

电磁场与电磁波

作业：7.5，7.6，7.9

第21讲

第七章 谐振器

7.1 结构特点及其等效电路

7.2 谐振器的特征参数

7.3 空腔谐振器

魏兴昌

浙江大学

weixc@zju.edu.cn

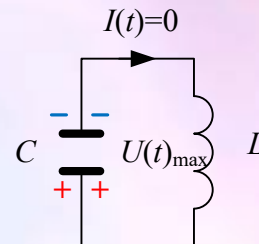
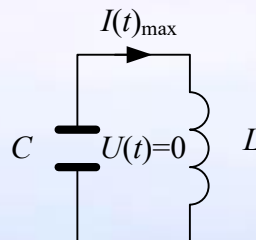
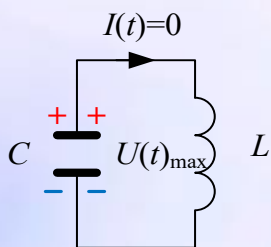
7.1 结构特点及其等效电路

7.2 谐振器的特征参数

7.3 空腔谐振器

谐振器是一种具有**储能**和**频率选择**特性的元件。

从电路的角度理解谐振，与低频 LC 电路类似。



1. 电容器刚开始放电
电场储能最大，磁场
储能为零

2. 电容器放完电
磁场储能最大，电
场储能为零

3. 电容器冲完电
电场储能最大，磁
场储能为零

从能量的角度理解电磁谐振：电场储能和磁场储能最大值相等，两者随时间变化相互转换。

从电磁场的角度理解电磁谐振

电磁场不仅在横向而且在纵向都受到限制，场沿三个坐标轴方向都呈驻波分布。

必要条件：三个方向的边界上都全反射

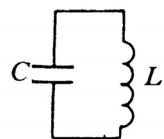
充分条件：每个方向来回反射一次相移为 $2n\pi$ ，**横向谐振扩展到三维**

如何形成全反射界面？

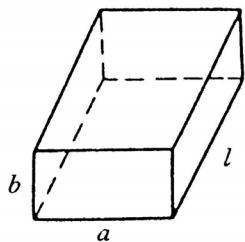
1. 完纯导体（短路）
2. 介质－介质交界面，密媒质到疏媒质， $\theta > \theta_c$ 。
3. 传输线开路、短路、端接电容、端接电感
4. 工作于周期结构的禁带
5. 多层膜系统

谐振器类型

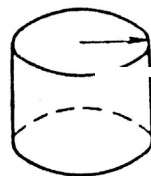
5



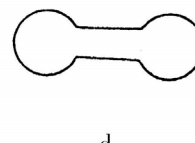
LC谐振回路



矩形空腔谐振器



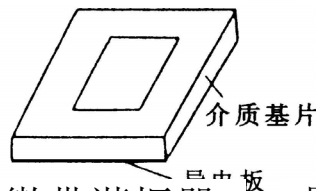
圆柱空腔谐振器



环形谐振器



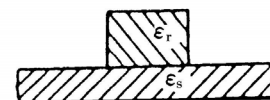
同轴线谐振器



微带谐振器



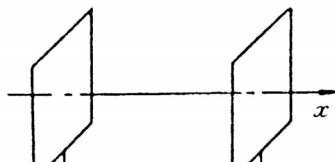
圆柱介质谐振器



屏蔽介质谐振器



光纤谐振器



法布里-帕罗谐振器

7.1 结构特点及其等效电路

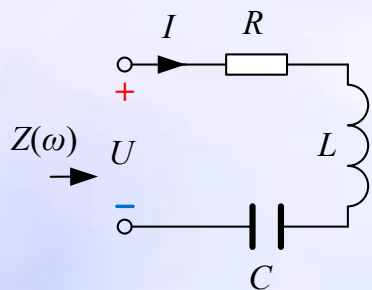
7.2 谐振器的特征参数

- 谐振频率
- 品质因数
- 3dB带宽

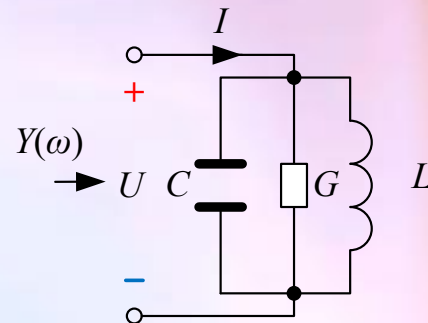
7.3 空腔谐振器

LC谐振回路谐振频率

7



串联RLC谐振电路



并联GLC谐振电路

输入阻抗 $Z(\omega) = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}$

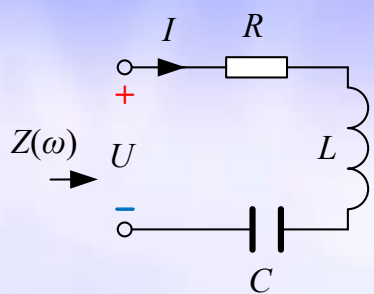
当 $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ 时, $|Z(\omega)|_{\min} = |Z(\omega_0)| = R$

输入导纳 $Y(\omega) = G + j\omega C + \frac{1}{j\omega L}$

当 $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ 时, $|Y(\omega)|_{\min} = |Y(\omega_0)| = G$

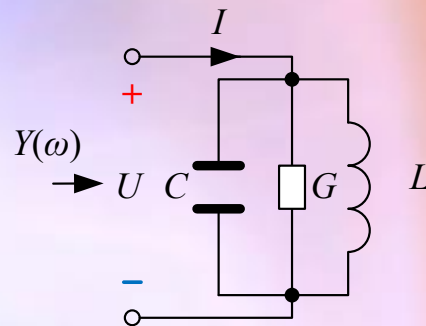
ω_0 称为谐振频率

LC谐振回路阻抗和导纳



串联RLC谐振电路

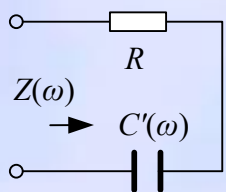
微波谐振器可以等效为串联或者并联谐振。如何从其阻抗/导纳的虚部变化判断微是串联还是并联谐振？



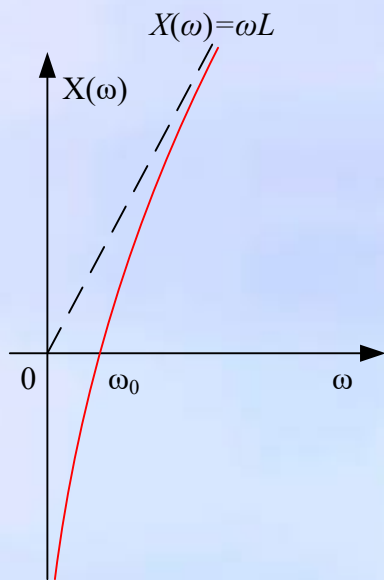
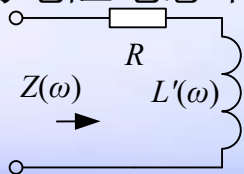
并联GLC谐振电路

