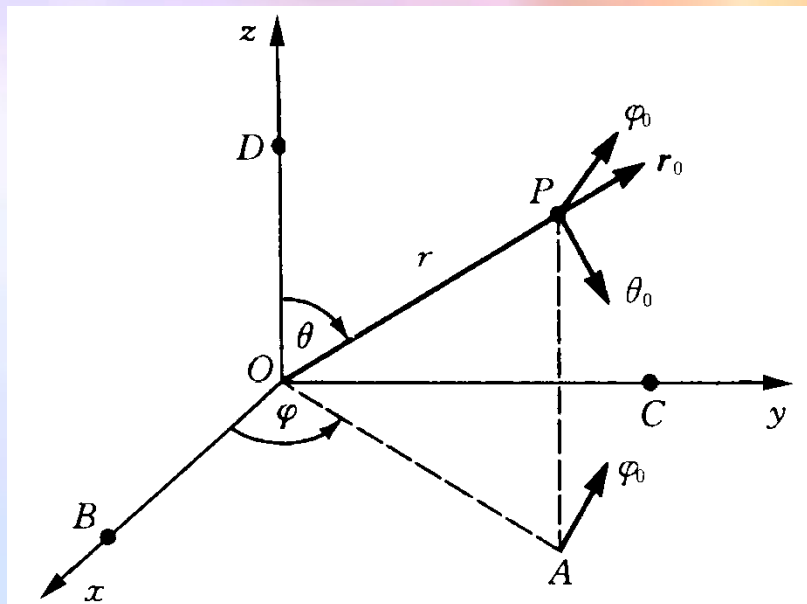
电基本振子辐射的电磁场

第二步：由矢量位 A 求 E 、 H 。 E 和 H 一般用球坐标系分量表示

$$A = z_0 \frac{\mu I \Delta l e^{-jkr}}{4\pi r} \quad z_0 = r_0 \cos \theta - \theta_0 \sin \theta$$

$$\nabla \times A = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} r_0 & r\theta_0 & r \sin \theta \varphi_0 \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ A_r & rA_\theta & r \sin \theta A_\varphi \end{vmatrix}$$

$$H = \frac{1}{\mu} \nabla \times A = \varphi_0 \frac{jkI \Delta l e^{-jkr}}{4\pi r} \left(1 + \frac{1}{jkr} \right) \sin \theta$$



球坐标

偶极子以外的区域， $J = 0$ ，故得到

$$E = \frac{1}{j\omega\epsilon} \nabla \times H = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{jkI \Delta l e^{-jkr}}{4\pi r} \left\{ r_0 \left[\frac{1}{jkr} + \frac{1}{(jkr)^2} \right] 2 \cos \theta + \theta_0 \left[1 + \frac{1}{jkr} + \frac{1}{(jkr)^2} \right] \sin \theta \right\}$$

远场区 $r \rightarrow \infty$ ，忽略 $1/r$ 的高次量

$$H = \varphi_0 \frac{jkI \Delta l e^{-jkr}}{4\pi r} \sin \theta \quad E = \theta_0 \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{jkI \Delta l e^{-jkr}}{4\pi r} \sin \theta$$

由矢量势 A 求远区场的简便方法

7

$$\mathbf{E} = -j\omega\mathbf{A} - \nabla\Phi$$

对于一般的辐射体

- 在远场区可以忽略高阶的 $1/r^n$, 得到
 - ◆ $\nabla\Phi$ 只含有 E_r 分量;
 - ◆ $j\omega\mathbf{A}$ 一般含有三个 $\mathbf{E}$ 分量: E_r, E_θ, E_ϕ .
- 远场区为TEM波 ($\mathbf{E}$ 只能有 E_θ, E_ϕ 分量), E_r 为零. 这表明 $\nabla\phi$ 和 $j\omega\mathbf{A}$ 贡献的 E_r 分量必定相互抵消
- 所以当计算远场 $\mathbf{E}$ 时, 我们只需考虑 $j\omega\mathbf{A}$ 的贡献 – 这将简化由 $\mathbf{A}$ 求远场区 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{H}$ 的计算

