

电磁场与电磁波

作业：无

第19讲

6.7 光纤的射线分析

6.8 光纤的波动分析

■ 分析模型、场分布表达式与特征方程

魏兴昌

浙江大学

weixc@zju.edu.cn

6.7 光纤的射线分析

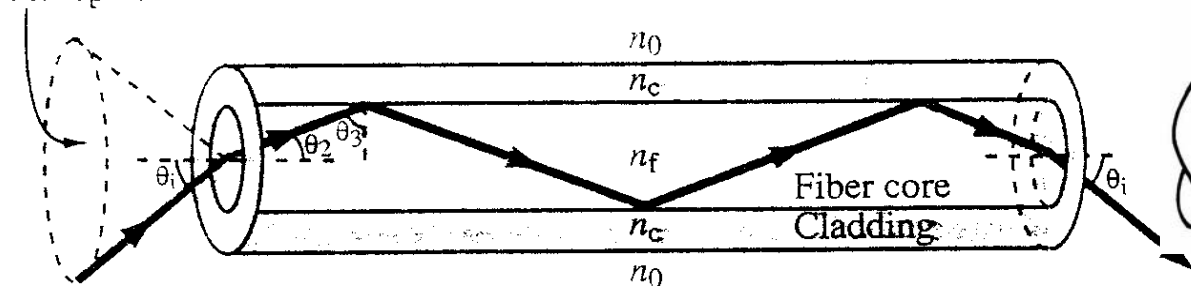
6.8 光纤的波动分析

■ 分析模型、场分布表达式与特征方程

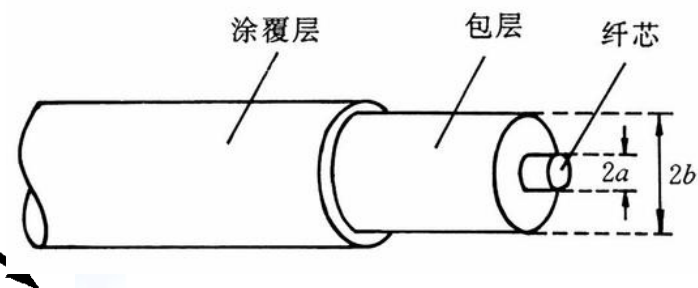
光纤中光波传播的途径



Acceptance cone



芯包界面全内反射



光纤中波沿折线传播

阶跃型和梯度型光纤

4

阶跃光纤中的折射率分布 $n(\rho) = \begin{cases} n_1 & \rho \leq a \\ n_2 & \rho > a \end{cases}$
 a 为纤芯半径

梯度型光纤中的折射率分布

$$n(\rho) = \begin{cases} n_1 \sqrt{1 - 2\Delta \left(\frac{\rho}{a}\right)^\alpha} & \rho \leq a \\ n_1 \sqrt{1 - 2\Delta} = n_2 & \rho > a \end{cases}$$

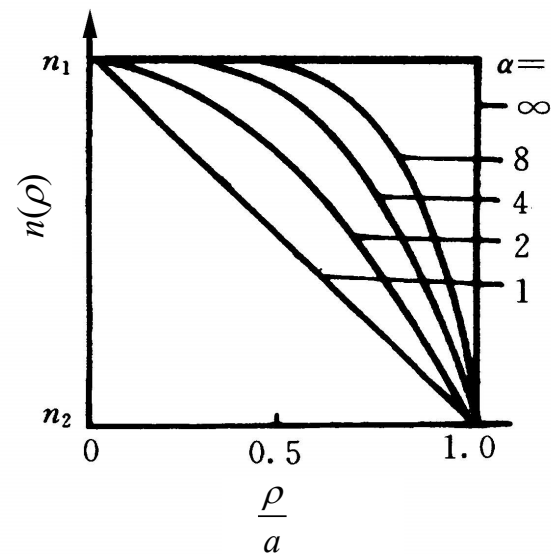
定义相对折射率差 $\Delta = \frac{n_1^2 - n_2^2}{2n_1^2} \approx \frac{n_1 - n_2}{n_1}$
 n_1, n_2 相差很小

α 取值范围为1到 ∞ :

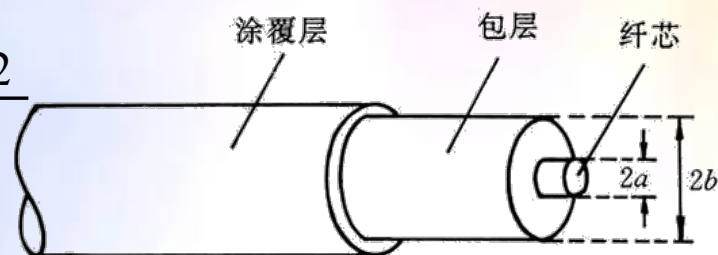
- 当 $\alpha \gg 10$ 时, 折射率分布为阶跃型;
- $\alpha=1$ 时为三角型, 梯度光纤中通常取 $\alpha \approx 2$, 即按平方律分布。

