

# 电磁场与电磁波

## 第16讲

6.2 矩形波导

6.3 圆波导

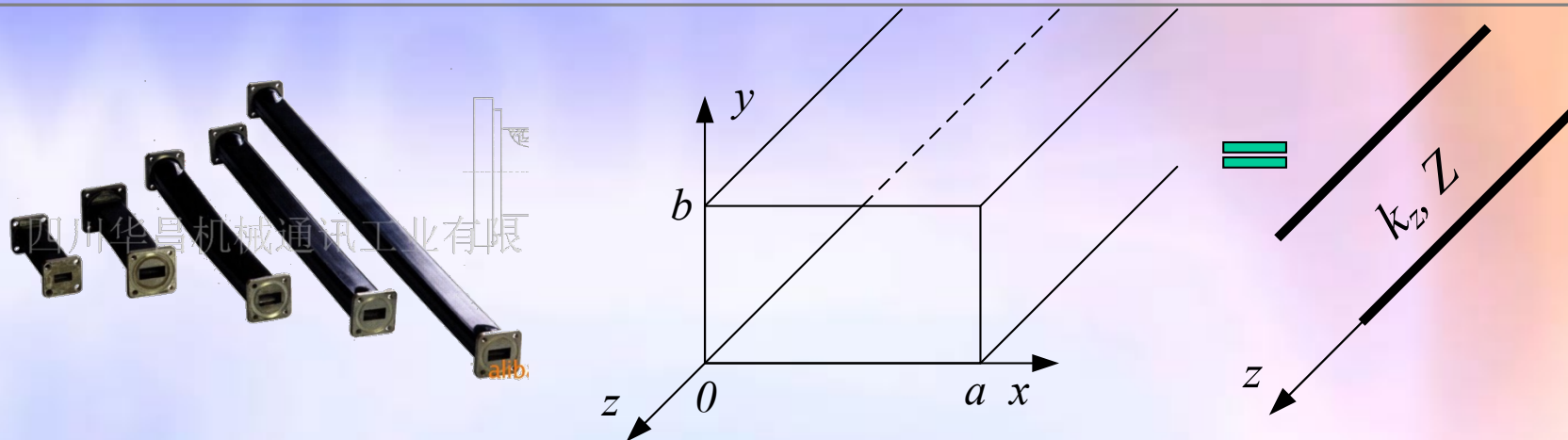
作业： 6.1, 6.5, 6.7, 6.10, 6.11, 6.14, 6.15

魏兴昌

浙江大学

weixc@zju.edu.cn

# 矩形波导的传输线模型



矩形波导

矩形波导的传输线模型：

- (1) 将电磁波沿矩形波导纵向的传播等效为传输线上电压、电流的传播；
- (2) 将解 $\mathbf{E}$ 与 $\mathbf{H}$ 的三维波方程简化为解模式函数 $e(\rho)$ 或 $h(\rho)$ 的二维特征波方程与一维的传输线方程。

要确定的是：

- (1) 表示矩形波导横截面场分布的模式函数 $e(\rho)$ 或 $h(\rho)$ ；
- (2) 等效传输线的传播常数 $k_z$ 及特征阻抗 $Z$ ，这两个参数决定了波沿纵向的传播特性。

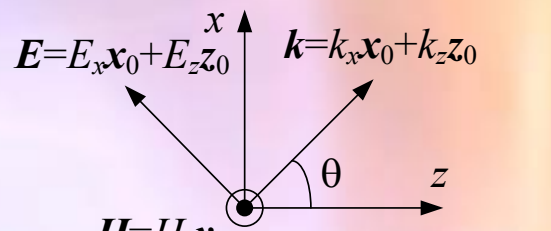
# 模式函数 $e(\rho)$ 、 $h(\rho)$ 与其幅值 $U(z)$ 、 $I(z)$ 的定义

表 6-1

| TE                                                | TM                                                           |
|---------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------|
| $E' = E'_t$                                       | $E'' = E''_t + E''_z z_0$                                    |
| $H' = H'_t + H'_z z_0$                            | $H'' = H''_t$                                                |
| $E'_t = e'(\rho)U'(z)$                            | $E''_t = e''(\rho)U''(z)$                                    |
| $H'_t = h'(\rho)I'(z)$                            | $H''_t = h''(\rho)I''(z)$                                    |
| $H'_z = \frac{j}{\omega\mu} \nabla_t \times E'_t$ | $E''_z = \frac{1}{j\omega\varepsilon} \nabla_t \times H''_t$ |

类似于

TM波



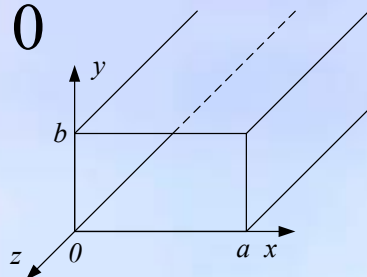
$$\begin{cases} H_y = H_0 e^{-jk_x x} e^{-jk_z z} = \varphi(x) I(z) \\ E_x = \frac{k_z}{\omega\varepsilon} H_0 e^{-jk_x x} e^{-jk_z z} = \varphi(x) U(z) \end{cases}$$

$$\varphi(x) = e^{-jk_x x}$$

1. 模式函数 $e(\rho)$ 或 $h(\rho)$ 表示波导横截面内场分布，满足方程

$$(\nabla_t^2 + k_t^2) \begin{cases} e'(\rho) \\ h''(\rho) \end{cases} = 0$$

$$\nabla_t^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$



3. 两者的联系

$$k_t^2 + k_z^2 = k^2 = \omega^2 \mu \varepsilon$$

2. 模式函数的幅值 $U(z)$ 、 $I(z)$ 表示纵向的场分布，满足传输线方程

$$\begin{cases} \frac{dU(z)}{dz} = -jk_z Z I(z) \\ \frac{dI(z)}{dz} = -jk_z Y U(z) \end{cases}$$

$$Z = \frac{1}{Y} = \begin{cases} \omega\mu / k_z & \text{TE} \\ k_z / \omega\varepsilon & \text{TM} \end{cases}$$