$$\left. \begin{array}{l} E_r \cong 0 \\ E_\theta \cong -j\omega A_\theta \\ E_\phi \cong -j\omega A_\phi \end{array} \right\} \xrightarrow[\text{TEM波}]{\mathbf{H} = \frac{\hat{\mathbf{r}}}{\eta} \times \mathbf{E} = -j\frac{\omega}{\eta} \hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{A}} \left. \begin{array}{l} H_r \cong 0 \\ H_\theta \cong j\frac{\omega}{\eta} A_\phi = -\frac{E_\phi}{\eta} \\ H_\phi \cong -j\frac{\omega}{\eta} A_\theta = +\frac{E_\theta}{\eta} \end{array} \right\}$$

在远场区

$$\mathbf{H} = \varphi_0 \frac{jkI\Delta l e^{-jkr}}{4\pi r} \sin \theta$$

$$\mathbf{E} = \theta_0 \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{jkI\Delta l e^{-jkr}}{4\pi r} \sin \theta$$

电场、磁场和波传播方向三者相互垂直，TEM波；
电场和磁场幅度之比为本征阻抗

媒质中

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

大气中

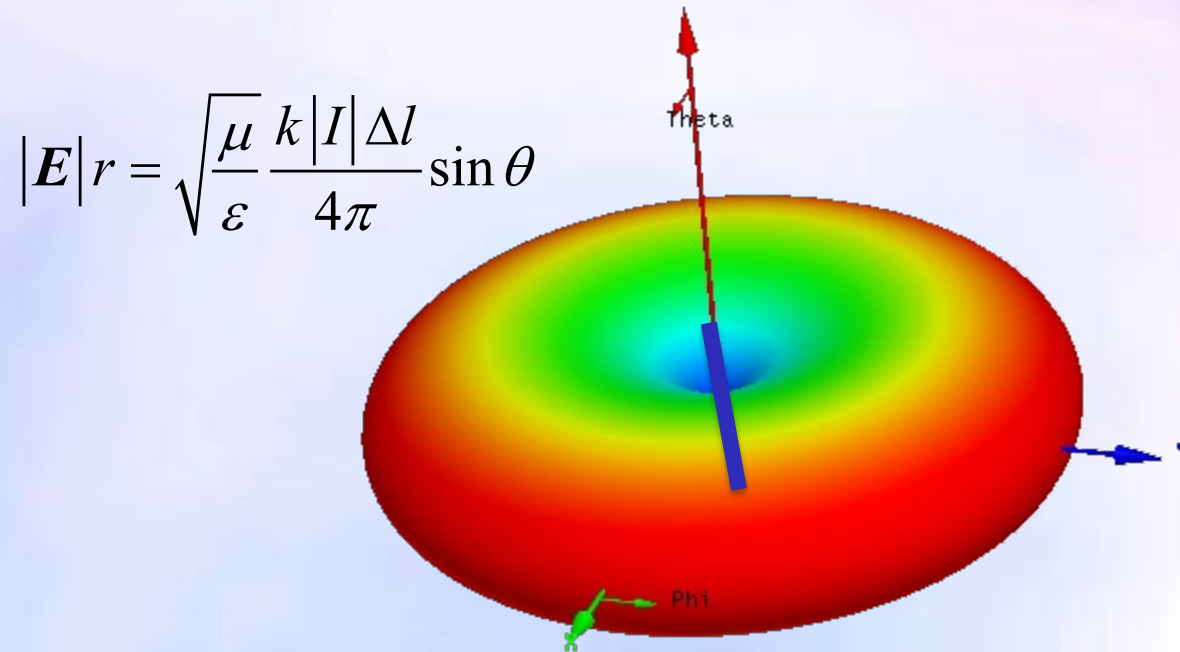
$$\eta \approx \eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi \approx 377\Omega$$

电基本振子产生的场按 $1/r$ 衰减，均匀平面波场是一常数。

电基本振子产生的场的场强是 θ 的函数，均匀平面波场强是常数。

电基本振子产生的场等相位面是球面，均匀平面波场等相位面是一平面。

电基本振子辐射场在半径方向波的速度为 $v=\omega/k$ ，而均匀平面波在一固定方向速度为 $v=\omega/k$ 。



Omni-directional (全方向性)