弱导条件: n_1, n_2 相差很小

石英光纤中, $n_1 \approx 1.5, \Delta \approx 0.01$



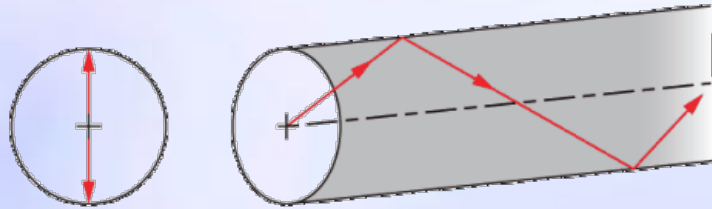
梯度光纤纤芯中的折射率分布



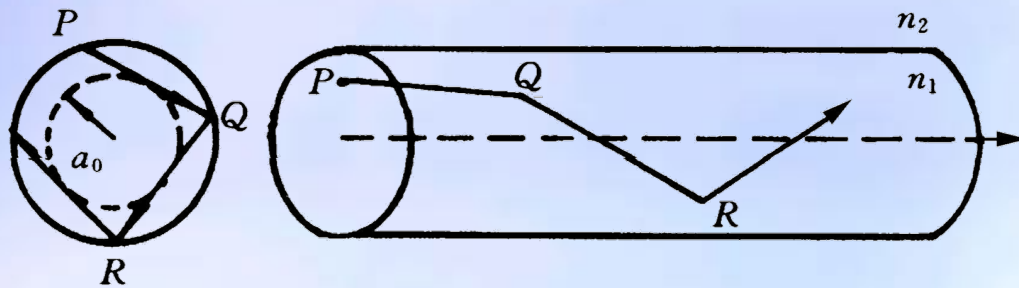
阶跃光纤 – 子午光线和斜射光线

5

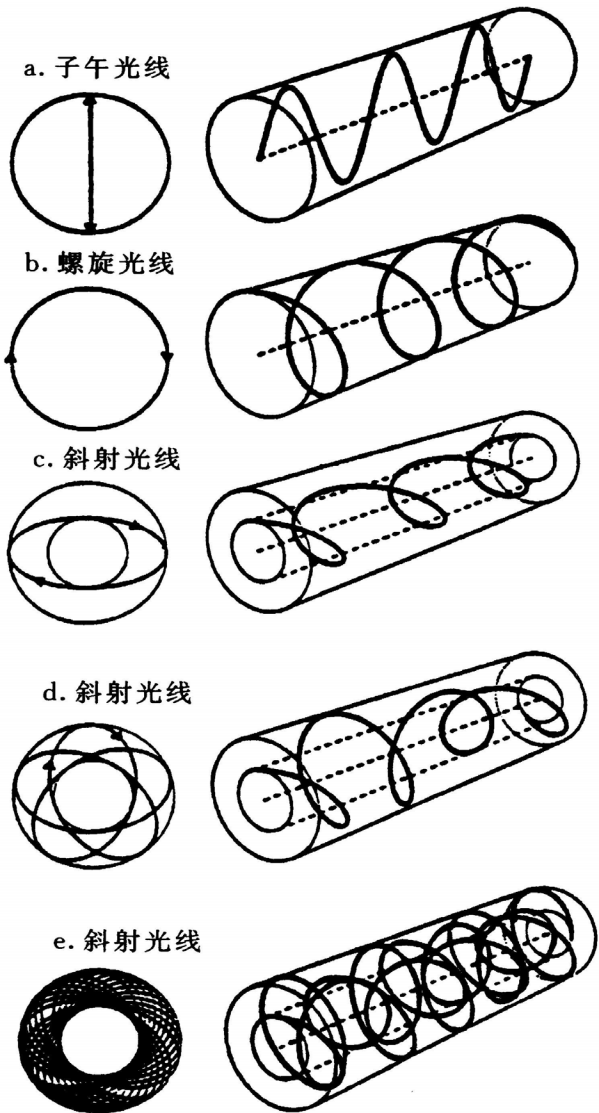
- 子午光线是位于子午面（过光纤轴线的面）上的光线



- 斜射光线是不经过光纤轴线传输的光线。



斜射光线在阶跃光纤中的传输



梯度光纤中的光线轨迹实例

阶跃光纤 – 数值孔径

6

定义 θ_c 为芯包界面的全反射临界角，相应的入射角 θ_0 为入射临界角。

$$n_1 \sin \theta_c = n_2 \sin 90^\circ$$

$$\sin \theta_c = n_2 / n_1$$

光线从空气（折射率 $n_0=1$ ）射入光纤端面，有三种典型情况：

光线到达芯包界面时恰好产生掠射

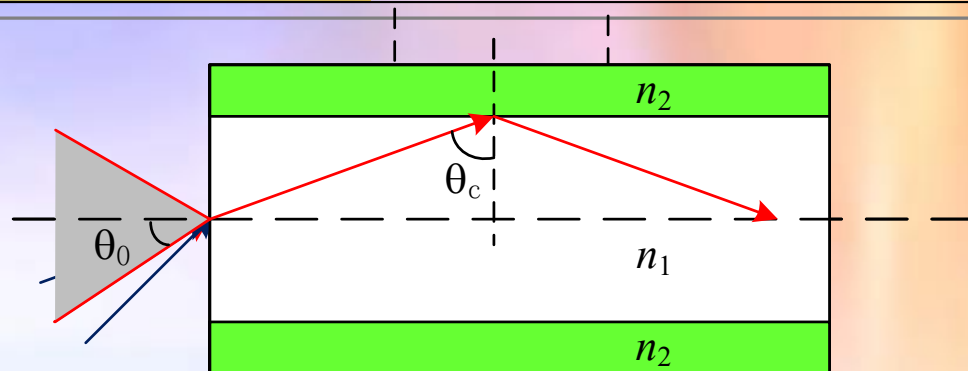
$$\theta_0 = \text{入射临界角 } \theta_0, \quad \theta_1 = \theta_c$$