输入阻抗 $Z(\omega) = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + jX(\omega)$ 输入导纳 $Y(\omega) = G + j\omega C + \frac{1}{j\omega L} = G + jB(\omega)$

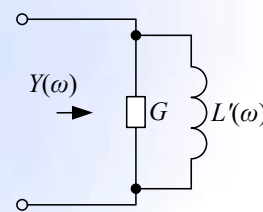
当 $\omega < \omega_0$, $X(\omega) < 0$ 且随着 ω 增加而增加, $Z(\omega)$ 等效为电阻电容串联



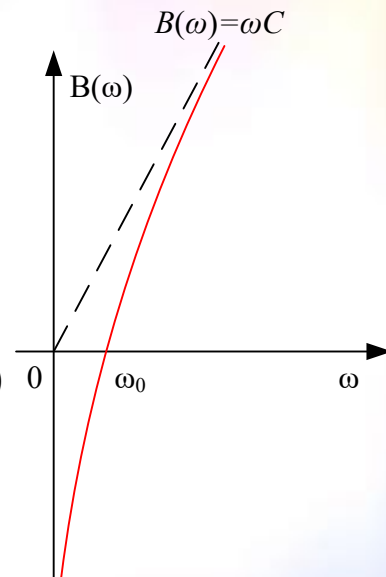
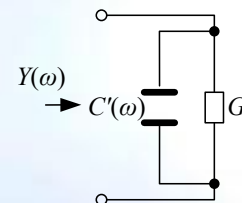
当 $\omega > \omega_0$, $X(\omega) > 0$ 且随着 ω 增加而增加, $Z(\omega)$ 等效为电阻电感串联



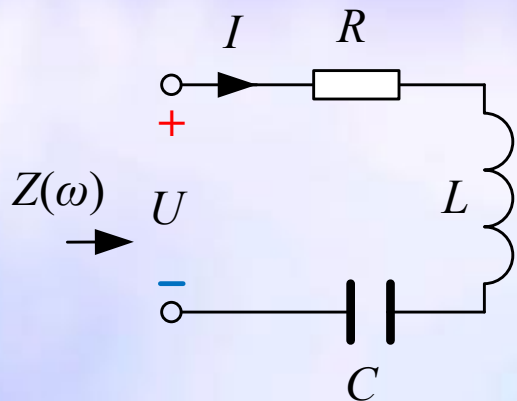
当 $\omega < \omega_0$, $B(\omega) < 0$ 且随着 ω 增加而增加, $Y(\omega)$ 等效为



当 $\omega > \omega_0$, $B(\omega) > 0$ 且随着 ω 增加而增加, $Y(\omega)$ 等效为



1. 恒压源作用下的串联LCR回路



品质因数：在谐振频率时

$$Q_0 = 2\pi \frac{\text{谐振电路储能}}{\text{一周期损耗的功率}}$$

$$= 2\pi \frac{\frac{1}{2}LI^2}{\frac{1}{2}I^2RT} = \frac{\omega_0 L}{R}$$

$$Z(\omega) = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R \left[1 + jQ_0 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right] = R \left(1 + jQ_0 \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega\omega_0} \right)$$

令 Z 的实部和虚部的绝对值相等，求此时的 $\omega_{1,2}$

$$Q_0 \frac{\omega_{1,2}^2 - \omega_0^2}{\omega_{1,2}\omega_0} = \pm 1 \quad \Rightarrow \quad \omega_{1,2}^2 \pm \frac{\omega_{1,2}\omega_0}{Q_0} - \omega_0^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_{1,2} = \frac{\pm \frac{\omega_0}{Q_0} \pm \sqrt{\left(\frac{\omega_0}{Q_0}\right)^2 + 4\omega_0^2}}{2}$$

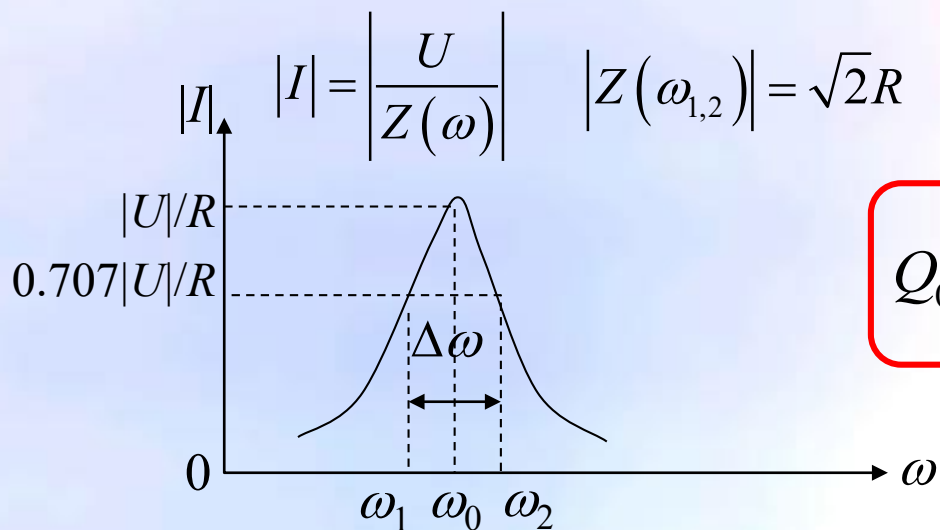
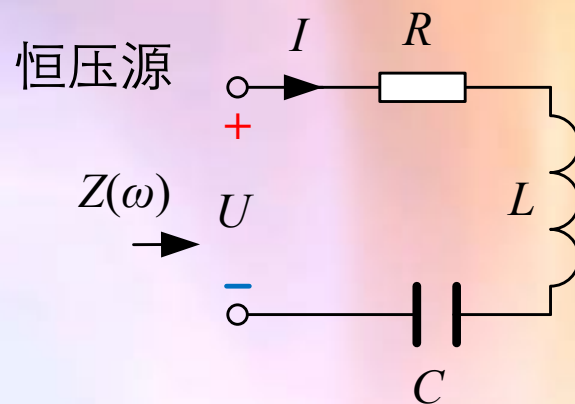
考虑到 $\omega_{1,2} > 0$ ，得到

$$\omega_{1,2} = \frac{\pm \frac{\omega_0}{Q_0} + \sqrt{\left(\frac{\omega_0}{Q_0}\right)^2 + 4\omega_0^2}}{2}$$

$$\omega_{1,2} = \frac{\pm \frac{\omega_0}{Q_0} + \sqrt{\left(\frac{\omega_0}{Q_0}\right)^2 + 4\omega_0^2}}{2}$$