电基本振子辐射场的特征—方向性函数与方向图

10

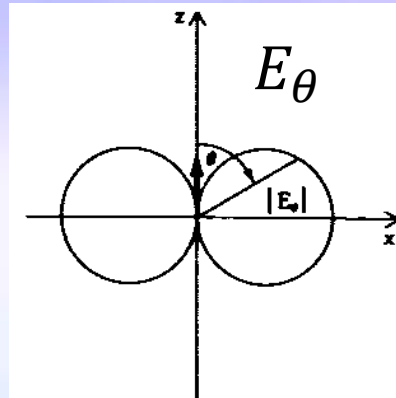
由电基本振子远区场

$$\mathbf{E} = \theta_0 \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{jkI\Delta l e^{-jkr}}{4\pi r} \sin \theta$$

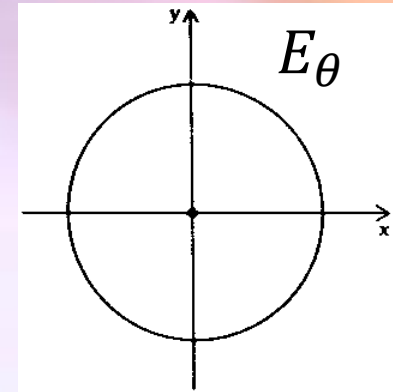
$$|E_\theta| = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{k|I|\Delta l}{4\pi r} |\sin \theta|$$

功率流<S>

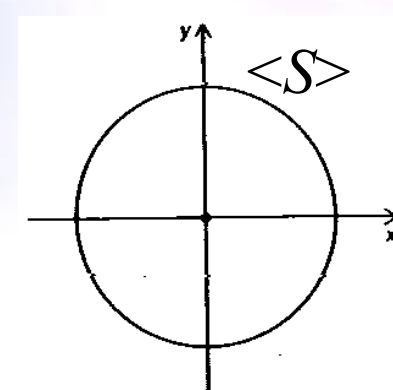
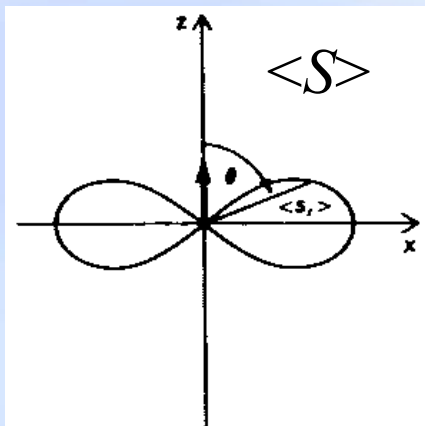
$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) = r_0 \frac{1}{2} \frac{|E_\theta|^2}{\eta_0} = r_0 \frac{\eta_0}{2} \left| \frac{k|I|\Delta l}{4\pi r} \right|^2 \sin^2 \theta$$



x—z平面



x—y平面



电基本振子辐射场的特征—方向系数

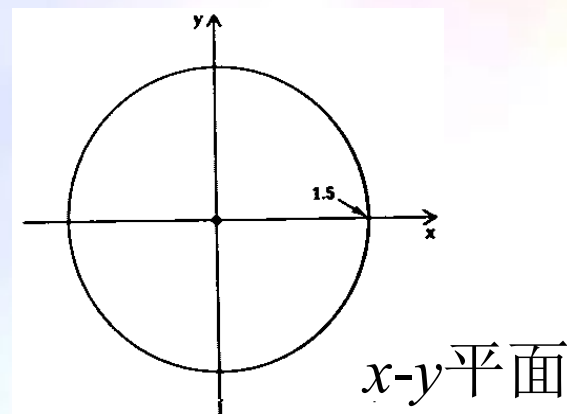
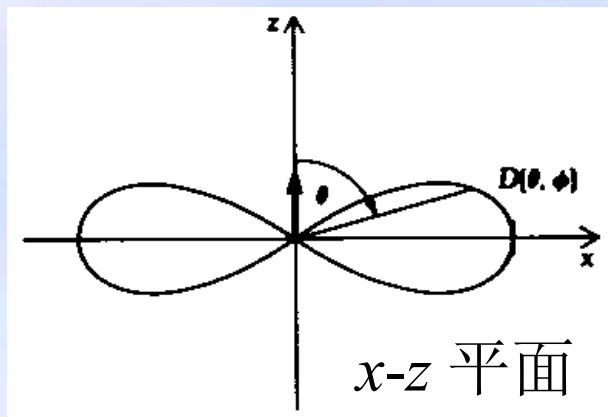
功率流密度 $\langle S \rangle = r_0 \frac{\eta_0}{2} \left(\frac{k |I| \Delta l}{4\pi r} \right)^2 \sin^2 \theta$

