

电磁场与电磁波

作业：6.20

第18讲

6.5 平板介质波导

- 平板介质波导的横向谐振原理
- 单层平板介质光波导
- 条形介质光波导的近似分析 – – EDC法

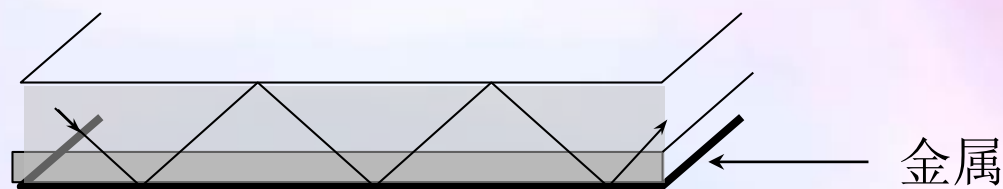
魏兴昌

浙江大学

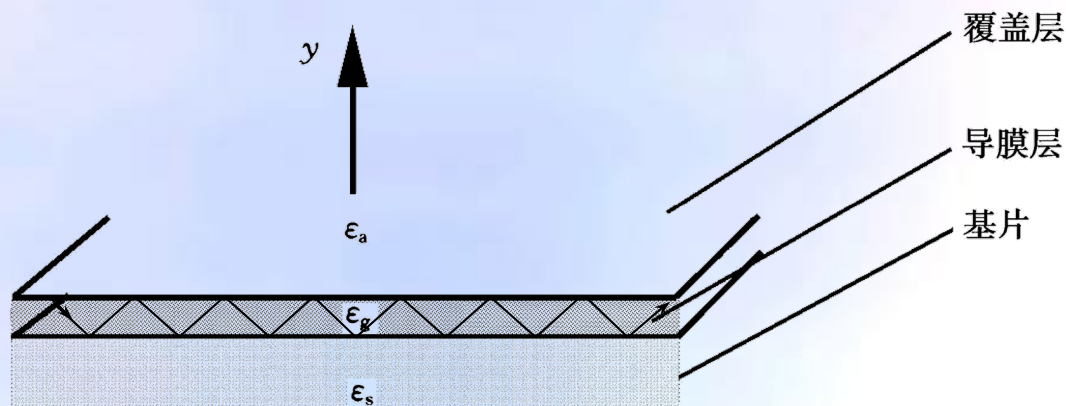
weixc@zju.edu.cn

- 平板介质波导的横向谐振原理
- 单层平板介质光波导
- 条形介质光波导的近似分析 – EDC 法

- 导模层介电常数大于两旁的介电常数，入射角大于临界角，发生全内反射。
- 内部区域波来回反射一次相移为 $2n\pi$ 。



(a) 毫米波介质波导

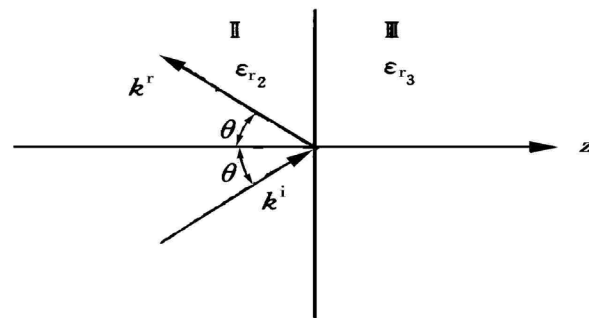


(b) 平板介质光波导

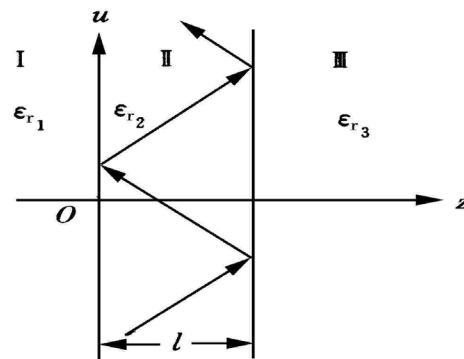
■ 光从密媒质到疏媒质的全反射

求解思路：

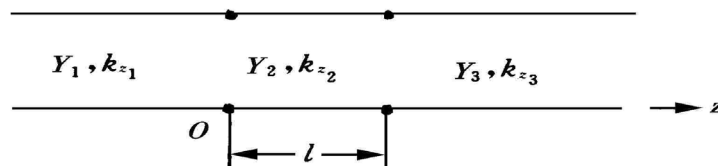
- 单层平板介质波导的横向等效电路
- 单层平板介质波导横向等效电路的进一步简化



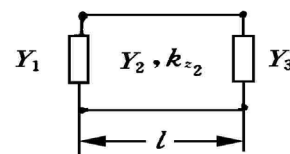
a



b



c



d

平板介质波导的横向谐振原理

5

横向谐振原理：

对于任意 z ，向 z 的左右区域看进去的输入阻抗或导纳之和等于零。

$$\tilde{Y}(z) + \bar{Y}(z) = 0$$

又根据

$$\begin{cases} \bar{Y}(z) = Y_2 \frac{1 - \tilde{\Gamma}(z)}{1 + \tilde{\Gamma}(z)} \\ \tilde{Y}(z) = Y_2 \frac{1 - \bar{\Gamma}(z)}{1 + \bar{\Gamma}(z)} \end{cases}$$

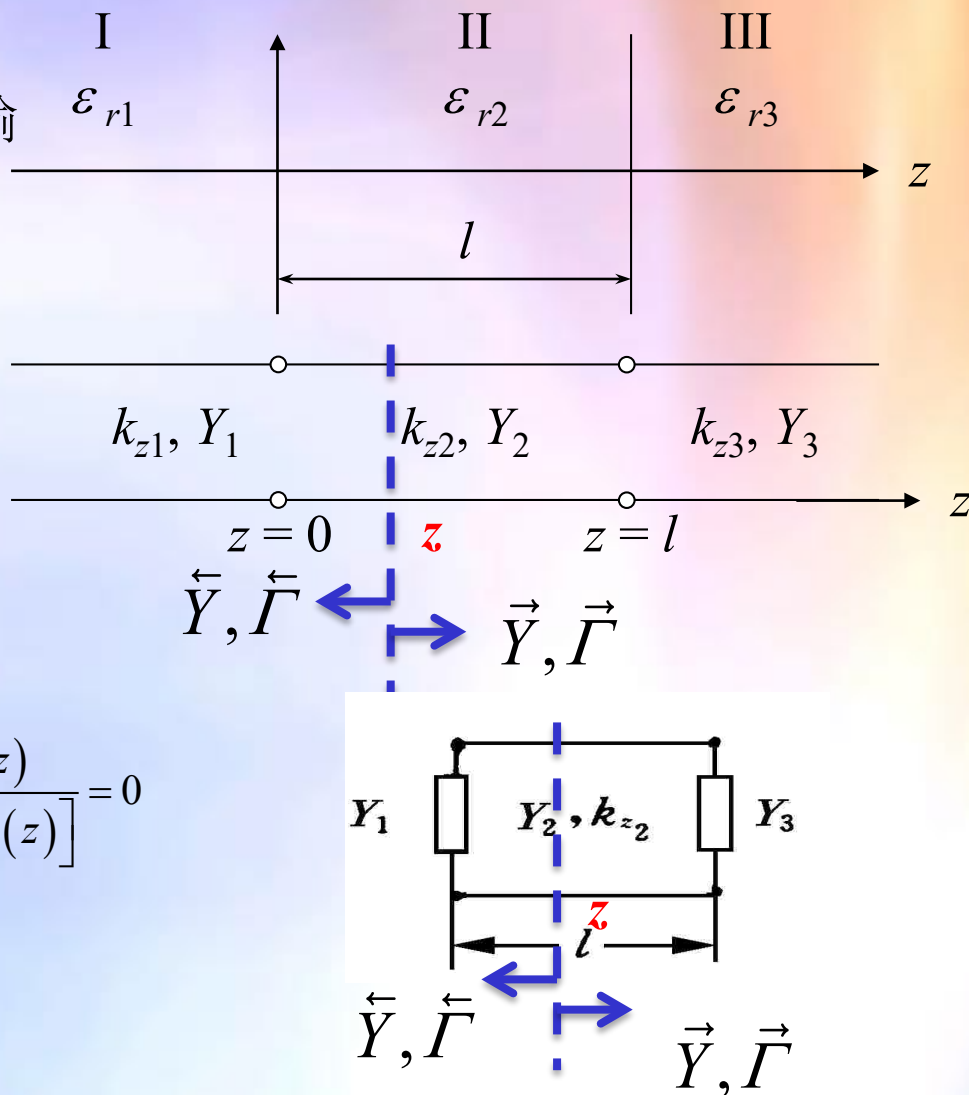
$$\frac{1 - \tilde{\Gamma}(z)}{1 + \tilde{\Gamma}(z)} + \frac{1 - \bar{\Gamma}(z)}{1 + \bar{\Gamma}(z)} = \frac{2 - 2\tilde{\Gamma}(z)\bar{\Gamma}(z)}{[1 + \tilde{\Gamma}(z)][1 + \bar{\Gamma}(z)]} = 0$$

得到

$$\tilde{\Gamma}(z)\bar{\Gamma}(z) = 1$$

进一步，可以证明

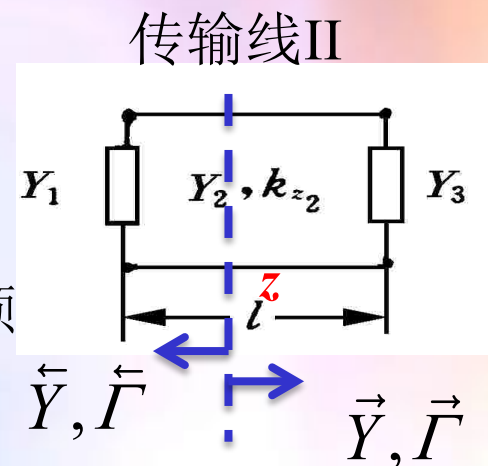
$$\tilde{\Gamma}(z)\bar{\Gamma}(z) = 1 \Leftrightarrow \tilde{Y}(z) + \bar{Y}(z) = 0$$



$$\vec{F}(z)\vec{F}^*(z)=1$$

因为 $|\vec{F}(z)| \leq 1, |\vec{F}^*(z)| \leq 1$, 为了使上式成立, 必须

$$|\vec{F}(z)| = |\vec{F}^*(z)| = 1$$



1. 传输线II上为纯驻波, Y_1 、 Y_3 为虚数 (包括开路、短路、电感、电容等)