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q_0}$$

定义两个 $\omega_{1,2}$ 之差为 $\Delta\omega$

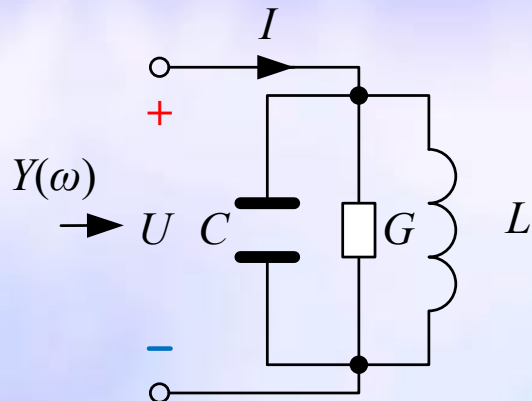


$$Q_0 = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$$

对所有滤波器的通用结论：
带宽与Q值成反比

$\Delta\omega$ 称为**3dB带宽**，因为 $20\log|I(\omega_0)/I(\omega_{1/2})|=3\text{dB}$

2. 恒流源作用下的并联LCG回路



品质因数：在谐振频率上

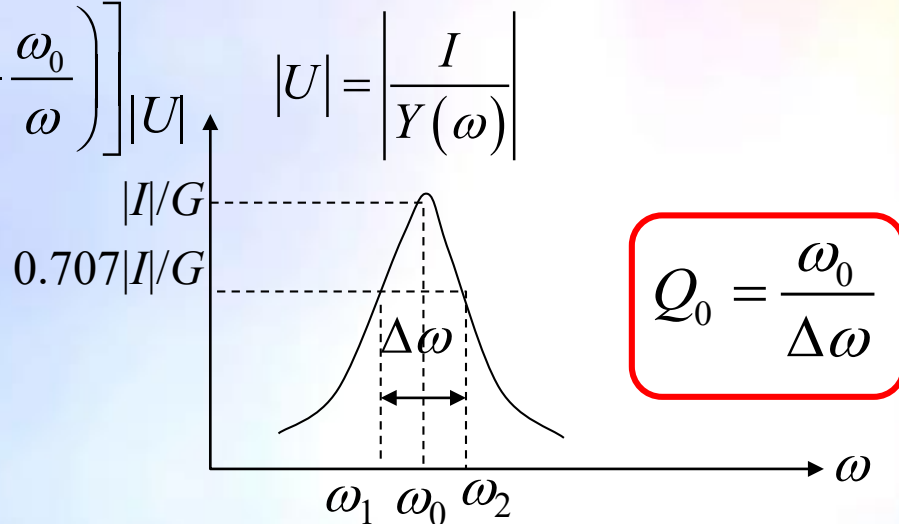
$$Q_0 = 2\pi \frac{\text{谐振电路储能}}{\text{一周周期损耗的功率}}$$

$$= 2\pi \frac{\frac{1}{2}CV^2}{\frac{1}{2}GV^2 \cdot T} = \frac{\omega_0 C}{G}$$

$$Y(\omega) = G + j\omega C + \frac{1}{j\omega L} = G \left[1 + jQ_0 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right]$$

令 \$Y\$ 的实部和虚部的绝对值相等，
求此时的 \$\omega_{1,2}\$

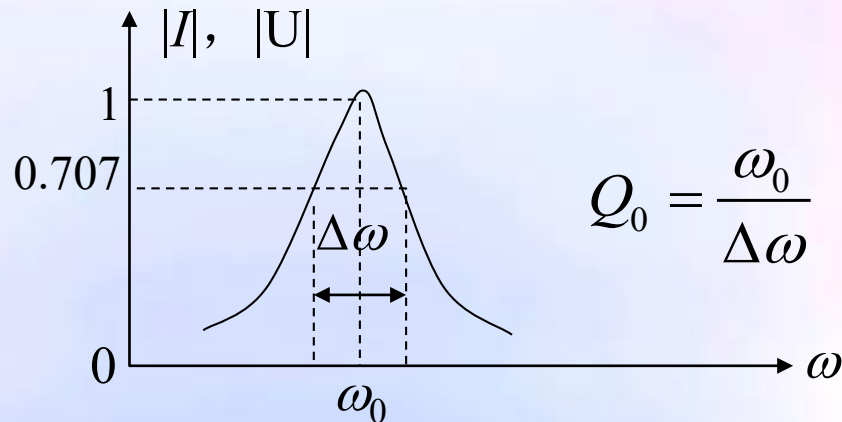
■ \$Q_0\$ 的广义定义，（7.2.10-14）；



\$\Delta\omega\$ 称为3dB带宽，\$20\log|U(\omega_0)/U(\omega_{1/2})|=3\text{dB}\$

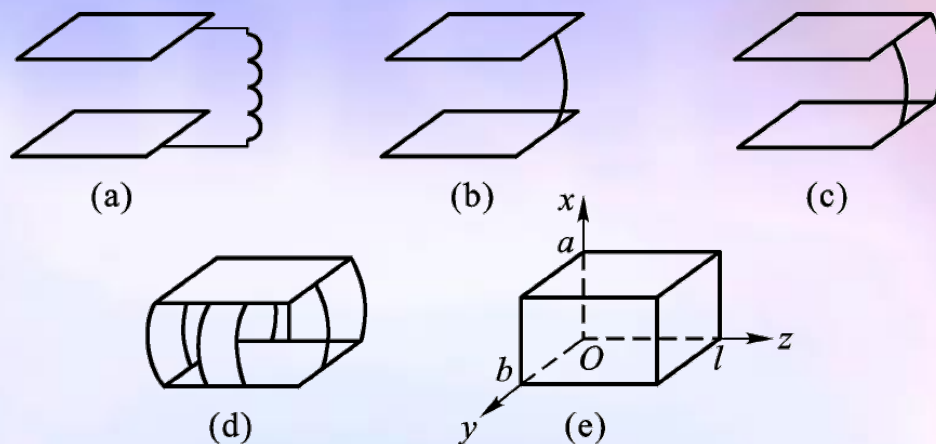
LC谐振回路及其特性

1. 谐振特性：只在 $\omega = \omega_0$ 附近，即谐振频率 f_0 （或谐振波长 λ_0 ）附近有较强电磁振荡。
2. 频率选择性： Q_0 越高，选择性越好（ Q_0 越高，稍偏离 ω_0 ，电磁振荡就减小很多）。