# 用分离变量法求解模式函数满足的波方程

4

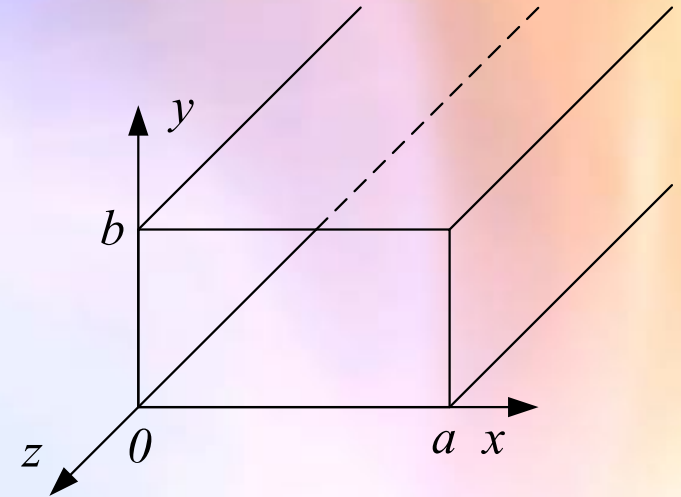
$$(\nabla_t^2 + k_t'^2) \begin{cases} \mathbf{e}'(\boldsymbol{\rho}), \text{TE} \\ \mathbf{h}''(\boldsymbol{\rho}), \text{TM} \end{cases} = 0 \quad k_t'^2 + k_z'^2 = k^2$$

TE模式模式函数分解为

$$\mathbf{e}'(x, y) = e'_x(x, y)\mathbf{x}_0 + e'_y(x, y)\mathbf{y}_0$$

$$(\nabla_t^2 + k_t'^2)e'_x(x, y) = 0 \quad \nabla_t^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$$(\nabla_t^2 + k_t'^2)e'_y(x, y) = 0$$



令  $e'_x(x, y) = \varphi_x(x)\varphi_y(y)$

得到 
$$\begin{cases} k_x'^2 + k_y'^2 = k_t'^2 \\ \left( \frac{d^2}{dx^2} + k_x'^2 \right) \varphi_x(x) = 0 \\ \left( \frac{d^2}{dy^2} + k_y'^2 \right) \varphi_y(y) = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \varphi_x(x) = A_1 \sin(k'_x x + \varphi_1) \\ \varphi_y(y) = A_2 \sin(k'_y y + \varphi_2) \end{cases}$$

所以  $e'_x(x, y) = A \sin(k'_x x + \varphi_1) \sin(k'_y y + \varphi_2)$

# 用分离变量法求解模式函数满足的波方程

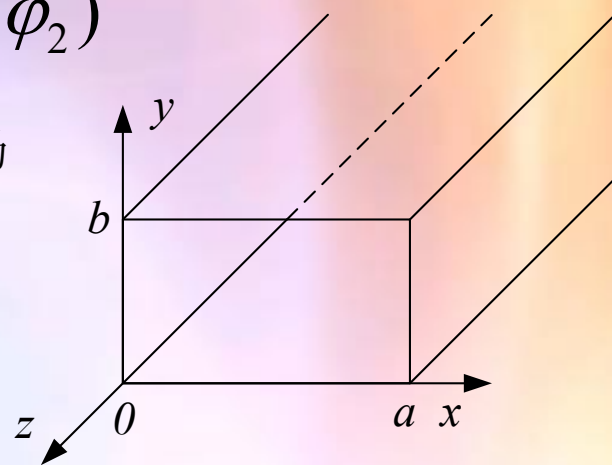
5

$$e'_x(x, y) = A \sin(k'_x x + \varphi_1) \sin(k'_y y + \varphi_2)$$

$e'$ 满足

$$\nabla_t \cdot \mathbf{e}' = \frac{\partial}{\partial x} e'_x + \frac{\partial}{\partial y} e'_y = 0 \quad \text{类似于无源区的静态场} \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = 0$$

得到  $e'_y(x, y) = -\frac{Ak'_x}{k'_y} \cos(k'_x x + \varphi_1) \cos(k'_y y + \varphi_2)$



应用边界条件：波导壁为完纯导体，其上切向电场分量为零。

$$\mathbf{E}'_t = [\hat{x}e'_x(x, y) + \hat{y}e'_y(x, y)] U'(z) \Big|_{\text{波导壁切向场}} = 0$$

$$e'_x(x, y) = 0 \quad (y = 0, b) \rightarrow \begin{cases} \varphi_2 = 0 \\ k'_y = n\pi/b \end{cases}$$

$$e'_y(x, y) = 0 \quad (x = 0, a) \rightarrow \begin{cases} \varphi_1 = \pi/2 \\ k'_x = m\pi/a \end{cases}$$

$$m, n = 0, 1, 2, \dots$$

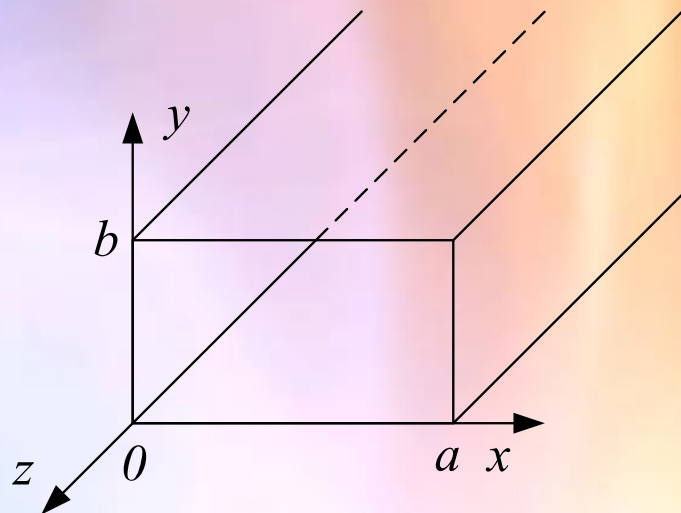
$k'_x, k'_y$  只在离散值上有解

# 用分离变量法求解模式函数满足的波方程

6

$e'_x(x, y), e'_y(x, y)$  同乘  $k'_y$

$$\begin{cases} e'_x(x, y) = A_{mn} \frac{n\pi}{b} \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \\ e'_y(x, y) = -A_{mn} \frac{m\pi}{a} \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \end{cases}$$