辐射的总功率 $P = \oint_{\text{球面}} \langle S \rangle dA = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \langle S \rangle r^2 \sin \theta d\theta$

$$= \frac{\eta_0}{2} \left| \frac{k I \Delta l}{4\pi} \right|^2 2\pi \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{4\pi}{3} \eta_0 \left| \frac{k I \Delta l}{4\pi} \right|^2$$

天线的方向系数

$$D(\theta, \varphi) = \frac{\frac{\langle S \rangle dA}{d\Omega}}{P / 4\pi} = \frac{\langle S \rangle r^2}{P / 4\pi} = \frac{3}{2} \sin^2 \theta \quad d\Omega = \frac{dA}{r^2}$$



在 $\theta = \pi/2$ 方向，方向系数为 1.5； $\theta = 0$ ，方向系数等于零。

电基本振子辐射场的特征—辐射电阻

定义天线辐射电阻 R_{rad} 为

$$P = \frac{1}{2} I^2 R_{\text{rad}}$$

$$P = \frac{4\pi}{3} \eta_0 \left| \frac{kI\Delta l}{4\pi} \right|^2$$

由此可得

$$R_{\text{rad}} = \frac{2P}{I^2} = \frac{\frac{4\pi}{3} \eta_0 \left| \frac{kI\Delta l}{4\pi} \right|^2}{I^2} = \frac{4\pi}{3} \eta_0 \left| \frac{k\Delta l}{4\pi} \right|^2 = \frac{\eta_0}{3} \pi (\Delta l)^2$$

在自由空间, $\eta_0 = 120\pi$, 代入上式得到

$$R_{\text{rad}} = 80\pi^2 \frac{(\Delta l)^2}{\lambda^2}$$

非常小

电基本振子辐射场的特征—有效面积

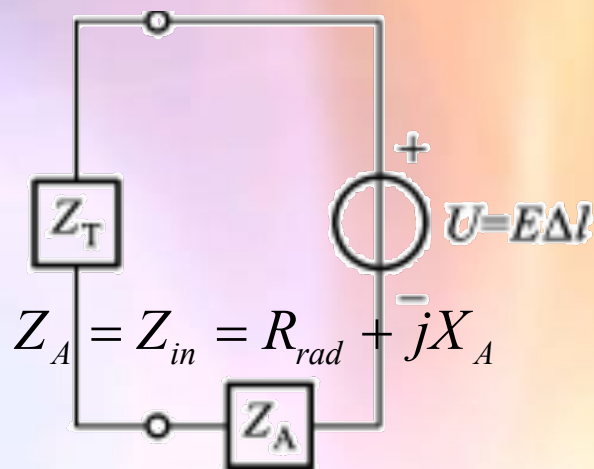
有效面积 A_e 定义为 $P_R = A_e * P_{\text{波前}}$

P_R 为接收功率；

$P_{\text{波前}}$ 为入射电磁波（假定为TEM波）到达接收天线处的功率密度。

A_e 大小与入射波的入射方向、极化、负载有关，工程上一般取最大的 A_e 。

在长度为 Δl 的天线上感应的最大电压为 $U = E\Delta l$ 。



接收天线的模型

天线与负载阻抗共轭匹配时天线接收功率最大

$$Z_T = R_{\text{rad}} - jX_A = Z_A^* \quad \text{无耗天线}$$

$$\text{此时负载吸收功率} \quad P_R = \frac{U^2}{4R_{\text{rad}}} = \frac{|E\Delta l|^2}{4R_{\text{rad}}} = A_e P_{\text{波前}} = A_e \frac{E^2}{\sqrt{\mu_0 / \epsilon_0}}$$