光线将射入包层

$$\theta'_0 > \theta_0, \quad \theta'_1 < \theta_c$$

光线将在芯包界面产生全反射

$$\theta''_0 < \theta_0, \quad \theta''_1 > \theta_c$$



子午光线在阶跃光纤中的传输

阶跃光纤 – 数值孔径

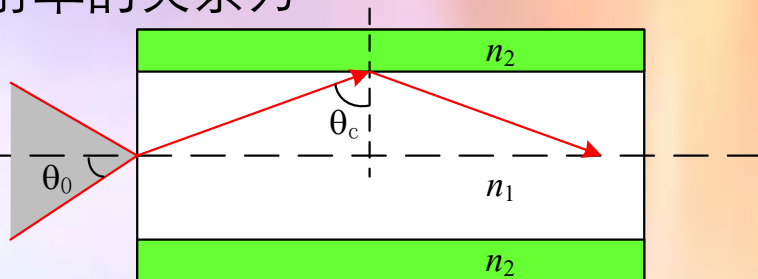
入射临界角 θ_0 是个很重要的参量，它与光纤折射率的关系为

$$\sin \theta_0 = n_1 \sin(90^\circ - \theta_c)$$

$$\sin \theta_c = n_2 / n_1$$

$$\Delta \approx \frac{n_1 - n_2}{n_1}$$

$$= \sqrt{n_1^2 - n_2^2} = \sqrt{(n_1 + n_2)(n_1 - n_2)} \approx n_1 \sqrt{2\Delta}$$



数值孔径

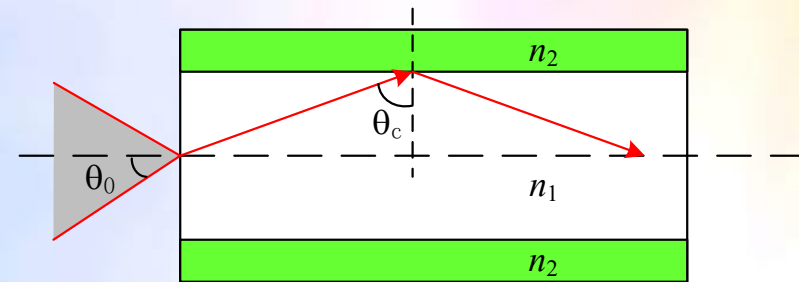
$$NA = \sin \theta_0 = n_1 \sqrt{2\Delta}$$

- NA 只决定于芯包折射率差 Δ ，与芯包直径无关； Δ 越大， NA 越大，光纤聚光能力愈强；
- NA 与降低损耗、增加带宽（不同轨迹的光线轴向速度不同）有矛盾：从降低损耗、增加带宽考虑，希望 Δ 低一些。通常 $\Delta \approx 0.01$ ，则 NA 的值约为0.1~0.3。

梯度光纤的数值孔径可用局部数值孔径 $NA(\rho)$ 来描述

$$NA(\rho) = \sqrt{n^2(\rho) - n^2(a)} \approx n(\rho) \sqrt{2\Delta_\rho} \quad \Delta_\rho = [n(\rho) - n(a)] / n(\rho)$$

$$\text{当 } \rho = 0 \text{ 时} \quad NA(\rho)_{\max} = n(0) \sqrt{2\Delta}$$



子午光线的传输特点

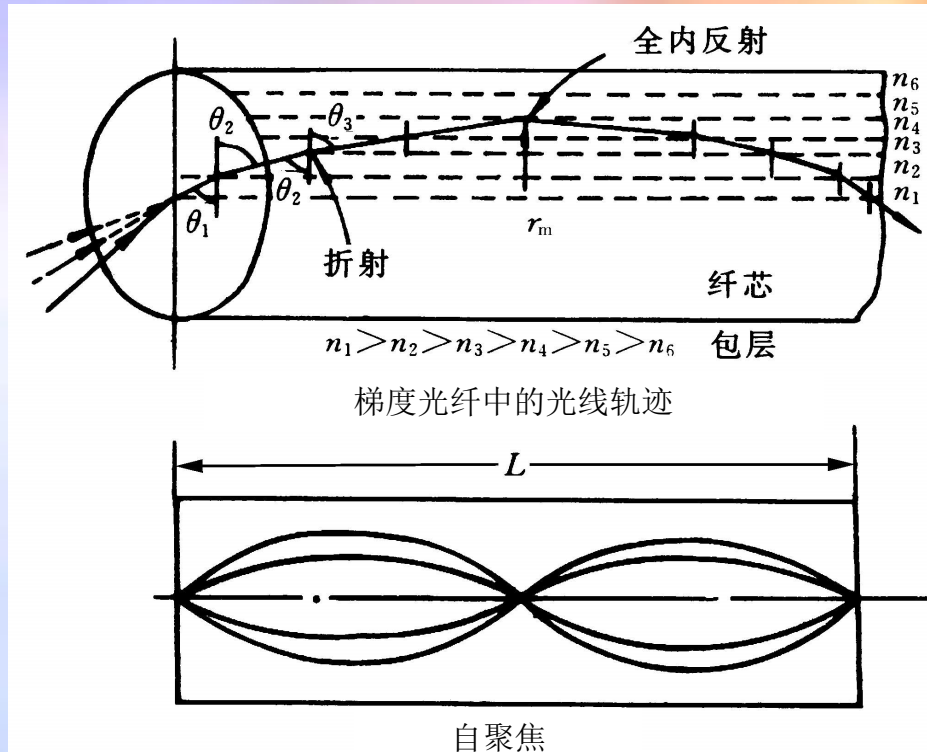
分析模型：

设纤芯由多层均匀的同轴层构成，每层的折射率自纤芯轴向外递减。光线由纤芯轴处入射，并向折射率递减的外层传输。

由于 $n_1 > n_2$ ，故折射角 $\theta_2 >$ 入射角 θ_1 ，层与层之间光线以直线传输；在下一层界面上，折射角 $\theta_3 >$ 入射角 θ_2 。由于折射角愈来愈大，光线愈来愈向芯轴弯曲，在某一点 $\rho = \rho_m$ 处发生全反射，光线折回中心。