$\mathbf{h}'(x, y) = h'_x(x, y)\mathbf{x}_0 + h'_y(x, y)\mathbf{y}_0$  由  $\mathbf{h}'(\boldsymbol{\rho}) = \mathbf{z}_0 \times \mathbf{e}'(\boldsymbol{\rho})$  得到

$$\begin{cases} h'_y(x, y) = e'_x = A_{mn} \frac{n\pi}{b} \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \\ h'_x(x, y) = -e'_y = A_{mn} \frac{m\pi}{a} \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \end{cases}$$

$$\mathbf{E}'_t = \mathbf{e}'(\boldsymbol{\rho}) U'(z)$$

$$\mathbf{H}'_t = \mathbf{h}'(\boldsymbol{\rho}) I'(z)$$

电磁场模式函数沿  $x, y$  方向呈现  $\sin$ 、 $\cos$  变化，  
形成驻波，**横向谐振原理**

# 用分离变量法求解模式函数满足的波方程

7

$$k_t'^2 + k_z'^2 = k^2 = \omega^2 \mu \epsilon$$

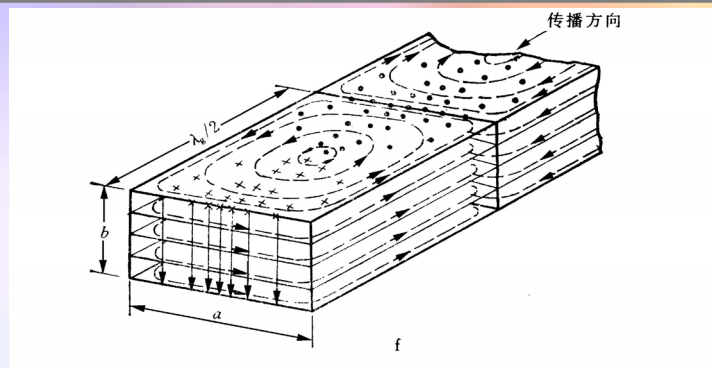
$$k_z'^2 = k^2 - k_t'^2 = k^2 - k_x'^2 - k_y'^2$$

$k_z'$  也被离散值化

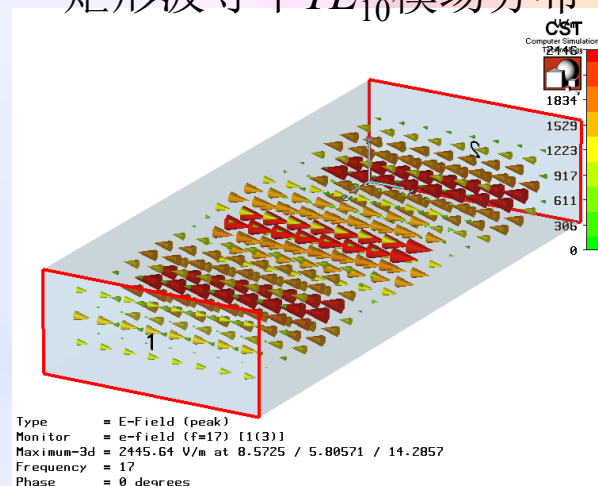
$$E_t' = \sum_{m,n} E_{t,m,n}' = \sum_{m,n} e_{m,n}'(\rho) U_{m,n}'(z)$$

$$H_t' = \sum_{m,n} H_{t,m,n}' = \sum_{m,n} h_{m,n}'(\rho) I_{m,n}'(z)$$

不同的一组数  $(m, n)$  表示模式函数满足矩形波导横向边界条件的一组解，矩形波导横截面内一种可能存在的场分布，称为场分布的一种**模式**，并用  $m$ 、 $n$  标记，如  $TE_{mn}$ 、 $TM_{mn}$ 。



矩形波导中  $TE_{10}$  模场分布



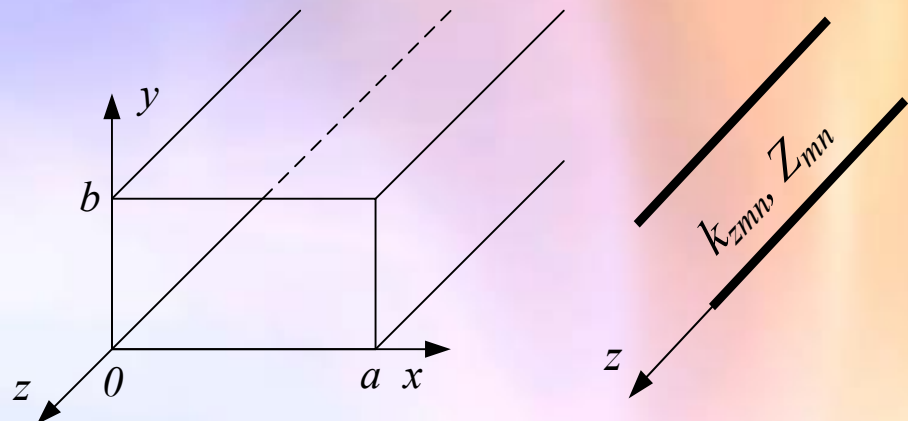
# 传输线方程的解

8

第  $(m, n)$  模式函数幅值

$U'_{mn}(z)$ ,  $I'_{mn}(z)$  满足传输线方程

$$\begin{cases} \frac{dU'_{mn}}{dz} = -jk'_{zmn} Z'_{mn} I'_{mn} \\ \frac{dI'_{mn}}{dz} = -jk'_{zmn} Y'_{mn} U'_{mn} \end{cases}$$