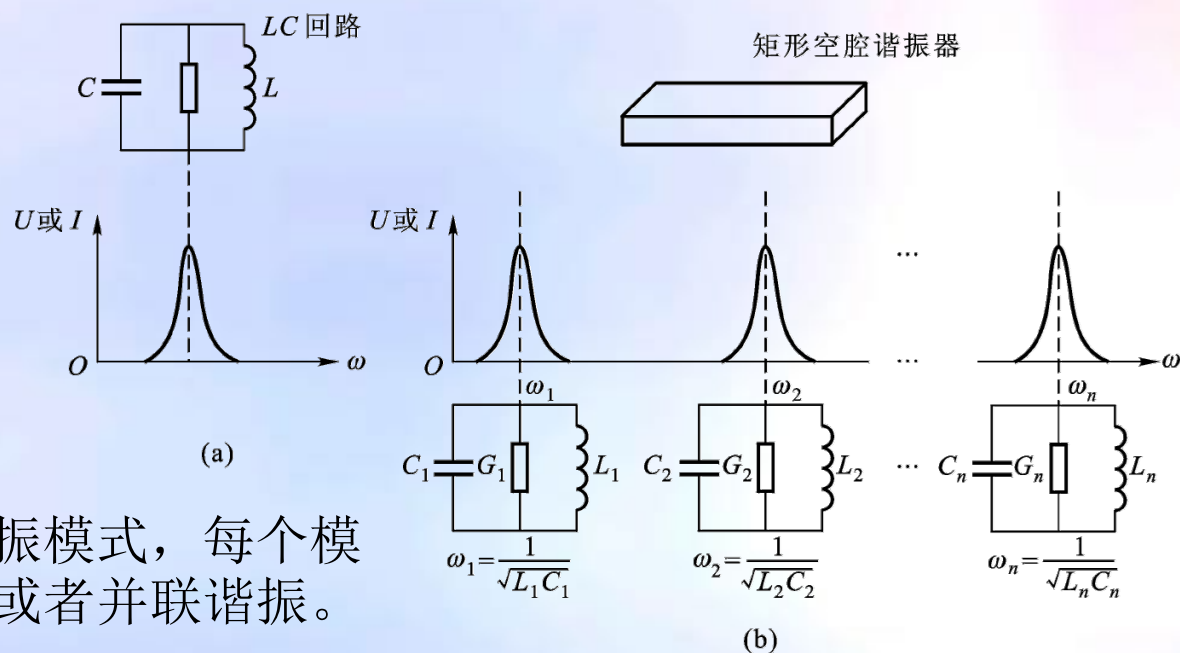


3. 储能特性：如果 $G = 0$ 或 $R = 0$ ，一旦电磁振荡建立起来，电感中的磁场能与电容器中的电场不断转换，不停地振荡下去。
4. 损耗特性：由 G 或 R 决定（ G 或 R 与所选参考面电压 U 、电流 I 有关，所以 G 、 R 有相对性，但损耗功率是一样的 ）。

$$\text{串联电路 } P_{\text{损}} = \frac{1}{2} I^2 R \quad \text{并联电路 } P_{\text{损}} = \frac{1}{2} U^2 G$$



微波谐振器的形成



空腔具有无限多个谐振模式，每个模式分别对应一个串联或者并联谐振。

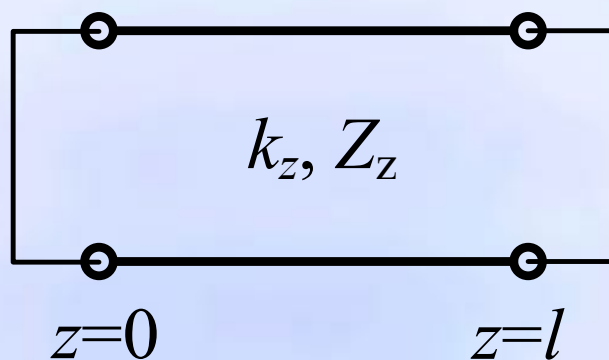
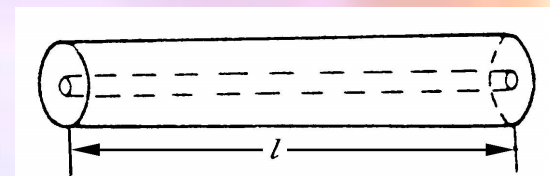
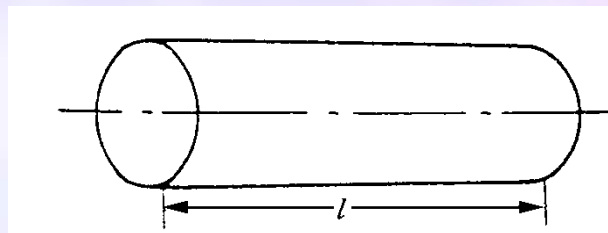
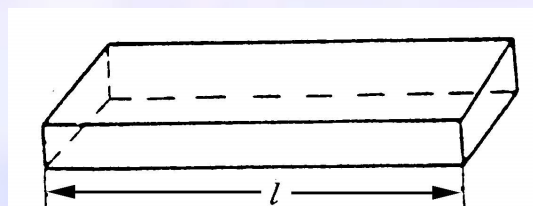
7.1 结构特点及其等效电路

7.2 谐振器的特征参数

7.3 空腔谐振器

传输线型空腔谐振器

传输线型空腔谐振器及其等效电路

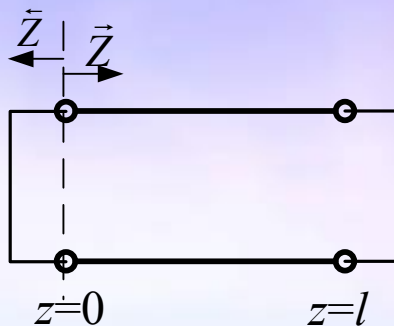


终端短路的传输线

传输线型空腔谐振器

谐振条件

$$\vec{Z} + \vec{Z} = 0$$



$$\begin{cases} \vec{Z} = 0 \\ \vec{Z} = jZ_z \tan(k_z l) \end{cases} \quad Z_z = \begin{cases} \omega\mu / k_z & \text{TE模} \\ k_z / \omega\varepsilon & \text{TM模} \end{cases}$$

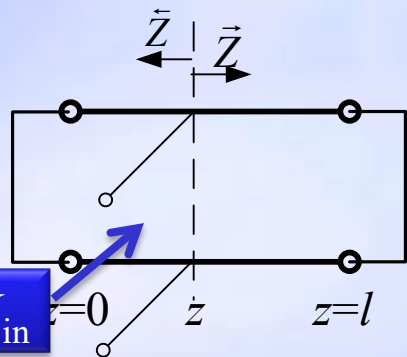
$$jZ_z \tan k_z l = 0 \rightarrow k_z = \frac{p\pi}{l}, \quad p = 0, 1, 2, 3, \dots$$

当满足以上条件时，可以证明对于任意位置 z

$$\vec{Z} + \vec{Z} = jZ_z \left\{ \tan(k_z z) + \tan[k_z(l-z)] \right\} = jZ_z \frac{\sin(k_z l)}{\cos(k_z z) \cos[k_z(l-z)]} = 0$$

$$Y_{in} = \frac{1}{\vec{Z}} + \frac{1}{\vec{Z}} = \frac{\vec{Z} + \vec{Z}}{\vec{Z} \cdot \vec{Z}} = 0$$