如果折射率分布合适，就有可能使不同角度入射的全部光线以同样的轴向速度在光纤中传输，同时到达光纤轴上的某点，即所有光线都有相同的空间周期 L ，这种现象称为**自聚焦**。

可以预见，梯度光纤中的模间色散要比阶跃光纤小得多，从而有更高的传输带宽。



6.7 光纤的射线分析

6.8 光纤的波动分析

■ 分析模型、场分布表达式与特征方程

光纤类似于条带介质波导，但由于其为圆柱形，横向上无法等效为传输线，需直接求解波动方程。物理上，其模式和截止频率概念、现象和条带介质波导一样。

1. 假定包层 $\rho \rightarrow \infty$ ，圆形介质光波导；

2. 弱导近似

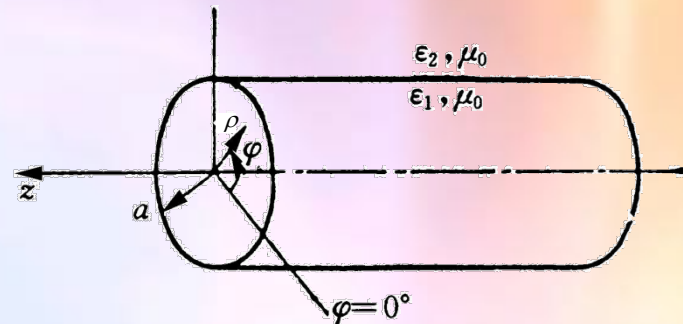
$$n_1 \approx n_2 \quad \theta_c = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right) \approx 90^\circ$$

光纤中光线几乎与光纤轴平行，这种波非常接近于TEM模。假定横向场的偏振方向在传输过程中保持不变，可用一个标量来描述。

设横向电场沿y方向， E_y 满足的标量波动方程

$$(\nabla^2 + k_i^2)E_{y_i} = 0 \quad i=1 \text{ 或者 } 2, \text{ 分别表示纤芯和包层中的量。}$$

下面用分离变量法解该标量波动方程



阶跃光纤的简化分析模型：圆形介质波导

解标量波方程

$$(\nabla^2 + k_i^2)E_{y_i} = 0 \quad i=1, 2, \text{ 分别表示纤芯和包层的量。}$$

∇^2 在圆柱坐标系展开, 以上方程变为

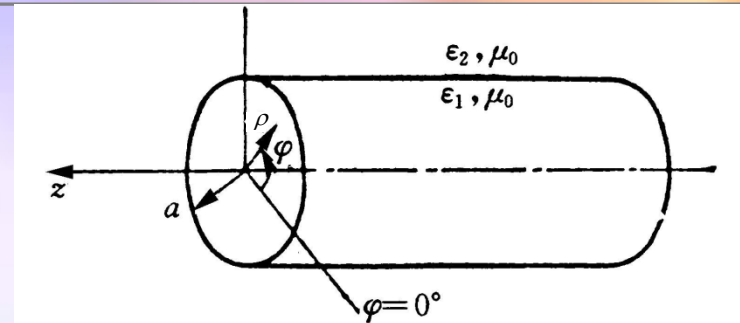
$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial E_y}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} + k_i^2 E_y = 0$$

令 $E_y = P(\rho)\Phi(\varphi)e^{-jk_z z}$ → 假定沿z方向为行波, k_z 待求

$$\frac{\frac{d^2 P(\rho)}{d\rho^2}}{P(\rho)} + \frac{1}{\rho} \frac{\frac{dP(\rho)}{d\rho}}{P(\rho)} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\frac{d^2 \Phi(\varphi)}{d\varphi^2}}{\Phi(\varphi)} + k_i^2 - k_z^2 = 0$$

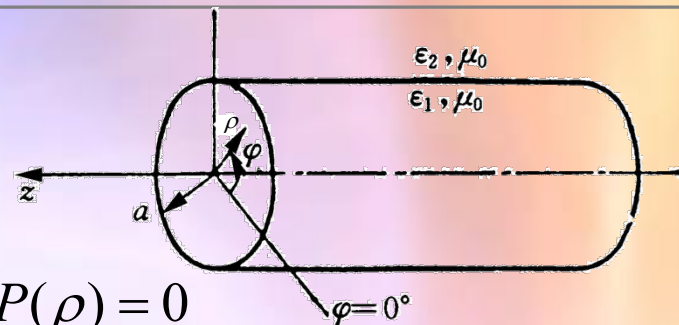
$$\rho^2 \frac{\frac{d^2 P(\rho)}{d\rho^2}}{P(\rho)} + \rho \frac{\frac{dP(\rho)}{d\rho}}{P(\rho)} + \frac{\frac{d^2 \Phi(\varphi)}{d\varphi^2}}{\Phi(\varphi)} + \rho^2 (k_i^2 - k_z^2) = 0$$

只与 φ 相关, 令其 $= -m^2$



得出 $\begin{cases} \frac{d^2 \Phi(\varphi)}{d\varphi^2} + m^2 \Phi(\varphi) = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} \rho^2 \frac{d^2 P(\rho)}{d\rho^2} + \rho \frac{dP(\rho)}{d\rho} + \left[(k_i^2 - k_z^2) \rho^2 - m^2 \right] P(\rho) = 0 \end{cases}$



1. Φ 的解为 $\Phi(\varphi) = e^{jm\varphi}$ 或者 $\begin{cases} \cos(m\varphi) \\ \sin(m\varphi) \end{cases}$