式中

$$k'_{zmn} = \sqrt{k^2 - k'^2_t} = \sqrt{k^2 - k'^2_{xm} - k'^2_{yn}} = \sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$$

$$Z'_{mn} = \frac{1}{Y'_{mn}} = \frac{\omega \mu}{k'_{zmn}}$$

$$k'_{xm} \equiv k'_x$$

$$k'_{yn} \equiv k'_y$$

如果波导纵向趋于无穷远，其解为

$$\begin{cases} U'_{mn}(z) = e^{-jk'_{zmn} z} \\ I'_{mn}(z) = Y'_{mn} e^{-jk'_{zmn} z} \end{cases}$$

1. 对于特定的某一模式，可用特定参数  $k'_{zmn}$ 、 $Z'_{mn}$  的传输线等效。
2. 如果矩形波导中有无限多个模式传播，就要用无限多对不同参数的传输线等效。
3.  $U$ 和 $I$ 沿 $z$ 的变化表示模式的幅度沿 $z$ 的变化。

# 矩形波导的解 (TE)

因为  $\mathbf{E}'_t = \mathbf{e}'(\rho)U'(z)$      $\mathbf{H}'_t = \mathbf{h}'(\rho)I'(z)$      $\mathbf{H}'_z = \frac{j}{\omega\mu} \nabla_t \times \mathbf{E}'_t$

将模式函数 $\mathbf{e}'(\rho)$ 、 $\mathbf{h}'(\rho)$ ，及其幅值电压 $U(z)$ 、电流 $I(z)$ 的值代入，将以前省略的时间因子 $e^{j\omega t}$ 写进去，就得到TE模的场量表达式

$$E'_x = \sum_{m,n} A_{mn} \frac{n\pi}{b} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{j(\omega t - k_{zmn}z)}$$

$$E'_y = \sum_{m,n} -A_{mn} \frac{m\pi}{a} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{j(\omega t - k_{zmn}z)}$$

$$E'_z = 0$$

$$H'_x = \sum_{m,n} A_{mn} \frac{k_z}{\omega\mu} \frac{m\pi}{a} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{j(\omega t - k_{zmn}z)}$$

$$H'_y = \sum_{m,n} A_{mn} \frac{k_z}{\omega\mu} \frac{n\pi}{b} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{j(\omega t - k_{zmn}z)}$$

$$H'_z = \sum_{m,n} -jA_{mn} \frac{\pi^2}{\omega\mu} \left[ \frac{n^2}{b^2} + \frac{m^2}{a^2} \right] \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{j(\omega t - k_{zmn}z)}$$

# 矩形波导的解 (TM)

对于TM模，也可进行类似的分析，有关导出过程留给读者作为练习，其场量表达式如下：

$$E_x'' = \sum_{m,n} -B_{mn} \frac{k_z}{\omega \varepsilon} \frac{m\pi}{a} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{j(\omega t - k_{zmn}z)}$$

$$E_y'' = \sum_{m,n} -B_{mn} \frac{k_z}{\omega \varepsilon} \frac{n\pi}{b} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{j(\omega t - k_{zmn}z)}$$

$$E_z'' = \sum_{m,n} B_{mn} \frac{\pi^2}{j\omega \varepsilon} \left( \frac{n^2}{b^2} + \frac{m^2}{a^2} \right) \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{j(\omega t - k_{zmn}z)}$$

$$H_x'' = \sum_{m,n} B_{mn} \frac{n\pi}{b} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{j(\omega t - k_{zmn}z)}$$

$$H_y'' = \sum_{m,n} -B_{mn} \frac{m\pi}{a} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{j(\omega t - k_{zmn}z)}$$

$$H_z'' = 0$$

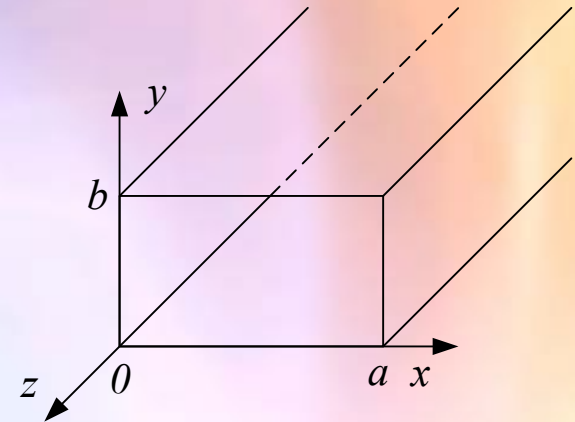
注意，对于TM<sub>mn</sub>模，下标 $m$ 、 $n$ 不能为零，否则所有场量均为零，这是与TE<sub>mn</sub>模不同的地方。

# 如何记忆矩形波导模式场分布

11

定义符号

$$\begin{cases} C_x = \cos(k_x x) & S_x = \sin(k_x x) \\ C_y = \cos(k_y y) & S_y = \sin(k_y y) \end{cases} \quad \begin{cases} k_x = \frac{m\pi}{a} \\ k_y = \frac{n\pi}{b} \end{cases}$$



归一化的模式函数可以写为

TE

$$\begin{cases} \mathbf{e}'_{mn}(\boldsymbol{\rho}) = k_y C_x S_y \mathbf{x}_0 - k_x S_x C_y \mathbf{y}_0 \\ \mathbf{h}'_{mn}(\boldsymbol{\rho}) = k_x S_x C_y \mathbf{x}_0 + k_y C_x S_y \mathbf{y}_0 \end{cases}$$