如何形成该条件, 比如波以某一个角度从光密媒质入射到光疏媒质

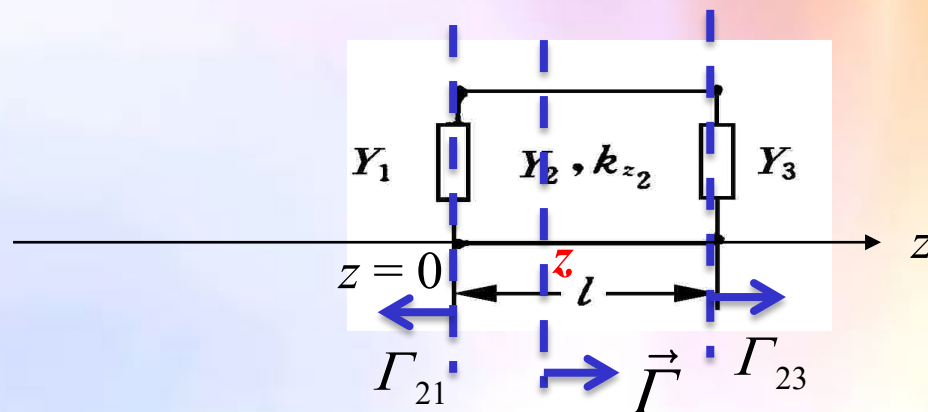
平板介质波导的横向谐振原理

7

令 $Y_1 = jx_1, Y_3 = jx_3$

x_1 和 x_3 为实数

$$\begin{cases} \Gamma_{23} = \frac{Y_2 - jx_3}{Y_2 + jx_3} = e^{-j2\varphi_3} \\ \Gamma_{21} = \frac{Y_2 - jx_1}{Y_2 + jx_1} = e^{-j2\varphi_1} \end{cases}$$



由于 $\begin{cases} \vec{\Gamma}(z) = \Gamma_{23} e^{-j2k_{z2}(l-z)} \\ \vec{\Gamma}(z) = \Gamma_{21} e^{-j2k_{z2}z} \end{cases}$

代入 $\vec{\Gamma}(z)\vec{\Gamma}(z)=1$ 得到

$$e^{-j2k_{z2}l}\Gamma_{23}\Gamma_{21}=1 \quad \rightarrow \quad 2. \quad \varphi_1 + \varphi_3 + k_{z2}l = n\pi, n=0,1,2\dots$$

平板介质波导的横向谐振原理

8

$$e^{-j2k_{z_2}l}\Gamma_{23}\Gamma_{21}=1$$

上式表明波在介质II沿z方向来回反射一次后，没有发生变化。

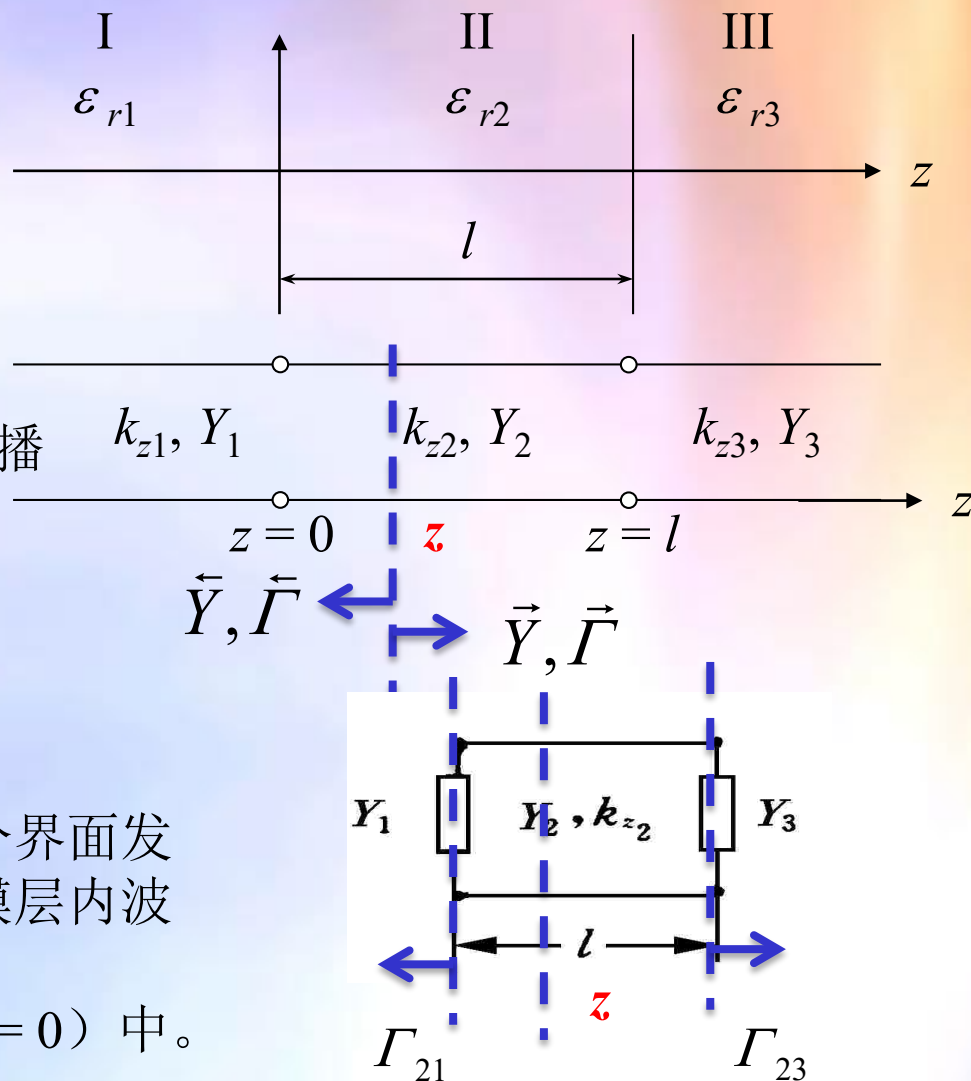
电磁波限制在导膜层（介质II）中传播的条件是

$$(1) \quad \varepsilon_{r_2} > \varepsilon_{r_1}, \quad \varepsilon_{r_2} > \varepsilon_{r_3}$$

$$(2) \quad \varphi_1 + \varphi_3 + k_{z_2}l = n\pi$$

条件（1）保证介质II与介质I、III分界面发生全内反射，条件（2）则保证导膜层内波来回反射一次总相移为 $2n\pi$ 。

（1）和（2）都含在 $\Sigma Y = 0$ （或 $\Sigma Z = 0$ ）中。



平板介质波导的横向谐振原理

区域II中的电压分布

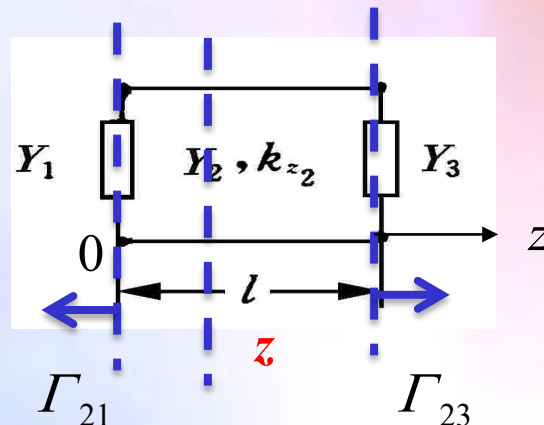
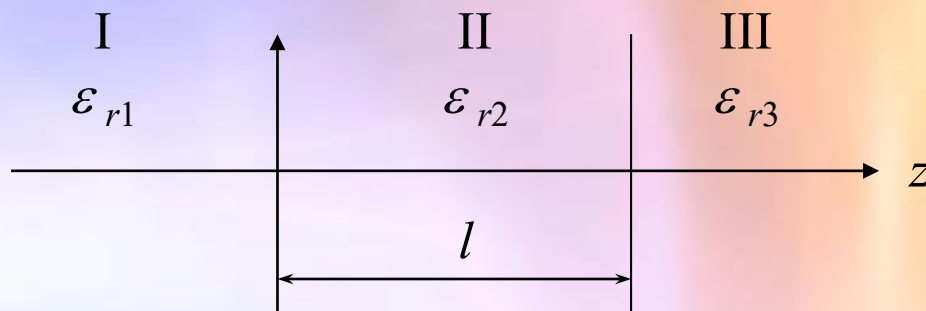
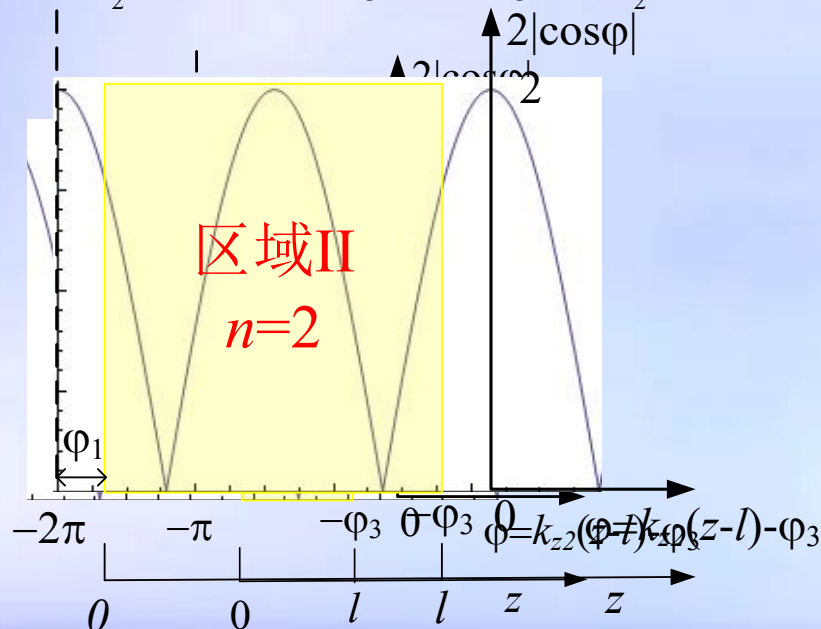
$$U(z) = (1 + \vec{\Gamma}(z)) U^i e^{-jk_{z_2} z}$$

$$\left| \frac{U(z)}{U^i e^{-jk_{z_2} z}} \right| = |1 + \vec{\Gamma}(z)| = |1 + \Gamma_{23} e^{-j2k_{z_2}(l-z)}|$$

$$= |1 + e^{-j2\varphi_3} e^{-j2k_{z_2}(l-z)}| = 2 |\cos(k_{z_2}(z-l) - \varphi_3)|$$