根据 E_y 沿圆周以 2π 为周期的要求, 可得 $m=0,1,2,\dots$

$$\begin{cases} \frac{d^2 \Phi(\varphi)}{d\varphi^2} + m^2 \Phi(\varphi) = 0 \\ \rho^2 \frac{d^2 P(\rho)}{d\rho^2} + \rho \frac{dP(\rho)}{d\rho} + \left[(k_i^2 - k_z^2) \rho^2 - m^2 \right] P(\rho) = 0 \end{cases}$$

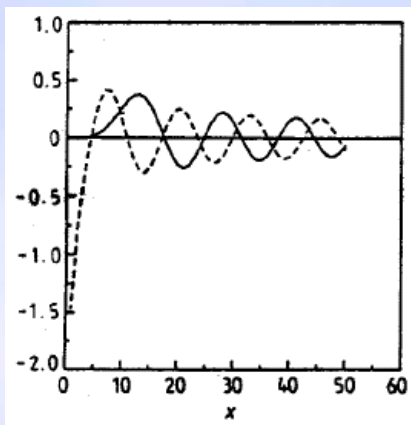
2. P 为贝塞尔函数

第 m 阶贝塞尔方程, $\lambda^2 > 0$

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (\lambda^2 x^2 - m^2) y = 0$$

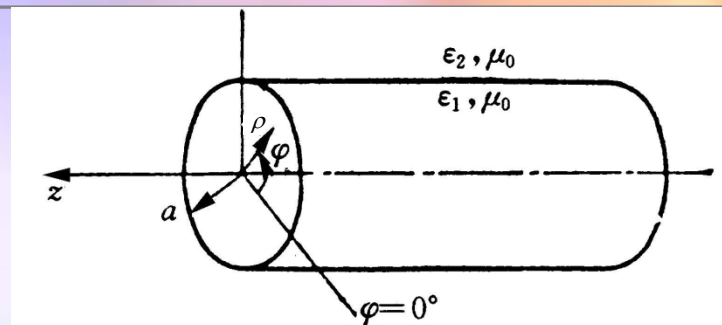
$J_m(\lambda x)$: 第一类贝塞尔函数, 沿 x 方向的驻波, 满足纤芯内场分布;

$Y_m(\lambda x)$: 第二类贝塞尔函数



— $J_m(\lambda x)$

--- $Y_m(\lambda x)$

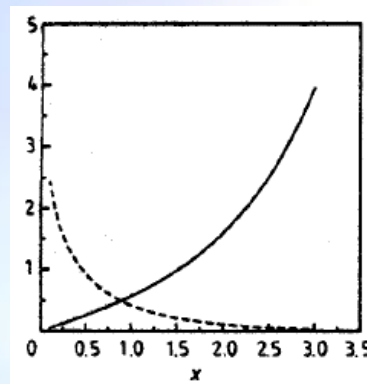


第 m 阶修正贝塞尔方程, $\gamma^2 > 0$

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (-\gamma^2 x^2 - m^2) y = 0$$

$I_m(\gamma x)$: 第一类修正贝塞尔函数;

$K_m(\gamma x)$: 第二类修正贝塞尔函数, 沿 x 方向的衰减波, 满足包层内场分布



— $I_m(\gamma x)$

--- $K_m(\gamma x)$

解标量波方程

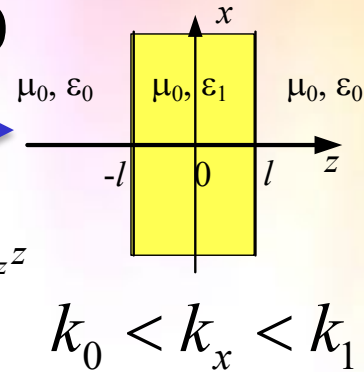
$$\begin{cases} P_1(\rho) = CJ_m(k_{t1}\rho), & \rho < a \\ P_2(\rho) = DK_m(k_{t2}\rho), & \rho > a \end{cases} \quad \begin{matrix} a \text{ 为纤芯的半} \\ \text{径} \end{matrix}$$

$$\begin{cases} k_{t1}^2 = k_1^2 - k_z^2 = k_0^2 n_1^2 - k_z^2 \\ k_{t2}^2 = k_2^2 - k_z^2 = k_0^2 n_2^2 - k_z^2 \end{cases}$$

为了保证波在纤芯内传输、在包层内衰减，要求 $k_{t1}, k_{t2} \geq 0$

$$k_0 n_2 \leq k_z \leq k_0 n_1$$

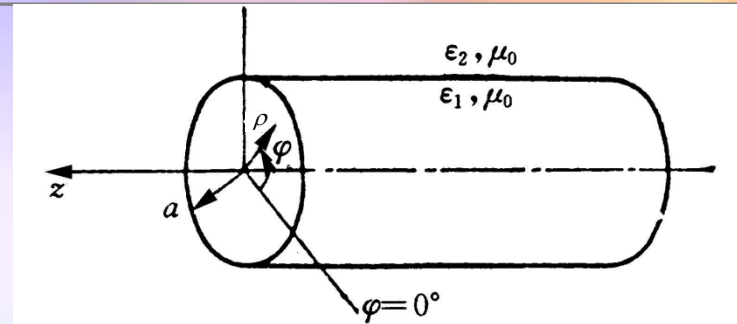
与平板波导 k_x 的要求一样

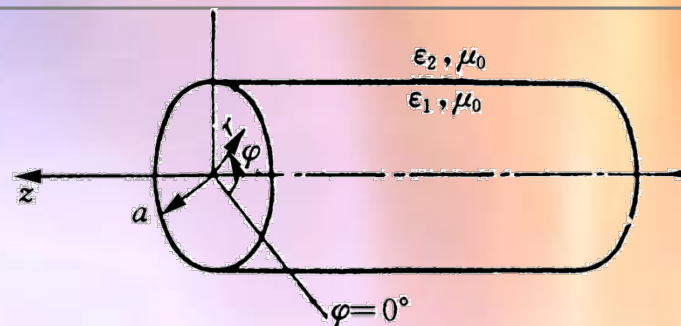


在 $\rho=a$ 界面上，边界条件要求 E_y 连续， $E_y = P(\rho)\Phi(\varphi)e^{-jk_z z}$

$$CJ_m(k_{t1}a) = DK_m(k_{t2}a) = A$$

$$\begin{cases} P_1(\rho) = \frac{A}{J_m(k_{t1}a)} J_m(k_{t1}\rho), & \rho < a \\ P_2(\rho) = \frac{A}{K_m(k_{t2}a)} K_m(k_{t2}\rho), & \rho > a \end{cases}$$