从 z 看进去，相当于 $G=0$ 的并联LC谐振电路



$$k_z = \frac{p\pi}{l}, \quad p = 0, 1, 2, 3, \dots$$

谐振频率

$$k^2 = \omega^2 \mu \varepsilon = k_t^2 + k_z^2 = k_t^2 + (p\pi / l)^2$$

TEM模同轴线, $k_t=0$

$$\text{矩形波导 } k_t^2 = \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \quad m, n \text{ 不同时为零}$$

$$\text{圆波导 } k_t = \begin{cases} u'_{mn} / a & \text{TE模} \\ u_{mn} / a & \text{TM模} \end{cases} \quad m, n \text{ 都不为零}$$

空腔谐振器的色散关系

谐振器色散关系 $k^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \right)^2 = k_t^2 + \left(\frac{p\pi}{l} \right)^2$

1. 对于工作于TEM模同轴线, $k_t=0$, $\lambda_0 = \frac{2l}{p}$

2. 对于矩形波导, $k_t^2 = k_x^2 + k_y^2 = \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2$

$$\lambda_0 = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 + \left(\frac{p}{l} \right)^2}}$$

当 $b < a < l$ 时, TE_{101} 模式的谐振波长最长, 是矩形空腔谐振器的主模。0 对应最短的边长 b

$$\lambda_0 = \frac{2al}{\sqrt{a^2 + l^2}}$$

3. 对于圆波导 $k_t = \begin{cases} u'_{mn}/a & \text{TE模} \\ u_{mn}/a & \text{TM模} \end{cases}$

$$\lambda_0 = \begin{cases} 2 / \sqrt{(u'_{mn} / \pi a)^2 + (p / l)^2} & \text{TE}_{mnp} \\ 2 / \sqrt{(u_{mn} / \pi a)^2 + (p / l)^2} & \text{TM}_{mnp} \end{cases}$$

矩形空腔谐振器的场分布

横截面内的场分布由模式函数 $\mathbf{e}(x,y)$ 、 $\mathbf{h}(x,y)$ 表示
纵向的分布由模函数的幅值 $U(z)$ 、 $I(z)$ 决定

$$\begin{cases} \frac{dU(z)}{dz} = -jk_z Z_z I(z) \\ \frac{dI(z)}{dz} = -jk_z Y_z U(z) \end{cases} \quad Z_z = \begin{cases} \omega\mu / k_z & \text{TE模} \\ k_z / \omega\varepsilon & \text{TM模} \end{cases}$$

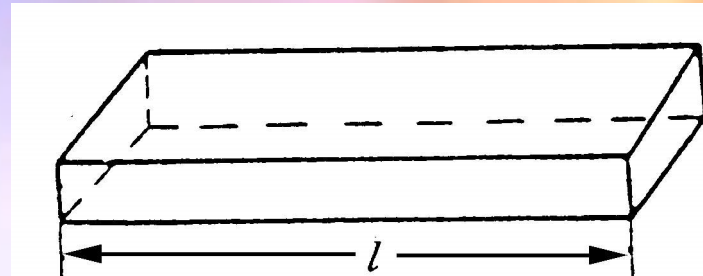
上两式消去 $I(z)$ 得到

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} + k_z^2 \right) U(z) = 0$$

在边界 $z=0, l$ ，切向电场为零，故得 $U(z=0, l)=0$ ，在此边界条件下，其解为

$$\begin{cases} U(z) = A \sin(k_z z) \\ I(z) = jAY_z \cos(k_z z) \end{cases} \quad k_z = \frac{p\pi}{l}$$

模式函数幅值 $U(z)$ 、 $I(z)$ 与模式函数相乘就得到矩形空腔谐振器横向场量，再由横向场量求出纵向场量就得到矩形空腔谐振器场分量表达式。



矩形空腔谐振器TE模的场分布

$$\left\{ \begin{array}{l} E_x = \sum_{m,n,p} A_{mnp} \frac{n\pi}{b} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \cos\left(\frac{p\pi z}{l}\right) \\ E_y = - \sum_{m,n,p} A_{mnp} \frac{m\pi}{a} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{p\pi z}{l}\right) \\ E_z = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} H_x = \sum_{m,n,p} jA_{mnp} \frac{1}{\omega\mu} \frac{m\pi}{a} \frac{p\pi}{l} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \cos\left(\frac{p\pi z}{l}\right) \\ H_y = \sum_{m,n,p} jA_{mnp} \frac{1}{\omega\mu} \frac{m\pi}{b} \frac{p\pi}{l} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \cos\left(\frac{p\pi z}{l}\right) \\ H_z = \sum_{m,n,p} -jA_{mnp} \frac{\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2}{\omega\mu} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{p\pi z}{l}\right) \end{array} \right.$$

m, n, p中只有一个为零

矩形空腔谐振器TM模的场分布

$$H_x = \sum_{m,n,p} jB_{mnp} \frac{n\pi}{b} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \cos\left(\frac{p\pi z}{l}\right)$$

$$H_y = - \sum_{m,n,p} jB_{mnp} \frac{m\pi}{a} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \cos\left(\frac{p\pi z}{l}\right)$$

$$H_z = 0$$

$$E_x = - \sum_{m,n,p} B_{mnp} \frac{mp\pi^2}{\omega\epsilon la} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{p\pi z}{l}\right)$$

$$E_y = - \sum_{m,n,p} B_{mnp} \frac{np\pi^2}{\omega\epsilon lb} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{p\pi z}{l}\right)$$

$$E_z = \sum_{m,n,p} B_{mnp} \frac{\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2}{\omega\epsilon} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \cos\left(\frac{p\pi z}{l}\right)$$

m, n, p都不为零

矩形空腔谐振器最低模TE₁₀₁

22

1. 场分量

$$E_y = -A_{101} \frac{\pi}{a} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi z}{l}$$

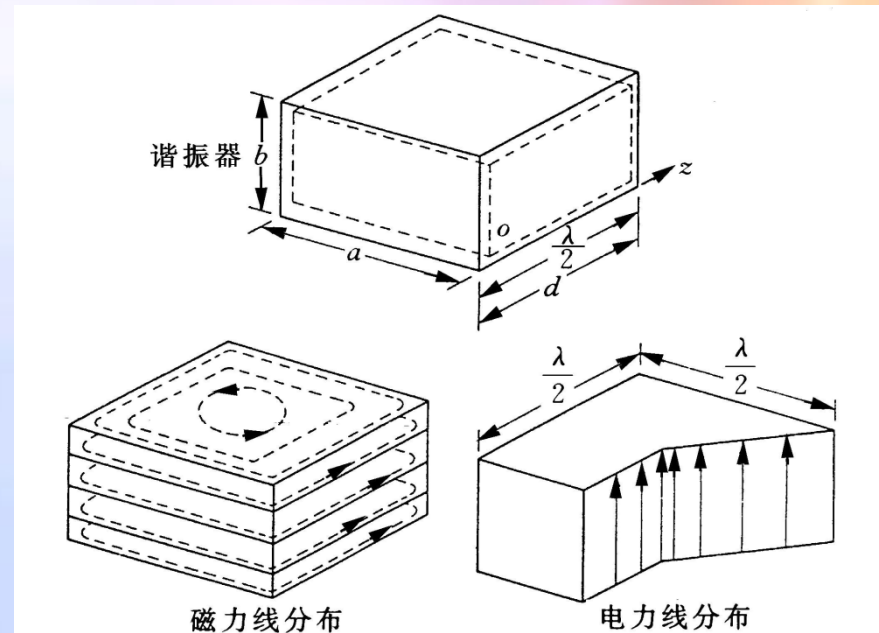
$$H_x = jA_{101} \frac{\pi^2}{al} \frac{1}{\omega\mu} \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi z}{l}$$

$$H_z = -jA_{101} \frac{\pi^2}{\omega\mu a^2} \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi z}{l}$$