当 z 在0和 l 之间变化, 考虑 $\varphi_1 + \varphi_3 + k_{z_2} l = n\pi$

$$-\varphi_3 \geq k_{z_2}(z-l) - \varphi_3 \geq -\varphi_3 - k_{z_2} l = \varphi_1 - n\pi$$



$$[\varphi_1 - n\pi, -\varphi_3]$$

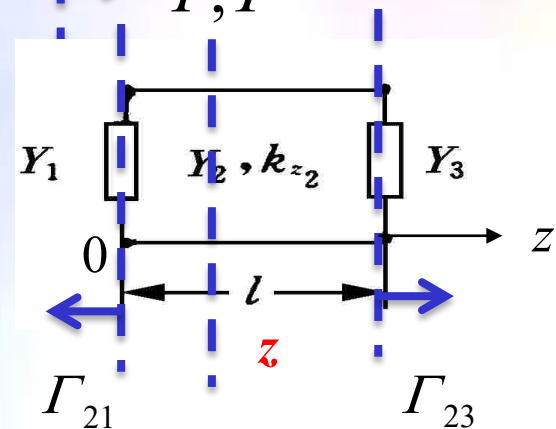
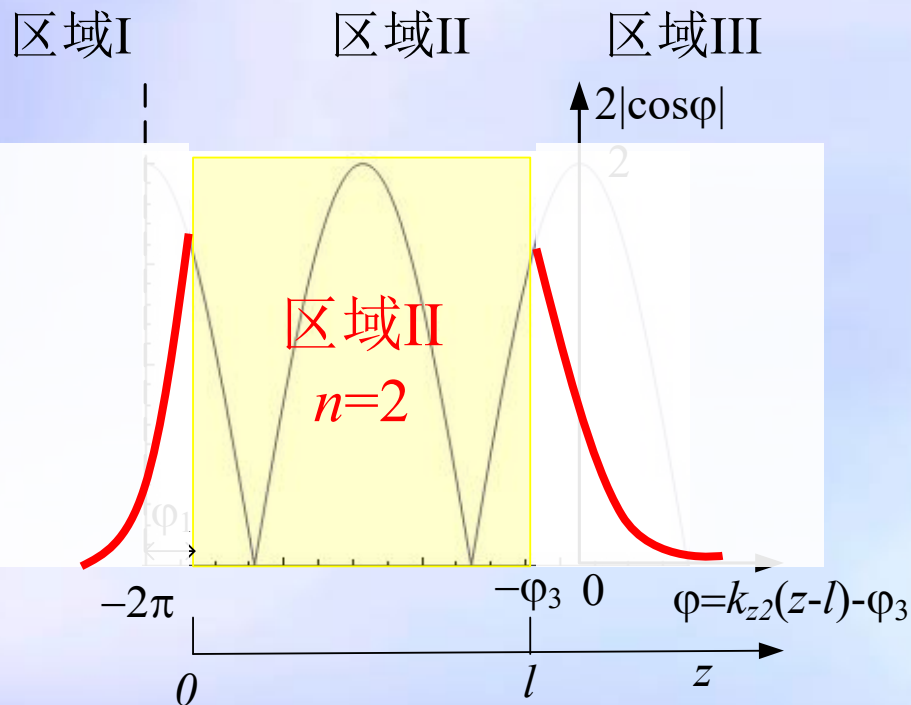
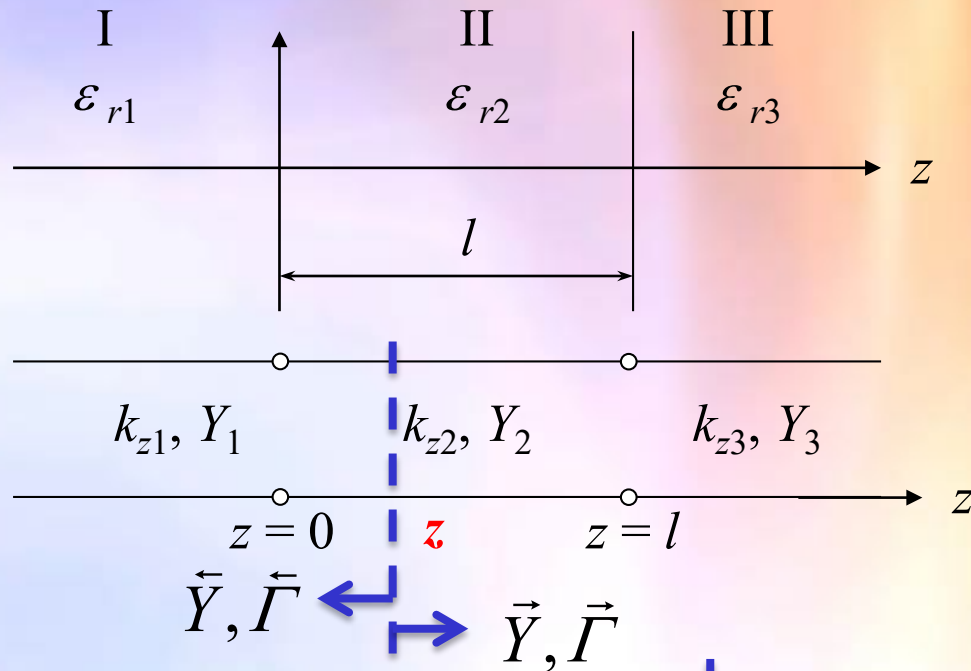
可视区域

平板介质波导的横向谐振原理

区域I、III中的电压分布

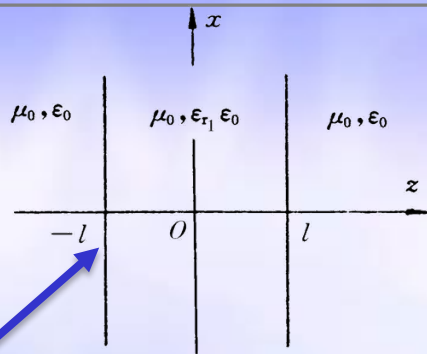
$$Z_i = \frac{1}{Y_i} = \begin{cases} \omega\mu / k_{zi} & \text{TE模} \\ k_{zi} / \omega\epsilon_i & \text{TM模} \end{cases}$$

因为 Y_1 、 Y_3 为虚数， k_{z1} 、 k_{z3} 也为虚数，
区域I、III中的电压按照指数衰减

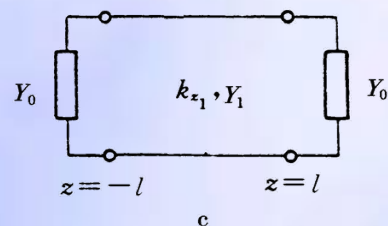


- 平板介质波导的横向谐振原理
- 单层平板介质光波导
- 条形介质光波导的近似分析 – EDC 法

单层平板介质光波导



本证坐标系下



$$k_{z_0}, Y_0 (= \frac{1}{z_0}) \quad k_{z_1}, Y_1 (= \frac{1}{z_1}) \quad k_{z_0}, Y_0 (= \frac{1}{z_0})$$

$$z = -l \quad z = l$$

对称单层平板介质波导
及其等效电路

$$k_0^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_0, k_1 = k_0 \sqrt{\epsilon_{r1}}$$

$$\begin{cases} k_{z0} = \sqrt{k_0^2 - k_x^2} = -j\sqrt{k_x^2 - k_0^2} = -j\alpha_0 & \alpha_0 = \sqrt{k_x^2 - k_0^2} \\ k_{z1} = \sqrt{k_0^2 \epsilon_{r1} - k_x^2} \end{cases}$$