最后得到

$$\begin{cases} E_{y_1} = \frac{A_m}{J_m(k_{t1}a)} J_m(k_{t1}\rho) \frac{\cos(m\varphi)}{\sin(m\varphi)} e^{-jkz}, & \rho < a \\ E_{y_2} = \frac{A_m}{K_m(k_{t2}a)} K_m(k_{t2}\rho) \frac{\cos(m\varphi)}{\sin(m\varphi)} e^{-jkz}, & \rho > a \end{cases}$$

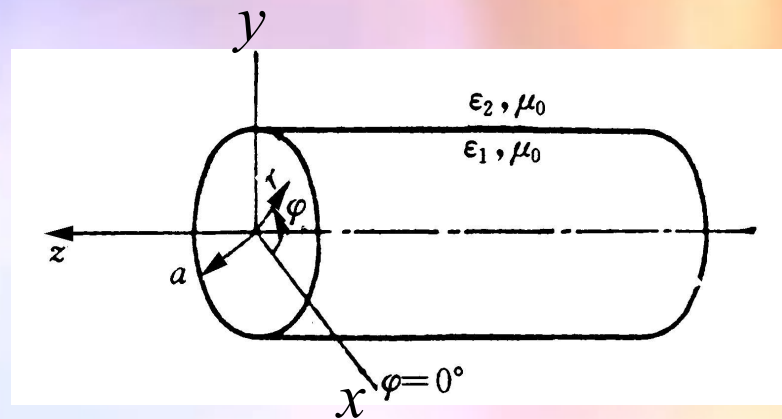
弱导光纤的色散关系导出过程

17

求解步骤：

1. 根据TEM模近似，由 E_y 求 H_x

$$H_x \approx -E_y / Z \quad Z = \begin{cases} \frac{\eta_0}{n_1} & \text{纤芯区} \\ \frac{\eta_0}{n_2} & \text{包层区} \end{cases}$$



2. 由 E_y 、 H_x 求 E_z 、 H_z 。 E_z 、 H_z 虽然很小，但在导出色散关系时举足轻重

3. 根据 $\rho=a$ 交界面上 E_z 、 H_z 连续性得到色散关系

$$u \frac{J_{m+1}(u)}{J_m(u)} = w \frac{K_{m+1}(w)}{K_m(w)}, \text{ 或者 } u \frac{J_{m-1}(u)}{J_m(u)} = -w \frac{K_{m-1}(w)}{K_m(w)}$$

定义以纤芯半径归一化的横向传播常数

$$\begin{cases} u = k_{t1} a = \sqrt{k_0^2 n_1^2 - k_z^2} a \\ w = k_{t2} a = \sqrt{k_z^2 - k_0^2 n_2^2} a \end{cases}$$

$$u \frac{J_{m+1}(u)}{J_m(u)} = w \frac{K_{m+1}(w)}{K_m(w)} \text{ 或 } u \frac{J_{m-1}(u)}{J_m(u)} = -w \frac{K_{m-1}(w)}{K_m(w)} \quad (1) \quad \begin{cases} u = \sqrt{k_0^2 n_1^2 - k_z^2} a \\ w = \sqrt{k_z^2 - k_0^2 n_2^2} a \end{cases}$$

目标：求解 $k_0 \sim k_z$ 曲线。解的步骤：

(1)先确定光纤芯半径 a ，相对折射率差 Δ 以及工作波长 λ 或 $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda}$

(2) 计算 $u^2 + w^2 = a^2 k_0^2 (n_1^2 - n_2^2)$ (2)