TM

$$\begin{cases} \mathbf{e}''_{mn}(\boldsymbol{\rho}) = k_x C_x S_y \mathbf{x}_0 + k_y S_x C_y \mathbf{y}_0 \\ \mathbf{h}''_{mn}(\boldsymbol{\rho}) = -k_y S_x C_y \mathbf{x}_0 + k_x C_x S_y \mathbf{y}_0 \end{cases}$$

1.  $\mathbf{e}'_{mn}$ 、 $\mathbf{h}'_{mn}$ 与 $\mathbf{z}_0$ 构成右手螺旋关系,  $\mathbf{e}''_{mn}$ 、 $\mathbf{h}''_{mn}$ 与 $\mathbf{z}_0$ 构成右手螺旋关系;

$$\mathbf{h}'_{mn}(\boldsymbol{\rho}) = \mathbf{z}_0 \times \mathbf{e}'_{mn}(\boldsymbol{\rho}), \mathbf{h}''_{mn}(\boldsymbol{\rho}) = \mathbf{z}_0 \times \mathbf{e}''_{mn}(\boldsymbol{\rho})$$

# 如何记忆矩形波导模式场分布

12

TE

$$\begin{cases} \mathbf{e}'_{mn}(\rho) = k_y C_x S_y \mathbf{x}_0 - k_x S_x C_y \mathbf{y}_0 \\ \mathbf{h}'_{mn}(\rho) = k_x S_x C_y \mathbf{x}_0 + k_y C_x S_y \mathbf{y}_0 \end{cases}$$

TM

$$\begin{cases} \mathbf{e}''_{mn}(\rho) = k_x C_x S_y \mathbf{x}_0 + k_y S_x C_y \mathbf{y}_0 \\ \mathbf{h}''_{mn}(\rho) = -k_y S_x C_y \mathbf{x}_0 + k_x C_x S_y \mathbf{y}_0 \end{cases}$$

2.  $\mathbf{e}'_{mn}$ ,  $\mathbf{e}''_{mn}$ ,  $\mathbf{h}'_{mn}$ 与 $\mathbf{h}''_{mn}$ 中sin和cos函数的选择是由边界条件决定的

完纯导体表面的边界条件：切向电场=法向磁场=0；法向电场、切向磁场幅值取极值。

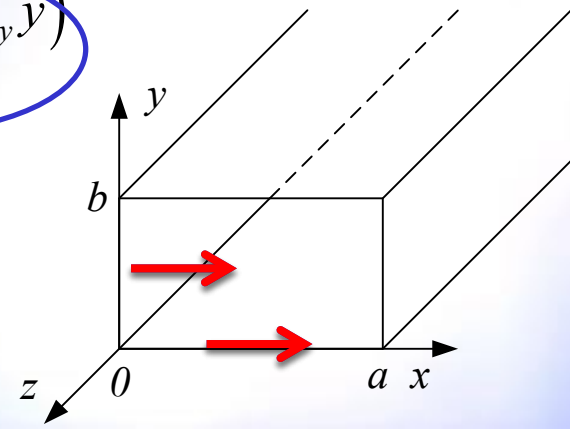
在边界面 $y=0$ ,  $\mathbf{e}'_{mn}$ 的 $x$ 分量为零 - 含有  $S_y = \sin(k_y y)$

在边界面 $x=0$ ,  $\mathbf{e}'_{mn}$ 的 $x$ 分量取极值 - 含有  $C_x = \cos(k_x x)$

在边界面 $y=0$ ,  $\mathbf{h}'_{mn}$ 的 $x$ 分量取极值 - 含有  $C_y = \cos(k_y y)$

在边界面 $x=0$ ,  $\mathbf{h}'_{mn}$ 的 $x$ 分量为零 - 含有  $S_x = \sin(k_x x)$

完纯导体表面的 $E$ 、 $H$ 满足的边界条件类似于双导线终端短路时， $U$ 、 $I$ 满足的边界条件。



TE

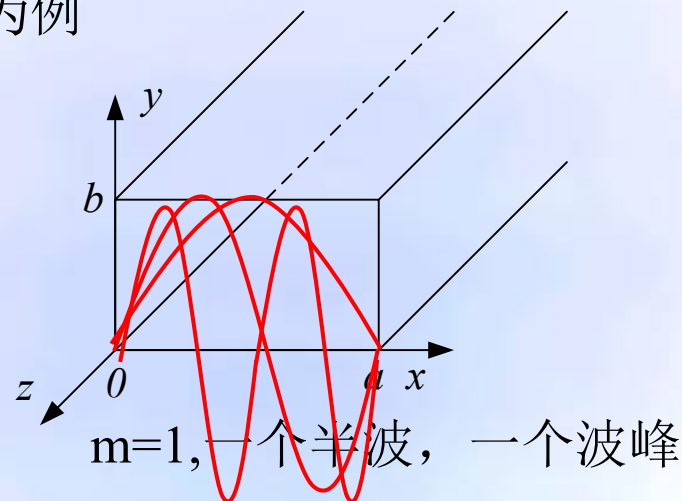
$$\begin{cases} \mathbf{e}'_{mn}(\boldsymbol{\rho}) = k_y C_x S_y \mathbf{x}_0 - k_x S_x C_y \mathbf{y}_0 \\ \mathbf{h}'_{mn}(\boldsymbol{\rho}) = k_x S_x C_y \mathbf{x}_0 + k_y C_x S_y \mathbf{y}_0 \end{cases}$$

TM

$$\begin{cases} \mathbf{e}''_{mn}(\boldsymbol{\rho}) = k_x C_x S_y \mathbf{x}_0 + k_y S_x C_y \mathbf{y}_0 \\ \mathbf{h}''_{mn}(\boldsymbol{\rho}) = -k_y S_x C_y \mathbf{x}_0 + k_x C_x S_y \mathbf{y}_0 \end{cases}$$