为了得到沿x方向传输的波，要求 k_{z1} 是实数， k_{z0} 是虚数。
所以 k_1 、 k_0 和 k_x 需要满足如下关系：

$$k_0 < k_x < k_1$$

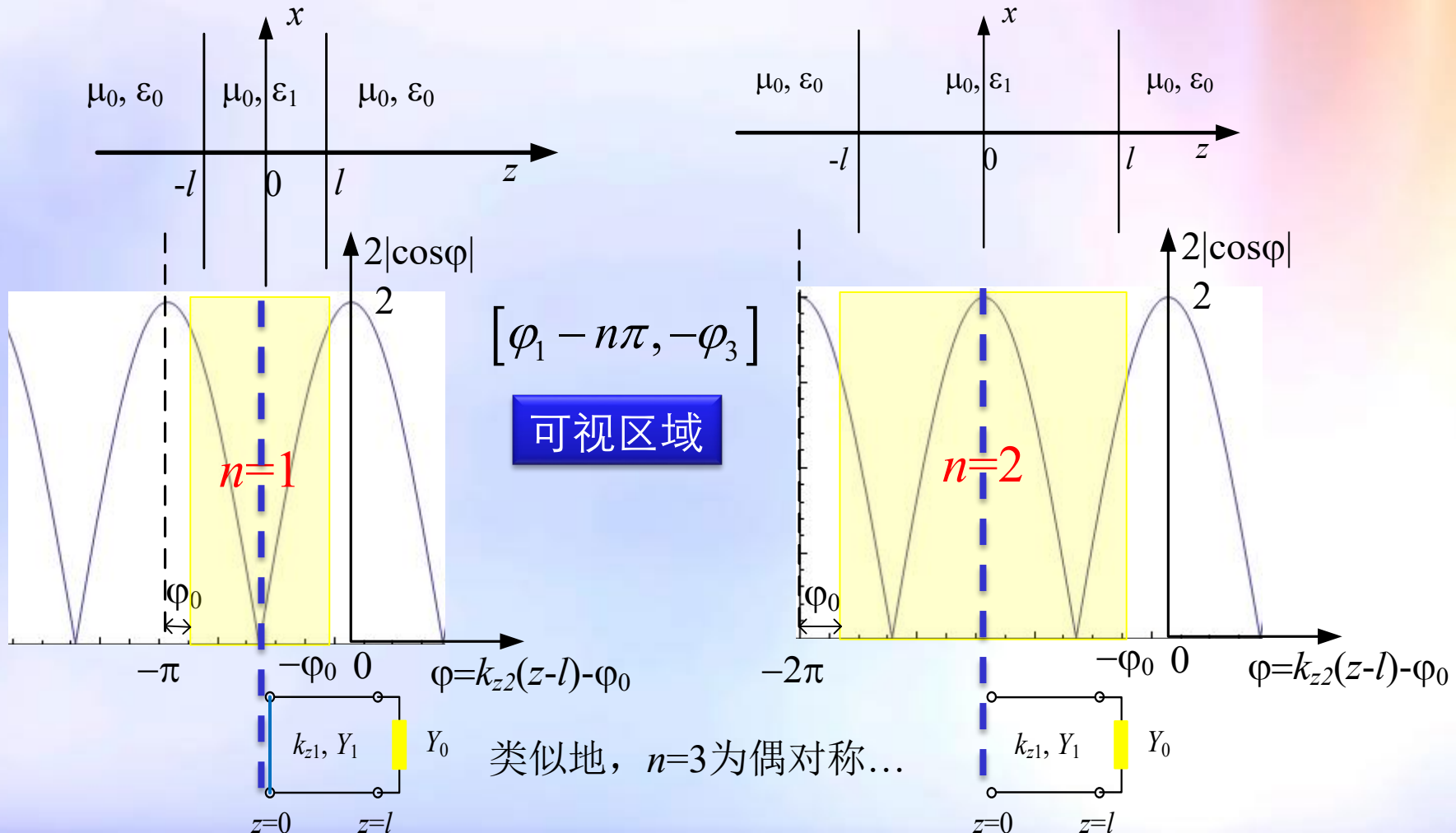
单层平板介质光波导

为了求解方便，分为奇偶对称问题考虑

对称面 ($z=0$) 为波节，相当
于短路，偶对称

$$\varphi_1 = \varphi_3 = \varphi_0$$

对称面 ($z=0$) 为波腹，相当
于开路，奇对称



电磁波沿对称结构的单层平板介质光波导的传播可以分为四种情况

对称面开路 $\begin{cases} \text{TE模} \\ \text{TM模} \end{cases}$

对称面短路 $\begin{cases} \text{TE模} \\ \text{TM模} \end{cases}$

下面研究这四种情况下的色散方程：关于 $k_x - f$ 的方程。

在 $z=l$ 处利用横向谐振原理，得到

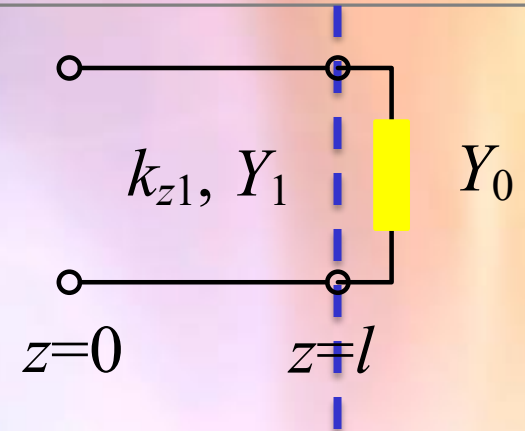
$$\vec{Y} + \vec{Y} = 0$$

$$\vec{Y} = Y_0$$

$$\vec{Y} = jY_1 \tan(k_{z1}l)$$

$$Y_i = \begin{cases} \frac{k_{zi}}{\omega\mu_0} & \text{TE模} \\ \frac{\omega\epsilon_{ri}\epsilon_0}{k_{zi}} & \text{TM模} \end{cases} \quad k_{zi} = \sqrt{k_0^2 \epsilon_{ri} - k_x^2} \quad i=0,1$$

$$Y_0 + jY_1 \tan(k_{z1}l) = 0$$



对称面开路TE模

$$\begin{cases} Y_0 = k_{z0}/\omega\mu \\ Y_1 = k_{z1}/\omega\mu \end{cases} \quad \begin{cases} k_{z0} = -j\alpha_0 = -j\sqrt{k_x^2 - k_0^2} \\ k_{z1} = \sqrt{k_0^2 \epsilon_{r1} - k_x^2} \end{cases}$$

$$Y_0 + jY_1 \tan(k_{z1}l) = 0$$

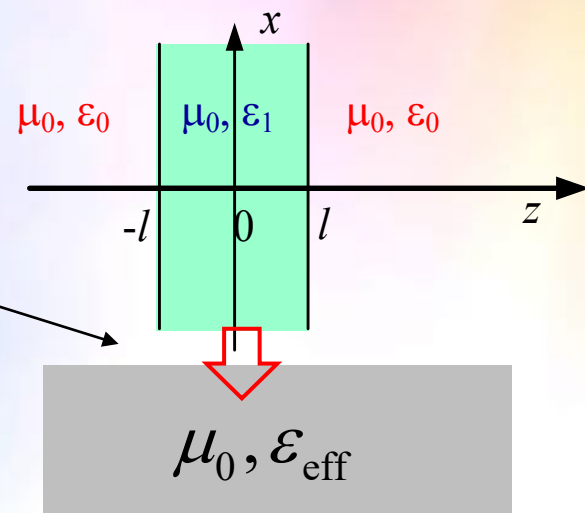
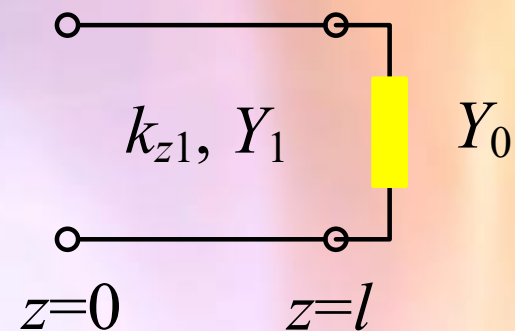
$$-j\frac{\alpha_0}{\omega\mu} + j\frac{k_{z1}}{\omega\mu} \tan(k_{z1}l) = 0$$

引入有效介电常数 $\epsilon_{\text{eff}} \equiv (k_x/k_0)^2$

$$\tan(k_0 l \sqrt{\epsilon_{r1} - \epsilon_{\text{eff}}}) = \sqrt{\frac{\epsilon_{\text{eff}} - 1}{\epsilon_{r1} - \epsilon_{\text{eff}}}}$$

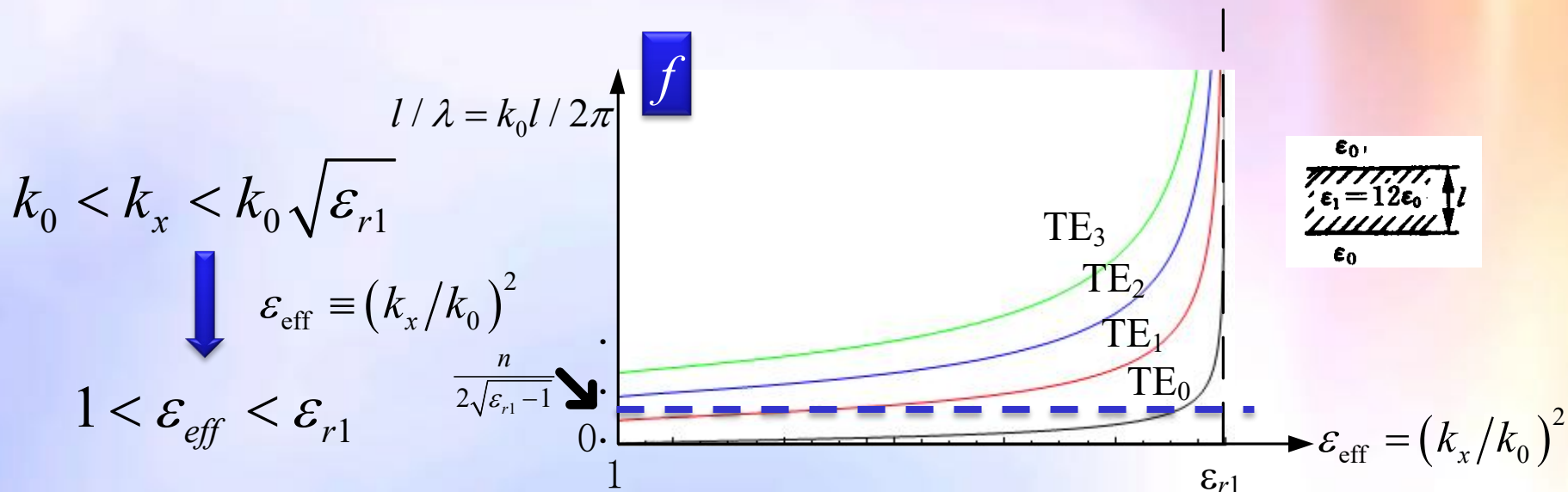
$$k_0 l = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_{r1} - \epsilon_{\text{eff}}}} \left[n\pi + \arctan \sqrt{\frac{\epsilon_{\text{eff}} - 1}{\epsilon_{r1} - \epsilon_{\text{eff}}}} \right]$$

对称面开路、TE模式的色散方程



$$n = 0, 1, 2, \dots$$

$$k_0 l = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_{r1} - \epsilon_{\text{eff}}}} \left[n\pi + \arctan\left(\sqrt{\frac{\epsilon_{\text{eff}} - 1}{\epsilon_{r1} - \epsilon_{\text{eff}}}}\right) \right] \quad n = 0, 1, 2, \dots$$



1. $k_0 l$ 随 ϵ_{eff} 单调增加。

2. 截止波数：在色散曲线上，对于某一个模式的最低工作频率

$$k_{cn} = k_0 \Big|_{\epsilon_{\text{eff}}=1} = \frac{n\pi}{l\sqrt{\epsilon_{r1}-1}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