3. 谐振波长:

$$\lambda_0 = \frac{2al}{\sqrt{a^2 + l^2}} \quad (b < a < l \text{ 时})$$

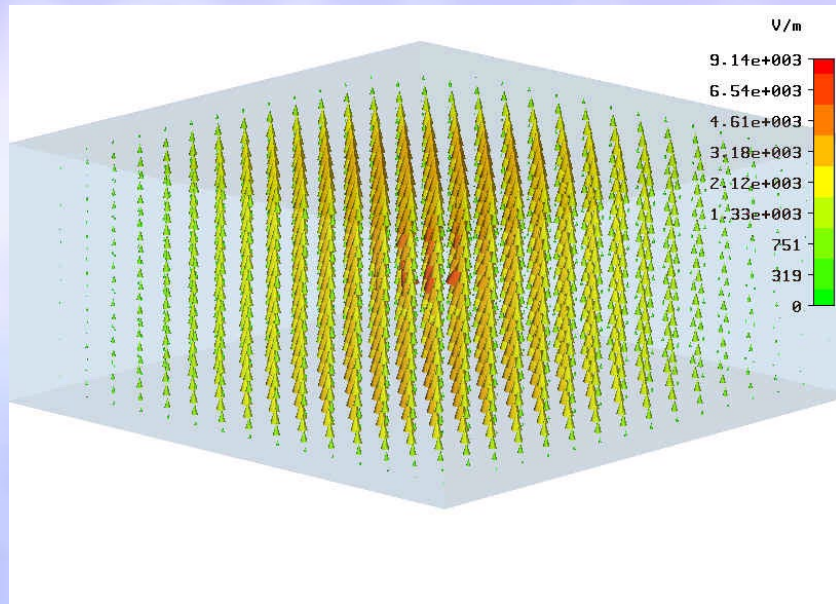
2. 场分布



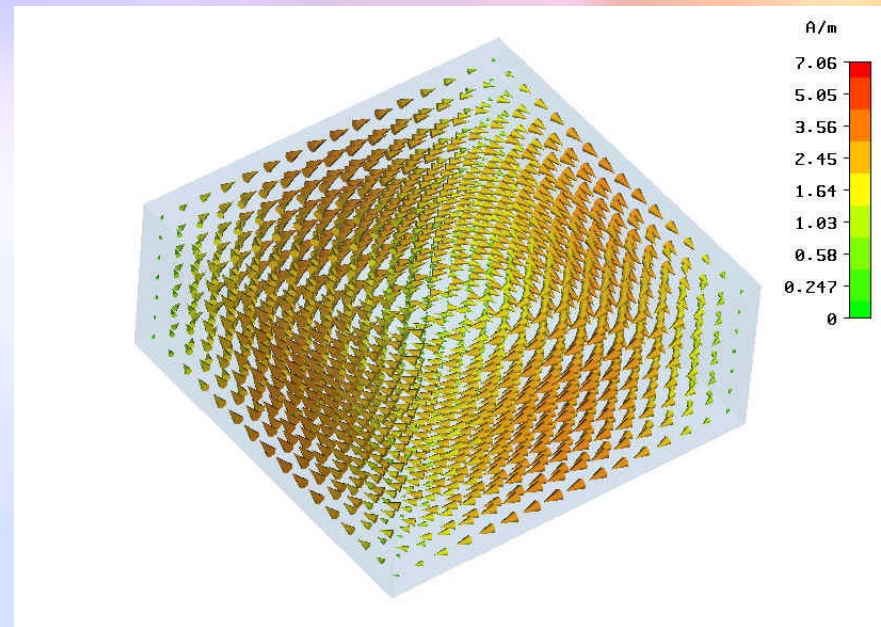
矩形空腔谐振器
TE₁₀₁模场分布

TE₁₀₁模电磁场

23



电场

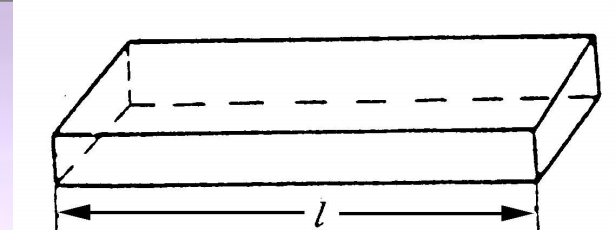


磁场

例7-2

$$Q_0 = 2\pi \frac{\text{谐振器储能 } W}{\text{一周周期损耗的功率 } P_l}$$

$$\begin{cases} W = W_e + W_m = \frac{1}{2} \int_v \mu |\mathbf{H}|^2 dV & (\text{最大磁场储能}) \\ P_l = \frac{1}{2} \oint_s |\mathbf{J}_s|^2 R_s dS = \frac{1}{2} R_s \oint_s |\mathbf{H}_s|^2 dS \end{cases}$$



$$\text{由此得到 } Q_0 = \frac{2\pi}{T} \frac{\frac{1}{2} \int_v \mu |\mathbf{H}|^2 dV}{\frac{1}{2} R_s \oint |\mathbf{H}_s|^2 dS} = \frac{\omega \mu \int_v |\mathbf{H}|^2 dV}{R_s \oint |\mathbf{H}_s|^2 dS} = \frac{2}{\delta} \frac{\int_v |\mathbf{H}|^2 dV}{\oint_s |\mathbf{H}_s|^2 dS}$$

式中 δ 为腔壁导体趋肤深度。

1. 谐振腔内壁附近的切向磁场总要大于腔内部的磁场，

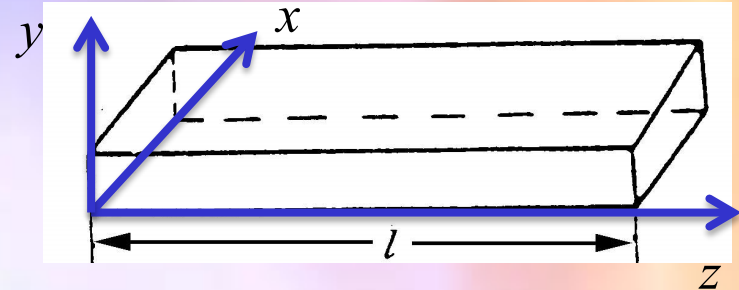
$$\text{如近似认为, } |\mathbf{H}|^2 \approx \frac{1}{2} |\mathbf{H}_s|^2, \quad \text{则可得} \quad Q_0 \approx \frac{1}{\delta} \frac{V}{S}$$