3. 模式函数中的下标 $m$ 、 $n$ 分别表示模式场沿波导 $x$ 、 $y$ 方向变化的半波数

以  $S_x = \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)$  为例



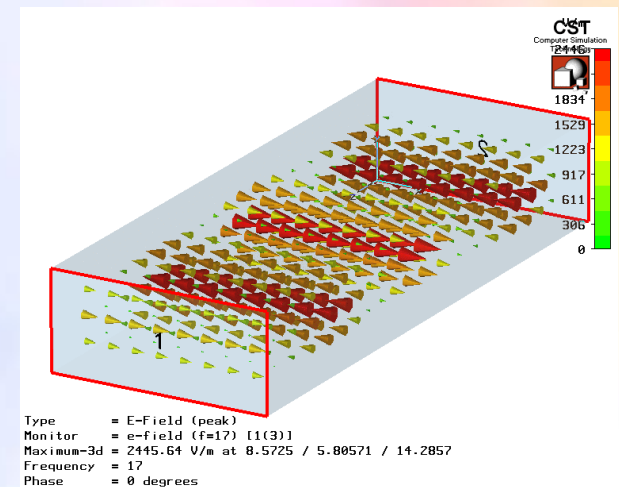
$m=2$ , 二个半波 = 一个全波, 2个波峰  
 $m=4$ , 4个半波 = 2个全波, 4个波峰

TE

TM

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{E}'_t = \sum_{m,n} A_{mn} \mathbf{e}'_{mn}(\rho) U'_{mn}(z) \\ \mathbf{H}'_t = \sum_{m,n} A_{mn} \mathbf{h}'_{mn}(\rho) I'_{mn}(z) \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{E}''_t = \sum_{m,n} -B_{mn} \mathbf{e}''_{mn}(\rho) U''_{mn}(z) \\ \mathbf{H}''_t = \sum_{m,n} -B_{mn} \mathbf{h}''_{mn}(\rho) I''_{mn}(z) \end{array} \right.$$

- 电磁场随 $z$ 的变化都是 $e^{-jk_{zmn}z}$ , 沿 $z$ 方向的行波
- $E_y/H_x$ 与 $E_x/H_y$ 都为特征阻抗 $Z$ 。
  - 对于TE模,  $Z=\omega\mu/k_z$
  - 对于TM模,  $Z=k_z/\omega\epsilon$



矩形波导中场分布最简单的是

$m=1$ 、 $n=0$  的 TE<sub>10</sub> 模。

它只有三个场分量，即  $E_y$ 、 $H_x$  和  $H_z$ 。

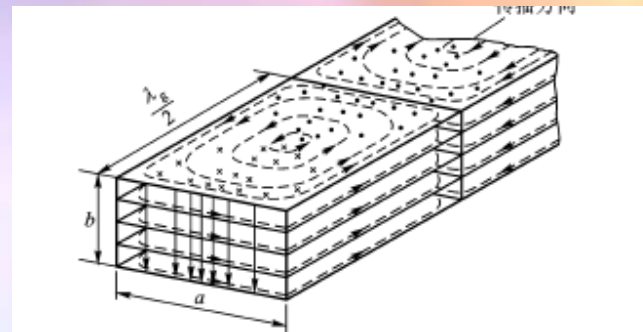
$$E_y = -A_{10} \frac{\pi}{a} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{j(\omega t - k_z z)}$$

$$H_x = A_{10} \frac{k_z}{\omega\mu} \frac{\pi}{a} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{j(\omega t - k_z z)}$$

$$H_z = -jA_{10} \frac{1}{\omega\mu} \frac{\pi^2}{a^2} \cos\frac{\pi}{a}x e^{j(\omega t - k_z z)}$$

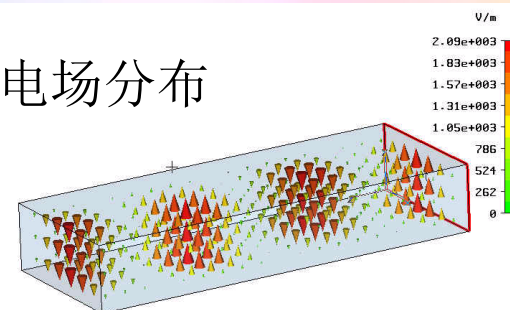
$$E_x = E_z = H_y = 0$$

且场在  $y$  方向没有变化。

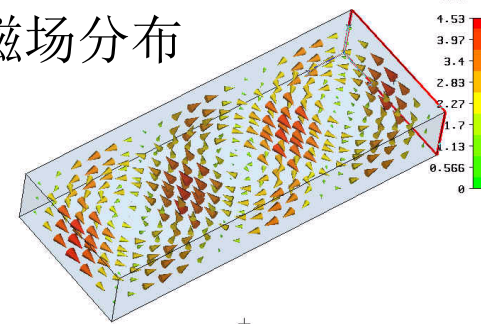


矩形波导中TE<sub>10</sub>模场分布

电场分布



磁场分布



# 关于模式的进一步讨论

无论从前面导出的矩形波导的模式函数表达式还是场量表达式，区分场量在横截面分布特征的主要是三角函数宗量中的正整数 $m$ 、 $n$ 。

不同的一组数（ $m$ 、 $n$ ）就表示不同结构的场。

矩形波导中可以存在的电磁模式有 $TE_{01}$ ， $TE_{02}$ ， $\dots$ ， $TE_{10}$ ， $TE_{20}$ ， $\dots$ ， $TE_{11}$ ， $TE_{12}$ ， $TE_{22}$ ， $TE_{23}$ ， $\dots$ ； $TM_{11}$ ， $TM_{12}$ ， $TM_{21}$ ， $TM_{22}$ ， $\dots$ 。

这无穷多个模式中的任何一个都满足矩形波导的边界条件，**它们都可以独立存在**。

实际波导中究竟存在多少模式电磁场，对于纵向均匀的波导，取决于工作频率在各模式截止频率以上还是以下以及波导的激励方式。

如果波导纵向有不均匀性，就会激励起无穷多个模式，使得众多个模式场的叠加满足不均匀处的边界条件。

# 矩形波导是高通滤波器，有截止频率 $f_c$

17

色散方程

$$k_z = k_{zmn} = \sqrt{k^2 - k_t^2} = \sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$$