截止角频率

$$\omega_{cn} = \frac{k_{cn}}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_1}}$$

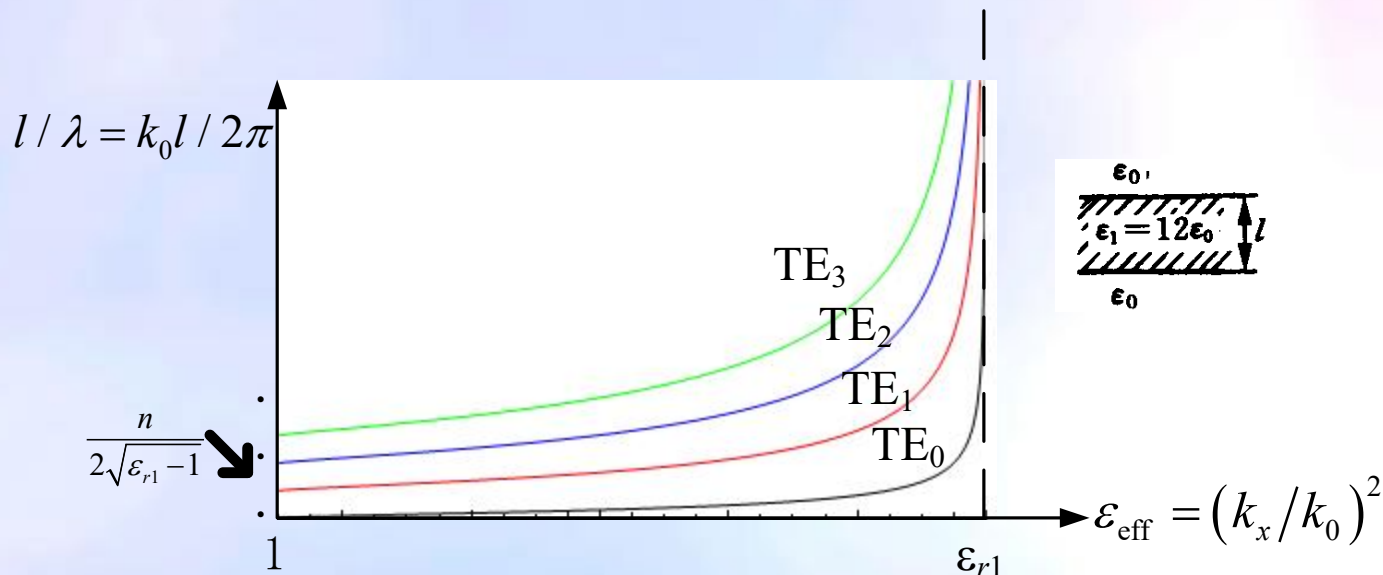
对于 TE_n 模，当 $\omega \leq \omega_{cn}$ 时，曲线 $\omega = \text{常数}$ 与 TE_n 曲线无交点，即满足 $k_0 < k_x < k_0 \sqrt{\epsilon_{r1}}$ 的 k_x 不存在，无 x 方向的传输波。

对称面开路TE模

TE₀模不存在截止频率。

$$k_0 l = \frac{\arctan \sqrt{\frac{\epsilon_{\text{eff}} - 1}{\epsilon_{r1} - \epsilon_{\text{eff}}}}}{\sqrt{\epsilon_{r1} - \epsilon_{\text{eff}}}}$$

3. 对于TE₀模，当 $k_0 l = 0$ 时， $\epsilon_{\text{eff}} = 1$ ，对应于介质板不存在。而当 $k_0 l$ 趋于无穷大时， $\epsilon_{\text{eff}} = \epsilon_{r1}$ ，对应于全空间都为介质板。



对称面开路TM模

$$\begin{cases} Y_0 = \omega \varepsilon_0 / k_{z0} \\ Y_1 = \omega \varepsilon_{r1} \varepsilon_0 / k_{z1} \end{cases} \quad \begin{cases} k_{z0} = -j\alpha_0 = -j\sqrt{k_x^2 - k_0^2} \\ k_{z1} = \sqrt{k_0^2 \varepsilon_{r1} - k_x^2} \end{cases}$$

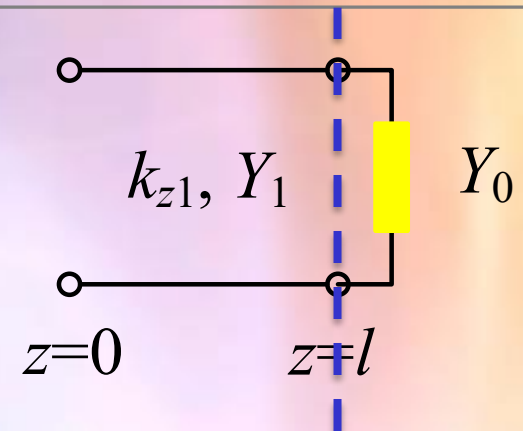
$$Y_0 + jY_1 \tan(k_{z1}l) = 0$$

$$j \frac{\omega \varepsilon_0}{\alpha_0} + j \frac{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_{r1}}{k_{z1}} \tan(k_{z1}l) = 0$$

$$\tan(k_0 l \sqrt{\varepsilon_{r1} - \varepsilon_{\text{eff}}}) = -\frac{1}{\varepsilon_{r1}} \sqrt{\frac{\varepsilon_{r1} - \varepsilon_{\text{eff}}}{\varepsilon_{\text{eff}} - 1}}$$

$$k_0 l = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_{r1} - \varepsilon_{\text{eff}}}} \left[n\pi - \arctan \left(\frac{1}{\varepsilon_{r1}} \sqrt{\frac{\varepsilon_{r1} - \varepsilon_{\text{eff}}}{\varepsilon_{\text{eff}} - 1}} \right) \right]$$

对称面开路、TM模式的色散方程

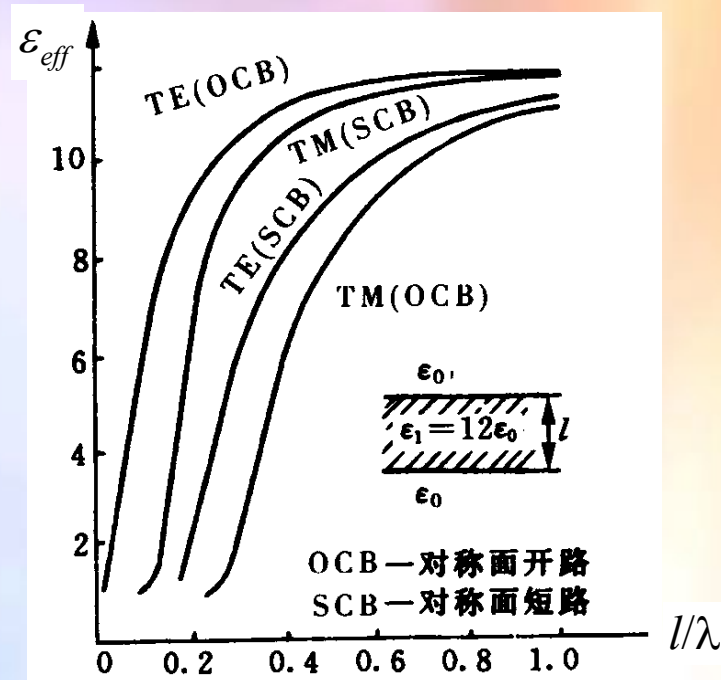


$$\varepsilon_{\text{eff}} \equiv (k_x / k_0)^2$$

$$n=1,2,3\dots$$

为了保证 $k_0 l > 0$, $n \neq 0$

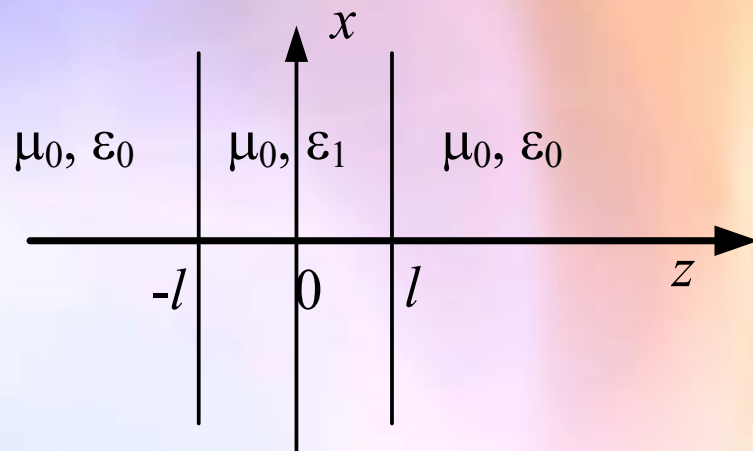
图中给出了对称面开路（TE、TM模）和短路（TE、TM模）四种情况下最低模的色散特性。TE₀模是最低模。



对称单层平板介质的色散关系

以对称面开路TE模为例

$$\begin{cases} E_{yi}(x, z) = -\varphi_i(x)U_i(z) \\ H_{xi}(x, z) = \varphi_i(x)I_i(z) \\ H_{zi}(x, z) = \frac{1}{j\omega\mu} \frac{\partial}{\partial x} E_{yi}(x, z) \end{cases} \quad i=0,1$$



根据边界条件， x 方向都是均匀的，因而模式函数

$$\varphi_0(x) = \varphi_1(x) = e^{-jk_x x}$$

表示 z 方向场分布的电压 $U_1(z)$ 、电流 $I_1(z)$ 为

$$\begin{cases} U_1(z) = \frac{1}{2}(a e^{-jk_{z1}z} + b e^{jk_{z1}z}) \\ I_1(z) = \frac{1}{2}Y_1(a e^{-jk_{z1}z} - b e^{jk_{z1}z}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} U_1(z) = \frac{1}{2}(a e^{-jk_{z1}z} + b e^{jk_{z1}z}) \\ I_1(z) = \frac{1}{2}Y_1(a e^{-jk_{z1}z} - b e^{jk_{z1}z}) \end{cases}$$