$$R_{\text{rad}} = \frac{\frac{2}{3} \pi (\Delta l)^2 \sqrt{\mu_0 / \epsilon_0}}{\lambda^2}$$

$$A_e = \frac{\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} (\Delta l)^2 \lambda^2}{4 \left[\frac{2}{3} \pi (\Delta l)^2 \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \right]} = \frac{3\lambda^2}{8\pi}$$

$$A_e = \frac{3\lambda^2}{8\pi}$$

注意：工程上一般不用有效面积衡量天线

对于无耗偶极子， $G=D=1.5$ ，故得到

$$\frac{G}{A_e} = \frac{3/2}{(3/8\pi)\lambda^2} = \frac{4\pi}{\lambda^2}$$

所以

$$D = \frac{4\pi A_e}{\lambda^2} \quad \text{或}$$

$$G = \frac{4\pi A_e}{\lambda^2}$$

1. 在天线的极化与入射波极化相同（极化匹配）、天线负载共轭匹配时，上式对于所有天线都是成立的；
2. 天线增益 G 与天线有效面积 A_e 是等价的，知道其中一个量即可得出另一个量；
3. 天线面积越大，有效面积也越大，但天线的增益与天线实际面积的关系并非如此简单，因为天线增益还与波长有关。

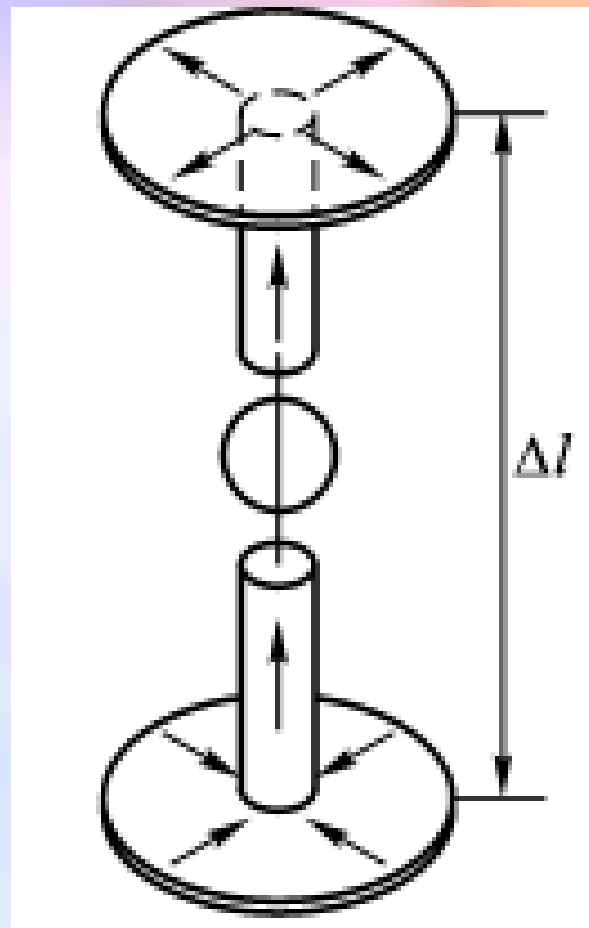
电容平板天线

严格地说有电流通过的一段很短的导线不能视作电流均匀分布的电基本振子，因为在短导线的两端电流必须降到零。

对于图示的电容平板天线，在连接两电容平板的短线段上，电流几乎均匀，可视为常数。

在上下两块平板上，电流都沿半径方向流动，方向却相反，一块板上电流指向圆心，另一块板上电流离开圆心。所以上下两块板在远区辐射场相互抵消。

这就是说对于电容平板天线，远区辐射场主要由连接电容板的短线段上流过的电流产生，而短线段上的电流可视为均匀分布。所以电容平板天线可视为电基本振子。



电容平板天线

- 平行板当作储存电荷的小槽，因此连接平板的短线上的电流为常数；
- 等效为终端接电容的传输线。

8.3 电基本振子的辐射

8.4 磁基本振子的辐射

磁基本振子

磁基本振子就是理想的磁偶极子。

任何载流细导线回路 L 都可看成一个磁基本振子。

磁基本振子模型：

是一个在 x - y 平面上半径为 a 的细导线小圆环。

导线的线径可忽略，导线上电流可用线电流近似。

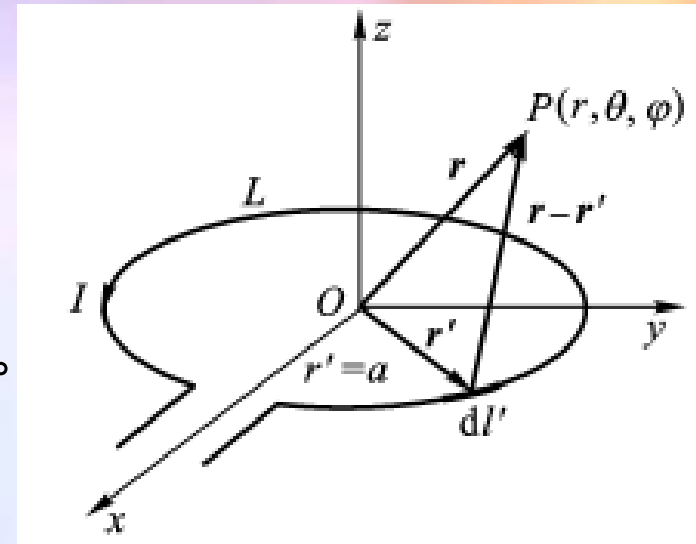