当  $\omega^2 \mu \epsilon < k_t^2$ ， $k_z$  为虚数，波不能传播；

当  $\omega^2 \mu \epsilon > k_t^2$ ， $k_z$  为实数，波可以传播。

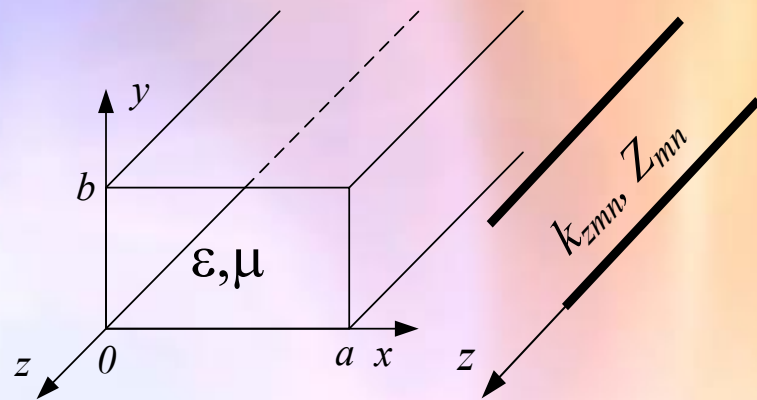
对于给定的模式 (m,n) 矩形波导是**高通滤波器**。

**截止频率** $f_c$ 和**截止波长** $\lambda_c$ 由  $k_t^2 = \omega_c^2 \mu \epsilon$  得到

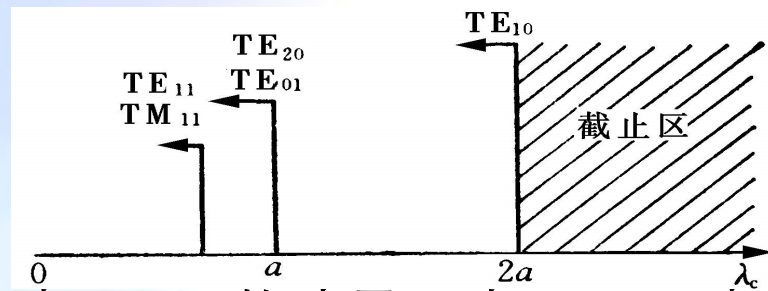
$$\omega_c^2 \mu \epsilon = (m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2$$

并得到

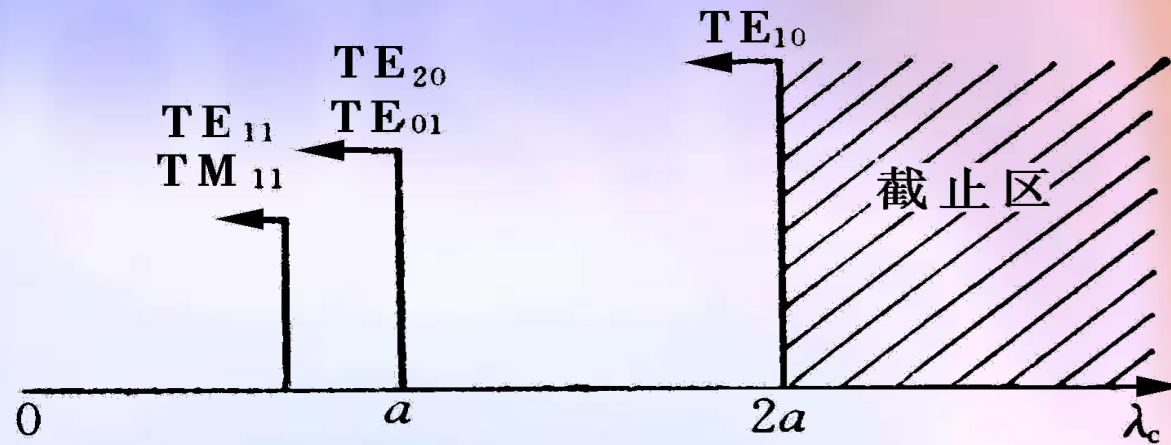
$$\begin{cases} f_c = \frac{\sqrt{(m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2}}{2\pi} v \\ \lambda_c = \frac{2}{\sqrt{(m/a)^2 + (n/b)^2}} \end{cases}$$



$$\begin{cases} f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{k_t}{2\pi} v \\ \lambda_c = 2\pi/k_t \end{cases}$$



对于 $a=2b$ 的波导，当 $a < \lambda < 2a$ 时，只有 $TE_{10}$ 模可以传播 - **单模工作**



$a=2b$ 矩形波导的截止波长分布图

波导中不同模式具有相同的截止波长（或截止频率）的现象，称为波导模式的“**简并**”。在矩形波导中，除 $TE_{m0}$ 模和 $TE_{0n}$ 模以外的模都有简并，即 $TE_{mn}$ 模和 $TM_{mn}$ 模（ $m、n \neq 0$ ）是简并的。

波导中截止波长最长（或截止频率最低）的模称为波导的最低型模（或称**主模**、**基模**），其他的模称为**高次模**。矩形波导中的主模是 $TE_{10}$ 模（ $a > b$ ），其截止波长最长，等于 $2a$ 。

# 相速度、群速度和波导波长

由色散方程  $k_z^2 = \omega^2 \mu \varepsilon - k_t^2$

得到  $\frac{k_z^2}{\omega^2} = \mu \varepsilon - \frac{k_t^2}{\omega^2} = \frac{1}{v^2} - \left( \frac{2\pi}{\lambda_c \omega} \right)^2 = \frac{1}{v^2} - \left( \frac{1}{\lambda_c} \frac{\lambda}{v} \right)^2 = \frac{1 - (\lambda / \lambda_c)^2}{v^2}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_c = 2\pi / k_t, \text{截止波长} \\ \lambda, \text{介质中波长} \end{array} \right.$$