对称面开路时，对称面电压为波腹，电流 $I_1(0)=0$ ，代入上式得到 $b=a$ 。

$$U_1(z) = a \cos(k_{z1}z) \quad I_1(z) = -ja \frac{k_{z1}}{\omega\mu} \sin(k_{z1}z)$$

平板介质内场量可表示成

$$E_{y1}(x, z) = -a e^{-jk_x x} \cos(k_{z1}z)$$

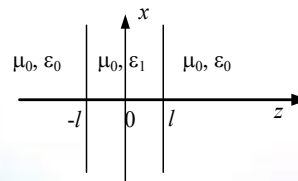
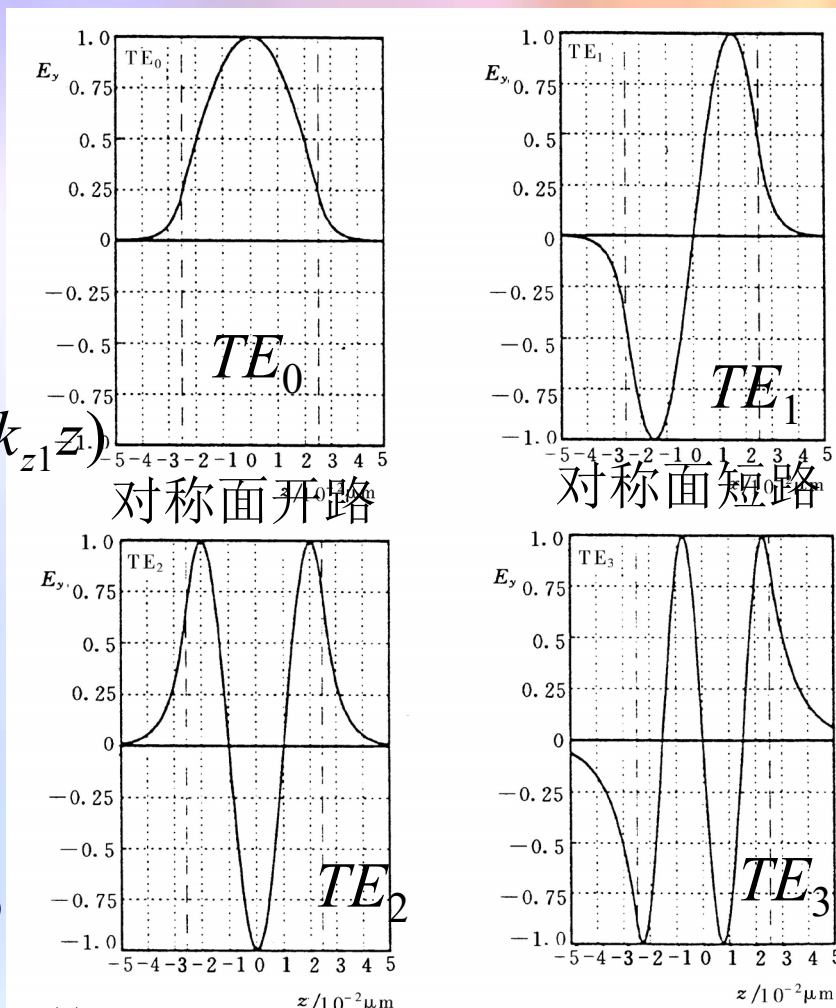
$$H_{x1}(x, z) = -ja \frac{k_{z1}}{\omega\mu} e^{-jk_x x} \sin(k_{z1}z)$$

$$H_{z1}(x, z) = \frac{k_x}{\omega\mu} a e^{-jk_x x} \begin{cases} \cos(k_{z1}z) \\ E_{y0} = -c e^{-jk_x x} e^{-\alpha_0(|z|-l)} \end{cases}$$

平板介质以外的空间

$$\begin{cases} H_{x0} = -j \frac{\alpha_0}{\omega\mu} c e^{-jk_x x} e^{-\alpha_0(|z|-l)} \\ H_{z0} = \frac{k_x}{\omega\mu} c e^{-jk_x x} e^{-\alpha_0(|z|-l)} \end{cases}$$

单层平板介质波导中的电场分布

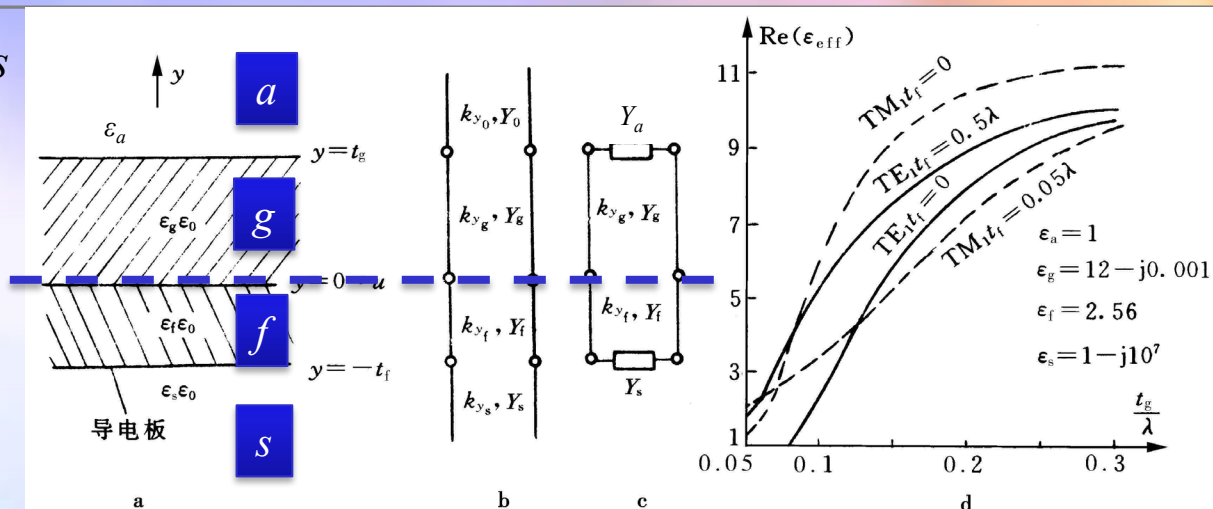


非对称毫米波介质波导色散关系

$$k_{yi}^2 = k_0^2 \epsilon_{ri} - k_x^2 \quad i=a,g,f,s$$

$$Y_i = \begin{cases} k_{yi}/\omega\mu & \text{TE模} \\ \omega\epsilon_{ri}\epsilon_0/k_{yi} & \text{TM模} \end{cases}$$

$$Y^\uparrow + Y^\downarrow = 0$$



取 $y=0$ 为参考面

$$Y^\uparrow = Y_g \frac{Y_a + jY_g \tan(k_{yg}t_g)}{Y_g + jY_a \tan(k_{yg}t_g)}$$

色散方程为

$$Y^\downarrow = Y_f \frac{Y_s + jY_f \tan(k_{yf}t_f)}{Y_f + jY_s \tan(k_{yf}t_f)}$$

$$Y_g \frac{Y_a + jY_g \tan(k_{yg}t_g)}{Y_g + jY_a \tan(k_{yg}t_g)} + Y_f \frac{Y_s + jY_f \tan(k_{yf}t_f)}{Y_f + jY_s \tan(k_{yf}t_f)} = 0$$

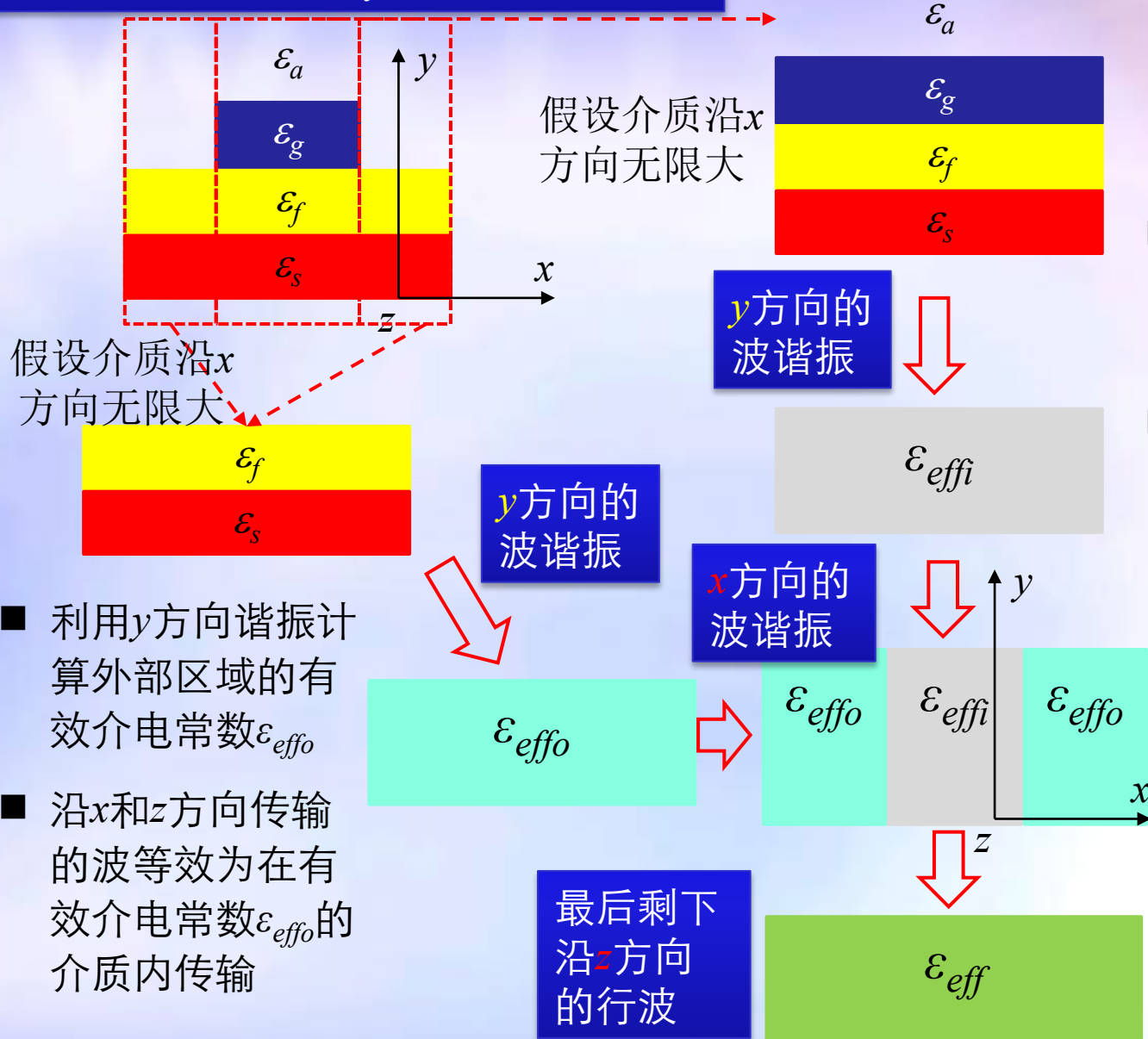
将 $k_{yi}^2 = k_0^2 \epsilon_{ri} - k_x^2$ 代入，可进一步求得色散曲线