由此式可以看出，空腔谐振器的 Q_0 值近似与腔体体积 V 成正比，与其内壁表面积 S 成反比，与趋肤深度成反比。比值 V/S 越大， Q_0 值越高。

因此，为获得较高的 Q_0 值应选择谐振器的形状使 V/S 大。--球体

2. 微扰近似计算:

- (1) 不计损耗时得到场分布及各场分量
- (2) 求腔储能
- (3) 计及腔损耗电导，用不计损耗时腔壁电流（从切向磁场得到），计算功率损耗



$$W = W_{e\max} = \frac{\epsilon}{2} \int_0^l dz \int_0^b dy \int_0^a dx |E_y|^2$$

$$P_l = \frac{R_s}{2} \left\{ 2 \int_0^b \int_0^a |H_x|_{z=0}^2 dx dy + 2 \int_0^l \int_0^b |H_z|_{x=0}^2 dy dz + \right. \\ \left. 2 \int_0^l \int_0^a [|H_x|^2 + |H_z|^2] dx dz \right\}$$

$$Q_0 = 2\pi \frac{W}{PT} = \frac{\pi\eta}{4R_s} \left[\frac{2b(a^2 + l^2)^{3/2}}{al(a^2 + l^2) + 2b(a^3 + l^3)} \right]$$

圆柱腔波型图

根据圆柱腔的谐振波长公式

波长计常用圆柱谐振器

$$\lambda_0 = \begin{cases} 2 / \sqrt{(u'_{mn} / \pi a)^2 + (p/l)^2} & \text{TE}_{mnp} \\ 2 / \sqrt{(u_{mn} / \pi a)^2 + (p/l)^2} & \text{TM}_{mnp} \end{cases}$$

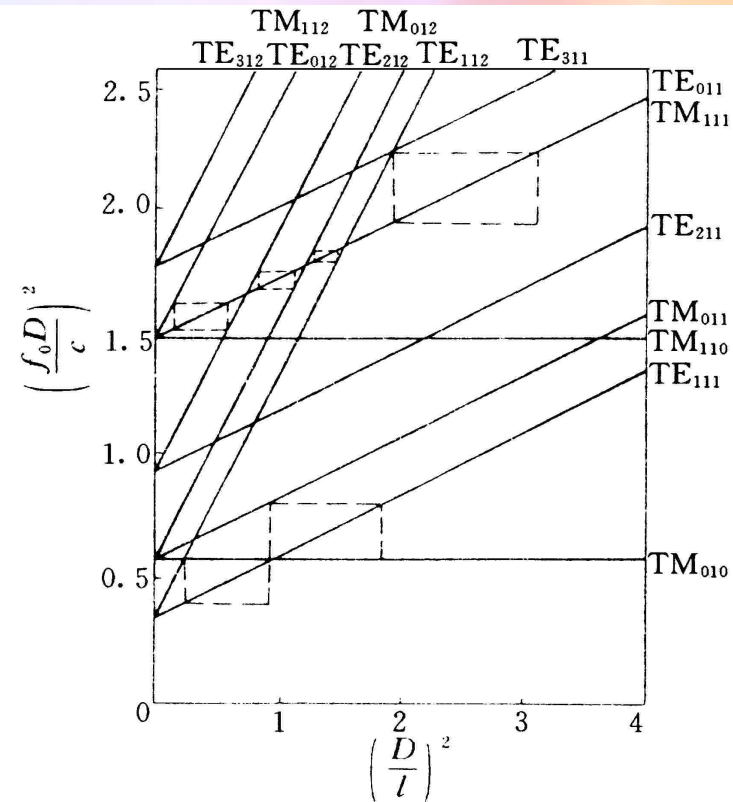
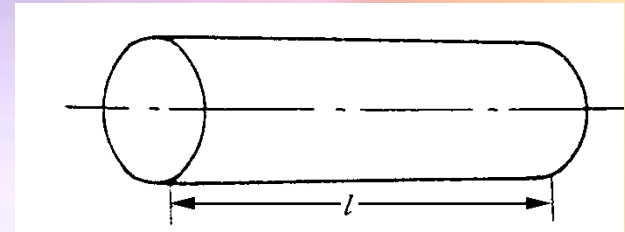
可得圆柱谐振腔的谐振频率与腔体尺寸关系

$$(f_0 D)^2 = \left(\frac{c \mu_{mn}}{\pi} \right)^2 + \left(\frac{cp}{2} \right) \left(\frac{D}{l} \right)^2$$

$$D = 2a, c \text{ 为光速} \quad \mu_{mn} = \begin{cases} u'_{mn} & \text{TE模} \\ u_{mn} & \text{TM模} \end{cases}$$

$$\text{或 } f_0^2 D^2 = 139.3 \left\{ \left(\frac{\mu_{mn}}{\pi} \right)^2 + \left(\frac{p^2}{2} \right) \left(\frac{D}{l} \right)^2 \right\}$$