$a \ll \lambda$ ，圆环上电流的振幅和相位处处相等。

圆环上载有高频时谐电流， $i = I_m \cos(\omega t + \varphi)$

故其复数表示是， $I = I_m e^{j\varphi}$ 。

该磁基本振子的偶极矩定义为 $\mathbf{M} = I\mathbf{S} = I\mathbf{S}z_0$

式中， I 是复数表示的电流， $\mathbf{S}$ 是回路 L 的有向面积，如果右手四指与电流方向一致，大拇指方向即 $\mathbf{S}$ 的方向。在图中，因为 $\mathbf{S}$ 在 x - y 平面，且逆时针转，故 $\mathbf{S}$ 的方向就是坐标轴 z 的正方向 z_0 。



磁基本振子

磁基本振子的偶极矩 $\mathbf{M}$ 产生的矢量位 $\mathbf{A}$

18

第一步，求磁基本振子产生的矢量位 $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') e^{-jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV'$$

$\mathbf{J}dV$ 简化为 $I d\mathbf{l}'$,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu I}{4\pi} \oint_L \frac{e^{jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d\mathbf{l}' \quad \text{\textit{l}'随位置变化}$$

$$\mathbf{r}' = a\boldsymbol{\rho}'_0 = a(\mathbf{x}_0 \cos \varphi' + \mathbf{y}_0 \sin \varphi')$$

$$d\mathbf{l}' = d\mathbf{r}' = \boldsymbol{\varphi}_0' a d\varphi' = a(-\mathbf{x}_0 \sin \varphi' + \mathbf{y}_0 \cos \varphi') d\varphi'$$

$$\oint_L d\mathbf{l}' = 0 \quad a/\lambda \ll 1$$

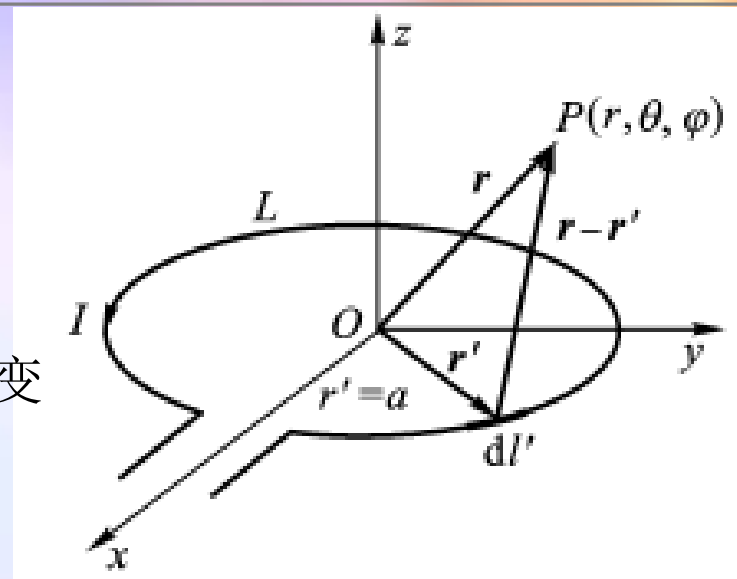
最后得到

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\varphi}_0 \frac{\mu IS}{4\pi} \left(\mathbf{j}k + \frac{1}{r} \right) \frac{e^{-jkr}}{r} \sin \theta$$