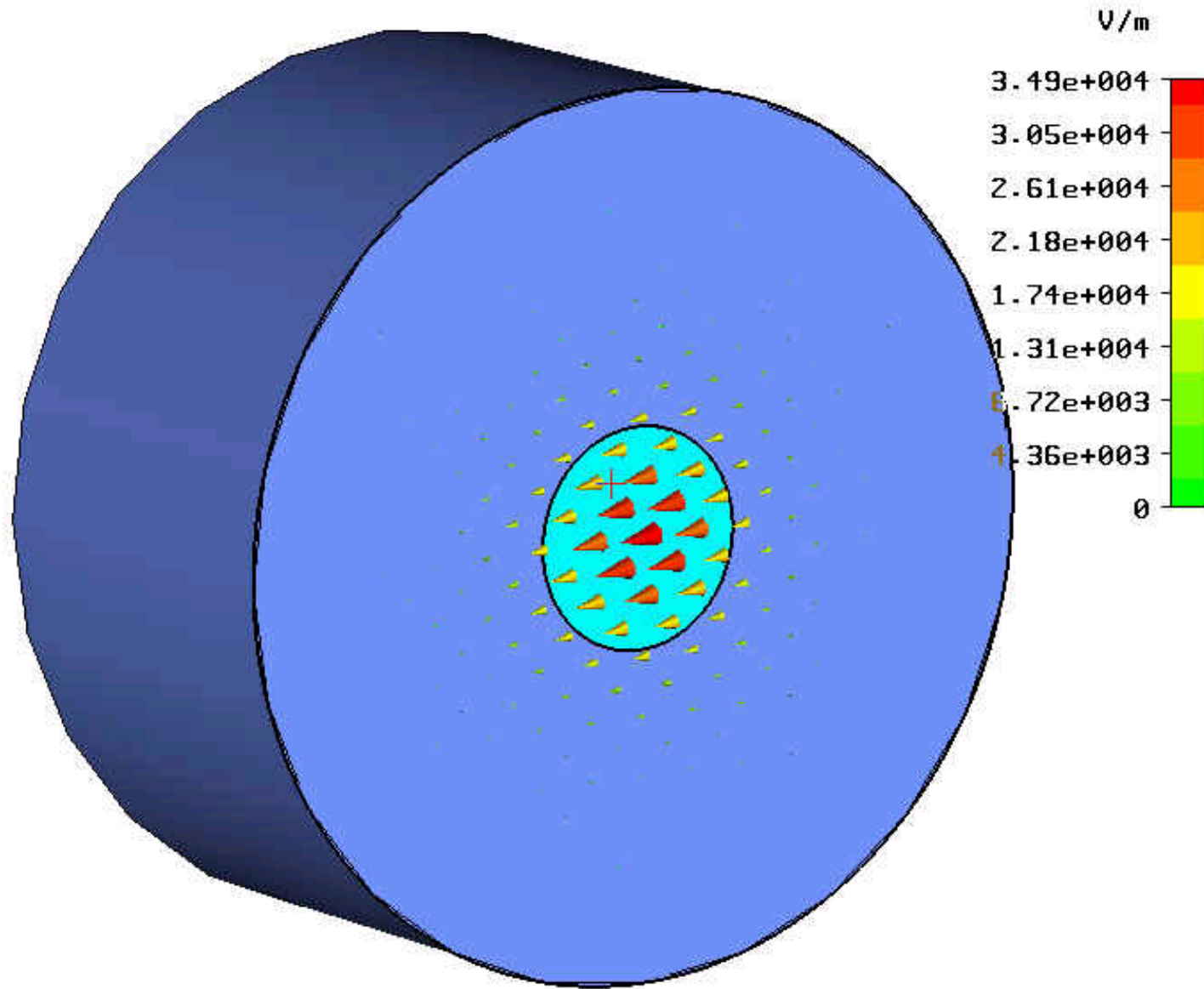
(3)联立解式 (1) 与式 (2) ，得到 u 或 w

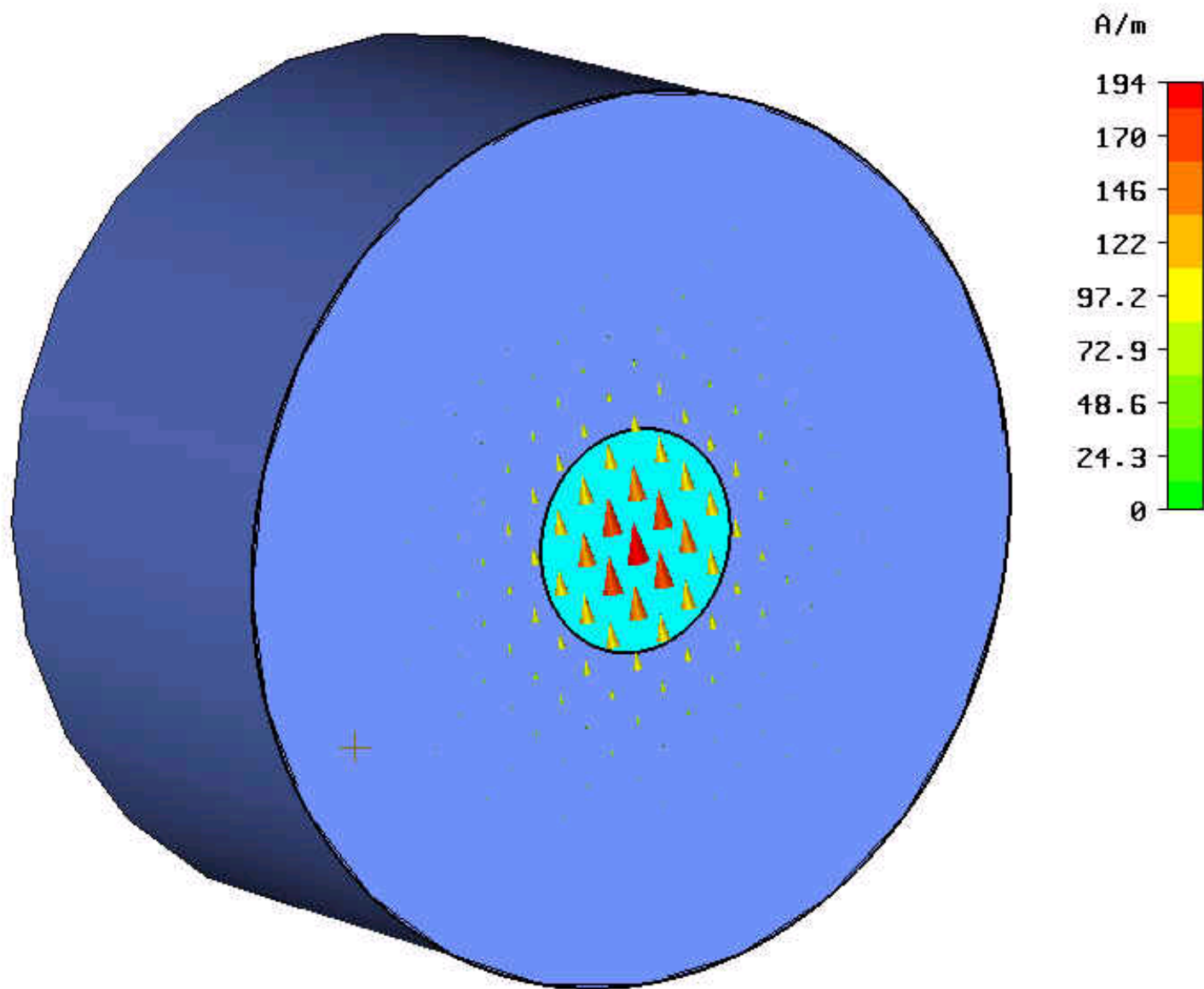
(4) 从 $u^2 = a^2 (k_0^2 n_1^2 - k_z^2)$ 或 $w^2 = a^2 (k_z^2 - k_0^2 n_2^2)$ 求出 k_z 。