$$\epsilon_{\text{eff}} = \left(k_x / k_0 \right)^2$$

条形介质光波导的近似分析——EDC法

24

电磁波分解为沿x、y、z方向的三个波

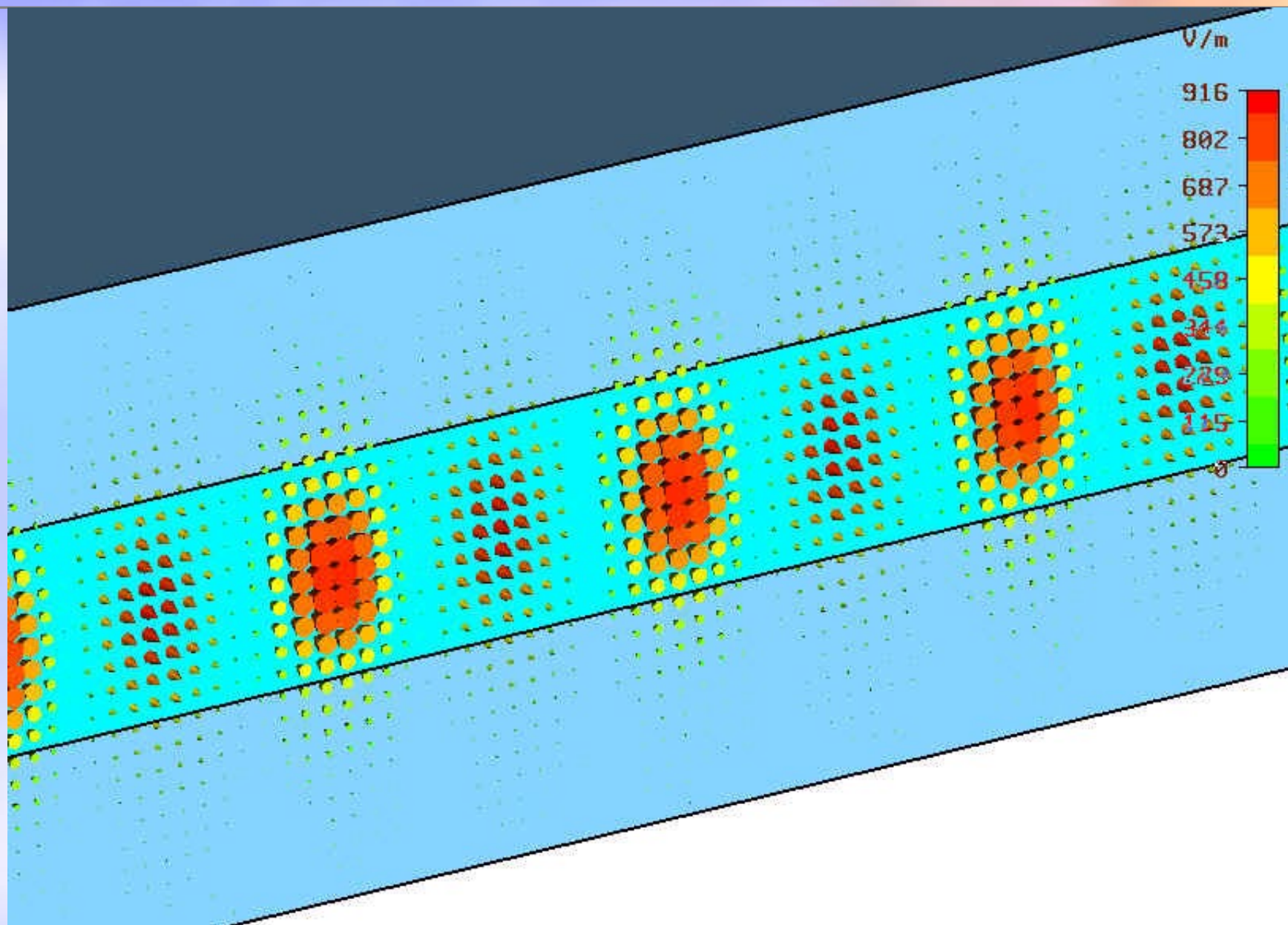


- 利用y方向谐振计算内部区域的有效介电常数 ϵ_{effi}
- 沿x和z方向传输的波等效为在有效介电常数 ϵ_{effi} 的介质内传输
- 利用x方向谐振计算有效介电常数 ϵ_{effo}
- 沿z方向传输的波等效为在有效介电常数 ϵ_{eff} 的介质内传输