考虑到关系式 $\mathbf{z}_0 \times \mathbf{r}_0 = \boldsymbol{\varphi}_0 \sin \theta$

改写 $\mathbf{A}$ 的一般表达式

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1 + jkr}{4\pi r^2} e^{-jkr} \mathbf{M} \times \mathbf{r}$$



磁基本振子

$$S = \pi a^2$$

$$\mathbf{M} = IS\mathbf{z}_0$$

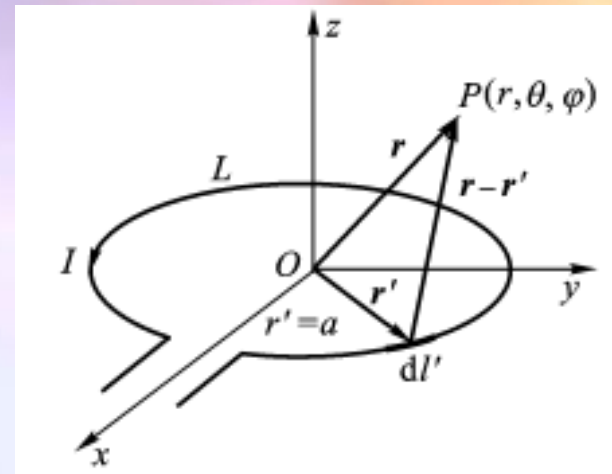
由磁偶极子的矢量位 A 求 H 和 E

第二步：由 A 求 E 和 H

$$A(\mathbf{r}) = \frac{1 + jkr}{4\pi r^2} e^{-jkr} \mathbf{M} \times \mathbf{r}$$

$$\mathbf{H} = \frac{\nabla \times \mathbf{A}}{\mu} = \nabla \times \left[\frac{IS}{4\pi} \left(jk + \frac{1}{r} \right) \frac{e^{-jkr}}{r} \sin \theta \varphi_0 \right]$$

$$\mathbf{H} = -\frac{ISk^2}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} \left\{ \mathbf{r}_0 \left[\frac{1}{jkr} + \frac{1}{(jkr)^2} \right] 2 \cos \theta + \theta_0 \left[1 + \frac{1}{jkr} + \frac{1}{(jkr)^2} \right] \sin \theta \right\}$$



因为小电流环上的电流处处等幅同相，环本身又构成闭合回路，不会造成电荷的宏观堆积，故小电流环产生的标量位 $\Phi \equiv 0$ ，

故由 $\mathbf{E} = -j\omega \mathbf{A} - \nabla \Phi = -j\omega \mathbf{A}$ ，可得到电场强度

$$\mathbf{E} = \varphi_0 \eta \frac{ISk^2}{4\pi} \left(1 + \frac{1}{jkr} \right) \frac{e^{-jkr}}{r} \sin \theta$$

电的量和磁的量具有对偶性

电型源

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H} \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + j\omega\varepsilon\mathbf{E} \\ \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho / \varepsilon \\ \nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{J} = -j\omega\rho \end{cases}$$

磁型源

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{H} = j\omega\varepsilon\mathbf{E} \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\mathbf{J}_m - j\omega\mu\mathbf{H} \\ \nabla \cdot \mathbf{H} = \rho_m / \mu \\ \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{J}_m = -j\omega\rho_m \end{cases}$$