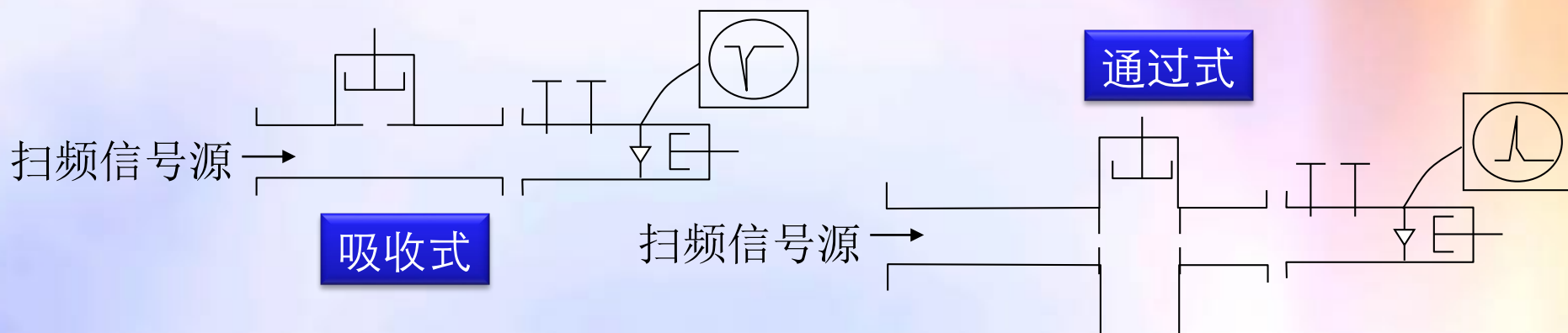
f_0 以GHz为单位, 尺寸以cm为单位



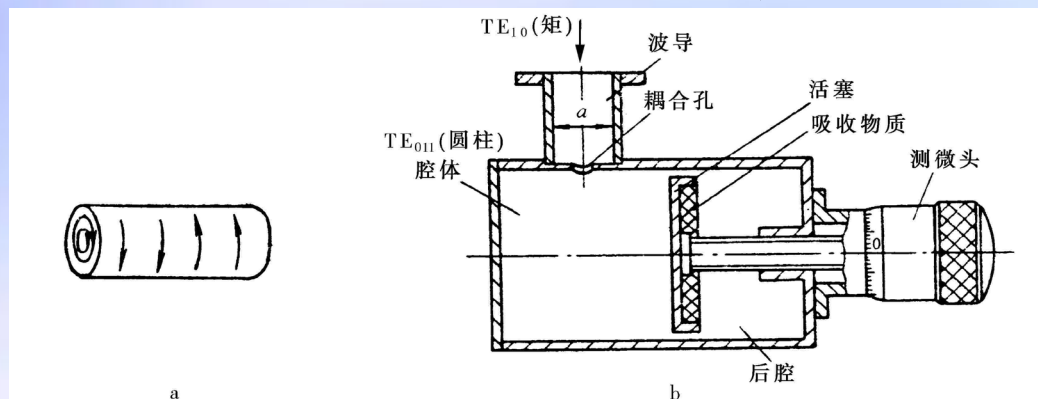
圆柱腔波型图

1、波长计实际上是一个高 Q 值谐振器，用来测量系统的工作频率。

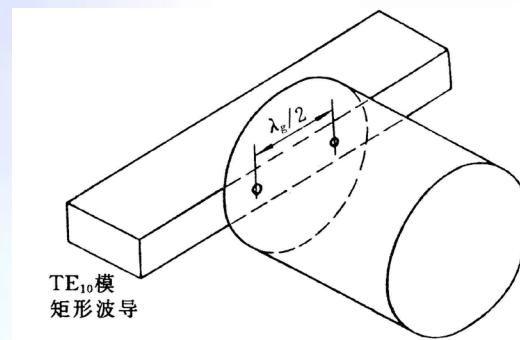
工作原理：当改变波长计腔长使其谐振频率与系统工作频率一致时，波长计中建立起最强的电磁振荡。



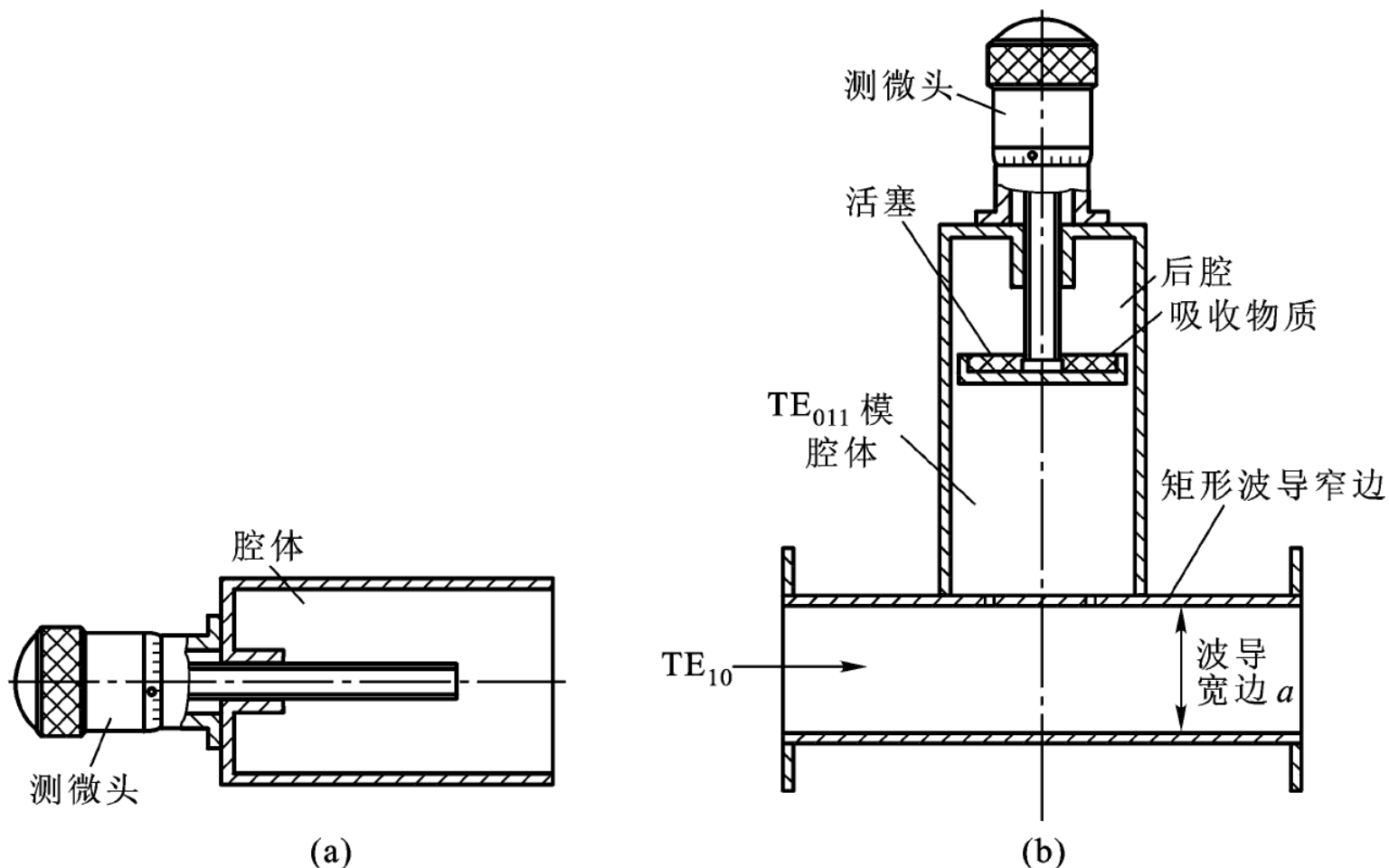
3. 典型波长计（注意为确保单模工作所采取的措施）



TE₀₁₁模电流分布与调谐方法



TE₀₁₁模圆柱空腔谐振器的对称小孔激励



波长计

(a) 同轴线波长计 (b) TE₀₁₁模圆柱波长计

复习要点

- 谐振器是储能元件，描述谐振器的特征量有谐振频率 ω_0 ，品质因数 Q_0 、模式与场分布，反映损耗特性的等效电导 G_0 或等效电阻 R_0 。 G_0 、 R_0 有相对性，与所取参考面位置有关。谐振器内电磁振荡的条件是在坐标轴的三个方向界面都发生全内反射，波来回反射一次相移为 2π 整倍数，因而谐振器中存在的场是驻波场，场在三个坐标轴方向都发生谐振，横向谐振原理是分析谐振器的有效方法。
- 空腔谐振器是最基本的谐振器，通过矩形空腔谐振器了解谐振器的特性。

复习范围

7.1, 7.2, 7.3