- EDC方法考虑了 x 和 y 两个方向的横向谐振（二维）；
- 忽略了内、外区域交界面的不连续效应，因而内、外两区域的等效传输线可直接连接。

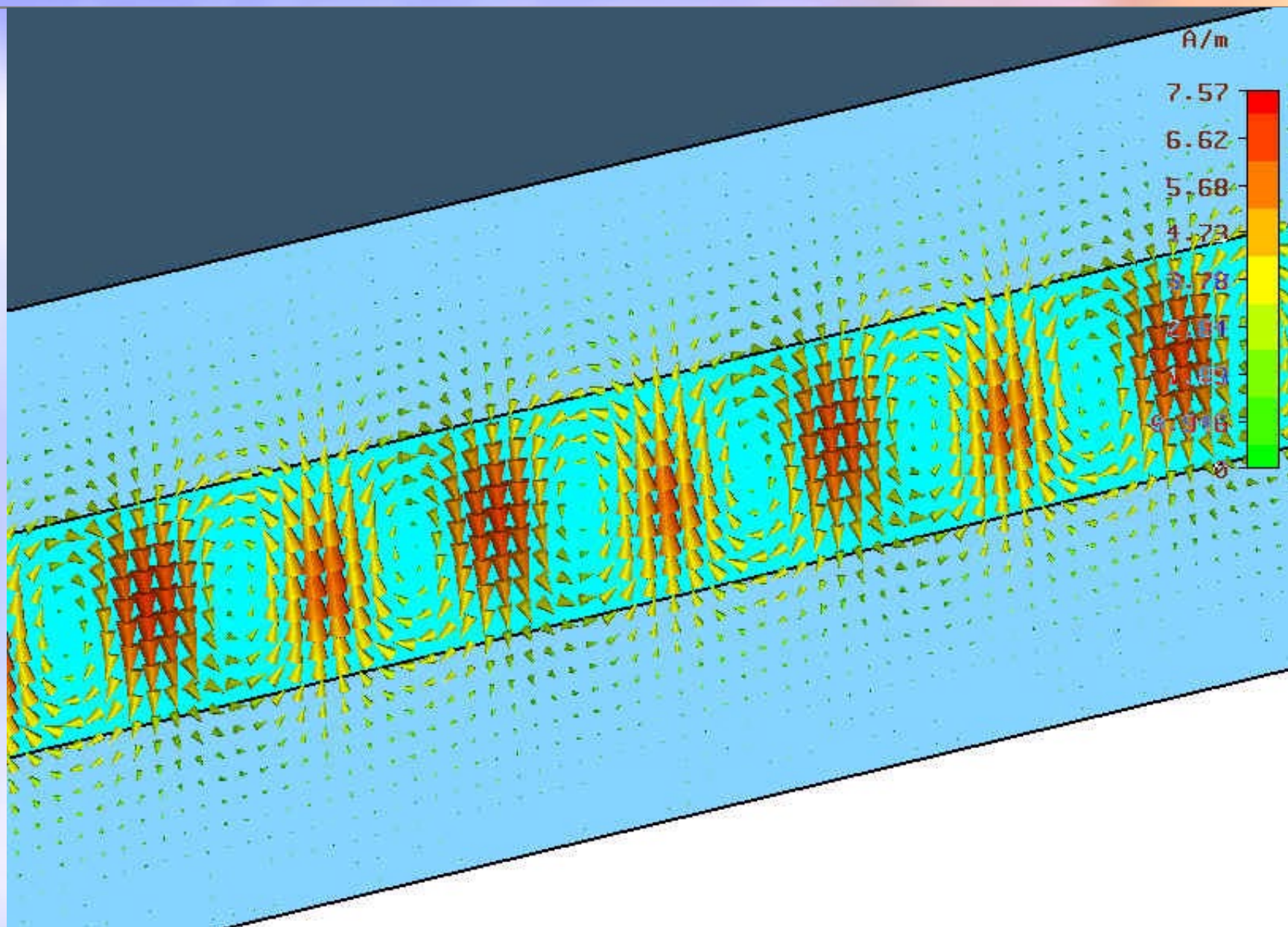
平板介质波导（纵切面电场）

26



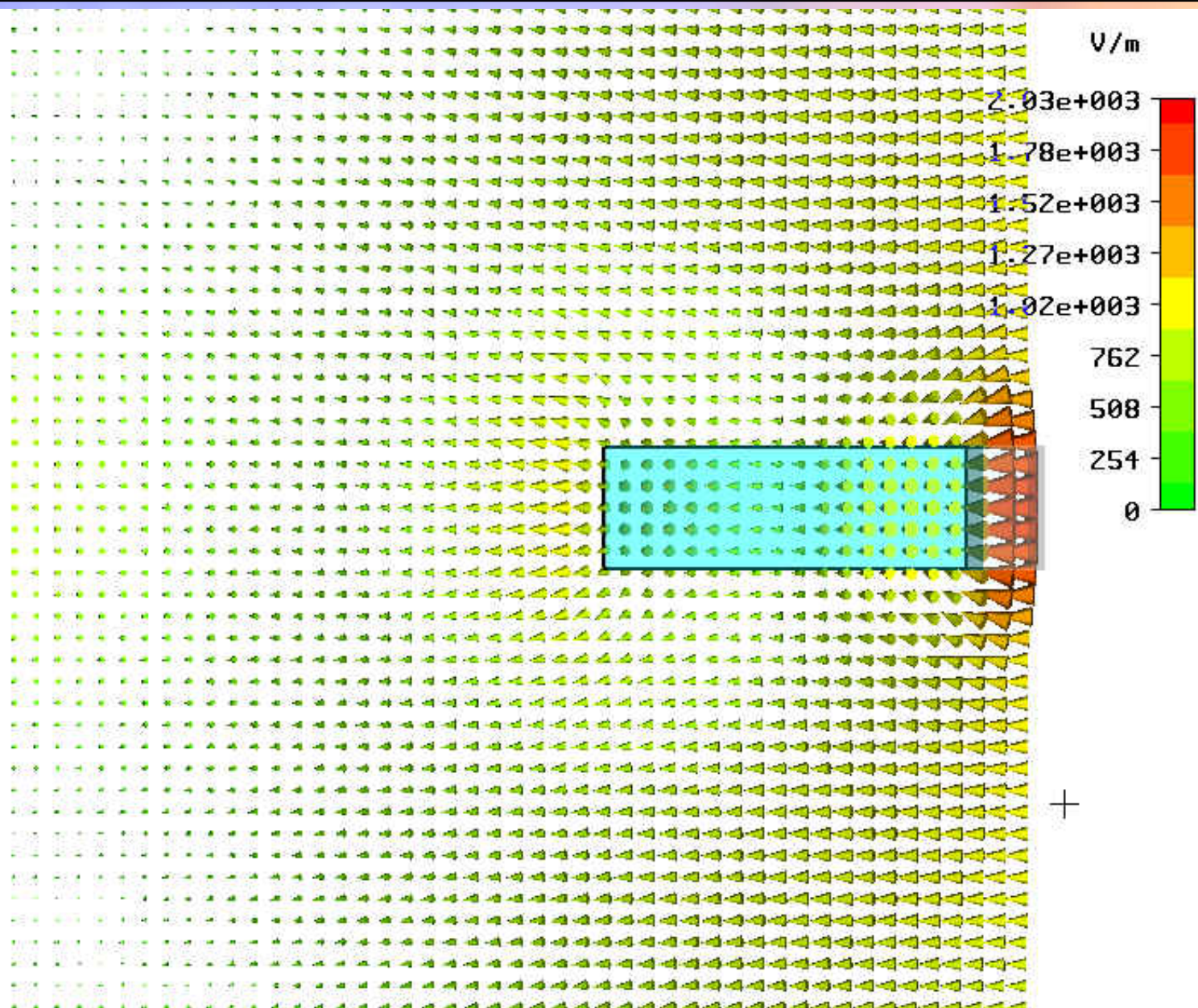
平板介质波导（纵切面磁场）

27



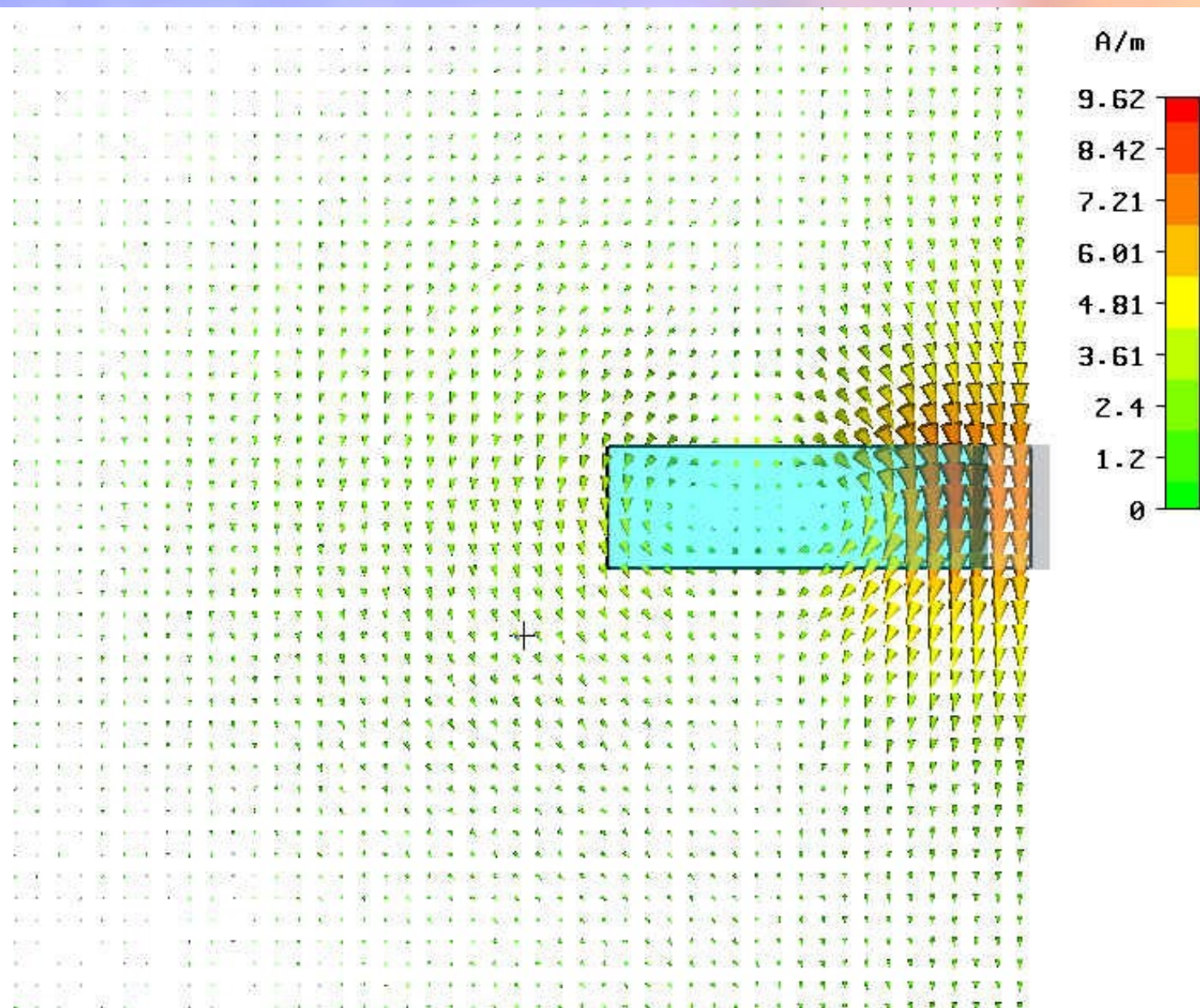
条形介质波导（横向电场）

28



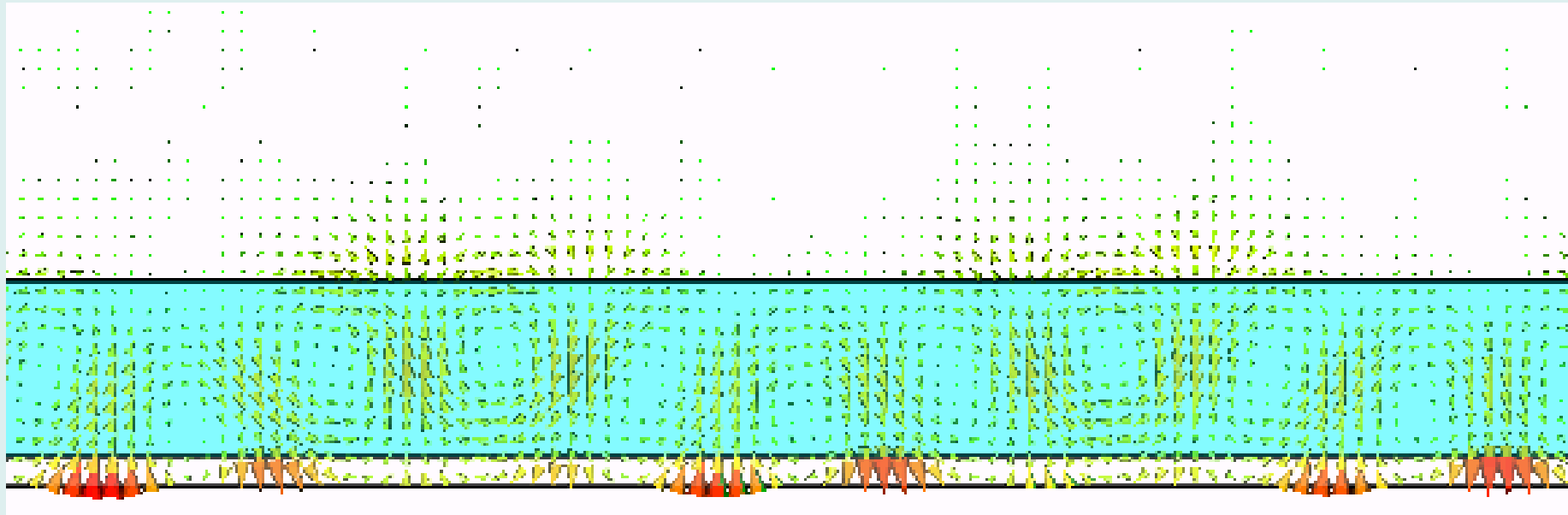
条形介质波导（横向磁场）

29



条形介质波导（行波）

30



复习要点

- 波沿纵向无衰减传播，横向场分布必然是驻波，发生谐振，称为波导的横向谐振原理。
- 多层平板介质波导横向可用级联的传输线等效，利用横向谐振原理就可得出多层平板介质波导的色散关系，并可进一步用传输线模型得到横截面场分布。
- 条形介质波导的EDC法是一种近似分析方法，其计算过程归结为多层介质波导的计算。当条形介质的宽度比高度大时，这种方法可满足工程应用需要。

复习范围

6.5