这两组方程式之间存在着明显的对应关系，如果将上两组方程式中的所有场量和源量作如下代换

$$\mathbf{E} \Rightarrow \mathbf{H}$$

$$\mathbf{H} \Rightarrow -\mathbf{E}$$

$$\varepsilon \Rightarrow \mu$$

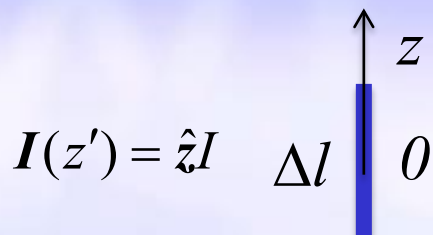
$$\mu \Rightarrow \varepsilon$$

$$\rho \Rightarrow \rho_m$$

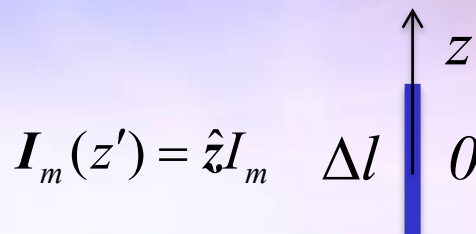
$$\mathbf{J} \Rightarrow \mathbf{J}_m$$

电型源方程变为磁型源方程，而磁型源方程则变为电型源方程。电型源方程和磁型源方程式的这种对应形式称为二重性或**对偶性**。

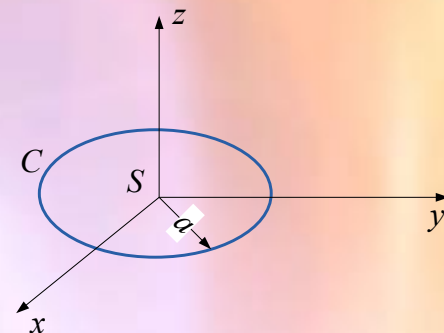
电偶极子与磁偶极子的对偶性



电偶极子



磁偶极子



$$\begin{cases} E_r = \eta \frac{I \Delta l}{2\pi r^2} \cos \theta \left[1 + \frac{1}{jkr} \right] e^{-jkr} \\ E_\theta = j\eta \frac{kI \Delta l}{4\pi r} \sin \theta \left[1 + \frac{1}{jkr} - \frac{1}{(kr)^2} \right] e^{-jkr} \\ H_\phi = j \frac{kI \Delta l}{4\pi r} \sin \theta \left[1 + \frac{1}{jkr} \right] e^{-jkr} \\ E_\phi = H_r = H_\theta = 0 \end{cases} \xrightarrow{\begin{matrix} E \rightarrow H \\ H \rightarrow -E \\ I \rightarrow \mu I_m \\ \eta \rightarrow \frac{1}{\eta} \end{matrix}} \begin{cases} H_r = \frac{\mu I_m \Delta l}{\eta 2\pi r^2} \cos \theta \left[1 + \frac{1}{jkr} \right] e^{-jkr} \\ H_\theta = j \frac{k\mu I_m \Delta l}{\eta 4\pi r} \sin \theta \left[1 + \frac{1}{jkr} - \frac{1}{(kr)^2} \right] e^{-jkr} \\ E_\phi = -j \frac{k\mu I_m \Delta l}{4\pi r} \sin \theta \left[1 + \frac{1}{jkr} \right] e^{-jkr} \\ H_\phi = E_r = E_\theta = 0 \end{cases}$$

之前直接推导得到的电流环辐射公式

$I_m \Delta l = j\omega IS$

电基本振子与磁基本振子这一对偶关系是电磁对偶性的具体例子。如果磁矩定义为 $\mathbf{M} = \mu I \mathbf{S} = \mu I S \mathbf{z}_0$ ，则就用 $I \rightarrow I_m$ 。

复习要点

- 电基本振子、磁基本振子是最基本的单元辐射天线，任何复杂天线都可看成电基本振子与磁基本振子的组合。根据电和磁的对偶原理，由电基本振子的辐射特性可对偶地得出磁基本振子的辐射特性。
- 电基本振子辐射的场在远区电场只有 θ 分量，磁场只有 ϕ 分量，其辐射功率流在电矩 $\mathbf{p}$ 的方向为零，与 $\mathbf{p}$ 垂直的方向辐射最强，电基本振子的增益、方向性、有效面积、辐射电阻、输入阻抗等分析结果要记牢。

复习范围

8.3, 8.4