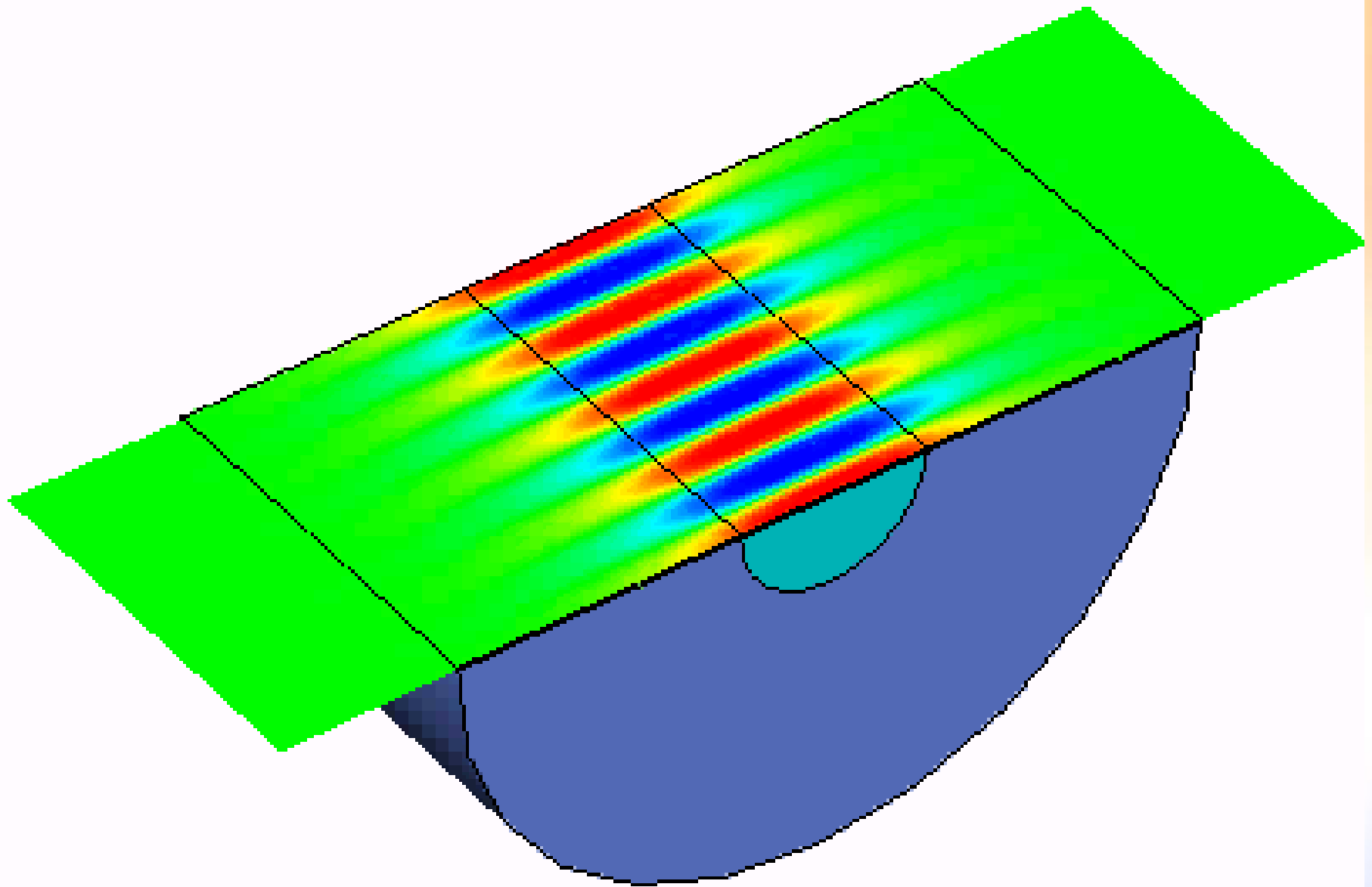
导模传播常数 k_z 的允许范围为 $k_0 n_2 \leq k_z \leq k_0 n_1$

截止条件：

若 $w=0$ ， $k_z=k_0 n_2$ ，则不满足 $K_m(w)|_{w \rightarrow \infty} = 0$ 的条件，导模将不再约束在纤芯中轴向传输，能量向横向扩散，故定义 $w=0$ 为截止条件。







复习要点

- 光纤的射线分析帮助我们形象直观地理解光在光纤中的传播，如数值孔径、光纤自聚集等。光纤的波动分析包括光纤射线分析。
- 由于光纤纤芯折射率比包层折射率稍大，光纤在纤芯中几乎与轴平行，场的纵向分量很小，因而可用标量波动分析近似。

复习范围

6.7, 6.8.1