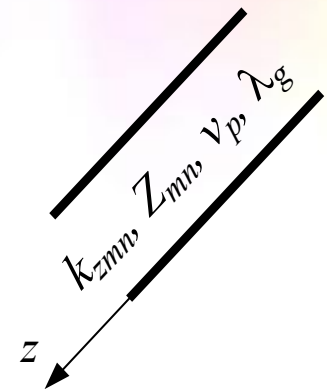
$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu \varepsilon}}, \text{介质中光速}$$

**波导中相速度**  $v_p \equiv \frac{\omega}{k_z} = \frac{v}{\sqrt{1 - (\lambda / \lambda_c)^2}}$  相速  $v_p$  与  $\omega$  有关, 波导传输的是**色散波**。

从色散方程得到**波导中群速度**  $v_g \equiv \frac{d\omega}{dk_z} = v \sqrt{1 - (\lambda / \lambda_c)^2}$

- 波导中传输模的相速度大于同一介质中的光速
- 群速度（信息的速度）小于同一介质中的光速
- 传输模的相速度和群速度有关系

$$v_p \cdot v_g = v^2$$



# 相速度、群速度和波导波长

从相速度引入波导波长

$$\lambda_g \equiv \frac{v_p}{f} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - (\lambda/\lambda_c)^2}}$$

介质中波长

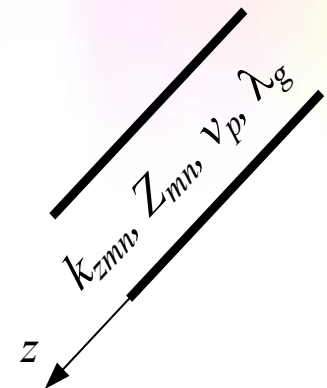
传输模沿纵向相邻等相位面之间的距离

对于TE<sub>10</sub>模

$$v_{pTE_{10}} = \frac{v}{\sqrt{1 - (\lambda/2a)^2}}$$

$$v_{gTE_{10}} = v \sqrt{1 - (\lambda/2a)^2}$$

$$\lambda_{gTE_{10}} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - (\lambda/2a)^2}}$$



介质中波速

1. 介质中的平面波  
( $k, \lambda, \omega, v$ )

2. 与截止频率对应的 ( $k_t, \lambda_c, \omega_c, v$ )

$$k = \omega \sqrt{\mu \epsilon} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{2\pi}{k} & \text{介质中波长} \\ v = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} & \text{介质中波速} \end{cases} \quad k_t = \sqrt{(m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_c = \frac{2\pi}{k_t} & \text{截止波长} \\ \omega_c = k_t v, v = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} & \text{截止角频率} \end{cases}$$

工作频率

3. 波导 ( $k_z, \lambda_g, \omega, v_p$ )

$$k_z = \sqrt{k^2 - k_t^2} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_g = \frac{2\pi}{k_z} & \text{波导波长} \\ v_p = \frac{\omega}{k_z} & \text{波导相速} \end{cases}$$

# 矩形波导色散特性曲线

矩形波导的色散关系

$$k_z = k_{zmn} = \sqrt{k^2 - k_t^2} = \sqrt{\omega^2 \mu \varepsilon - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$$

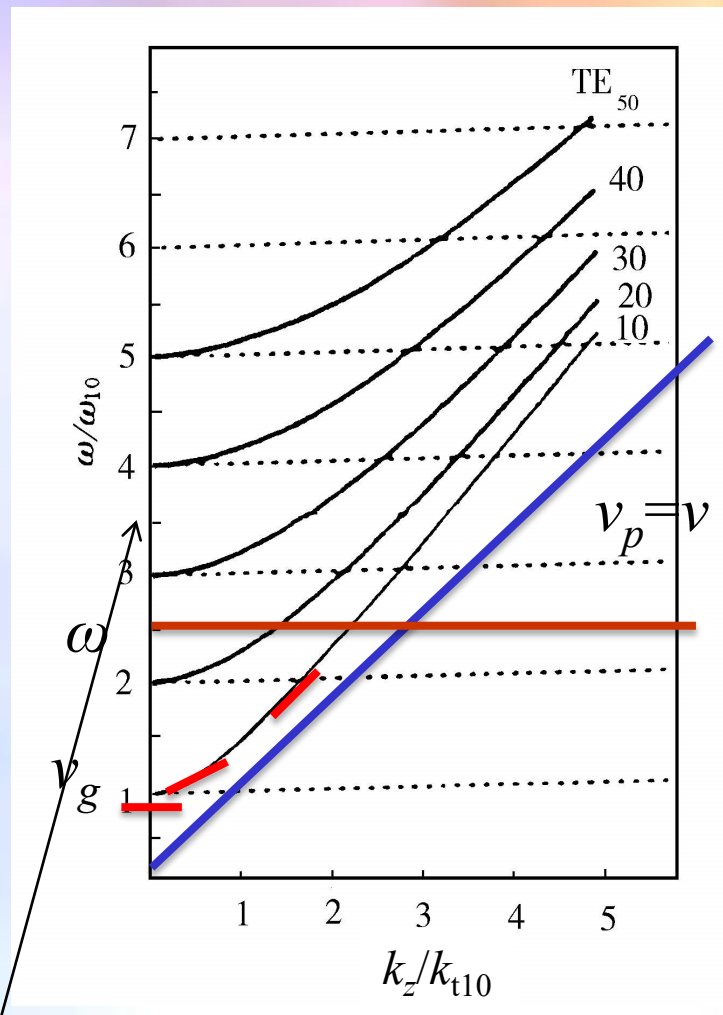
( $\omega$ 、 $k_z$ ) 曲线：纵坐标 $\omega$ 用 $\omega_{10}$ 归一化，横坐标 $k_z$ 用 $k_{t10}$ 归一化。 $\omega_{10}$ 和 $k_{t10}$ 是TE<sub>10</sub>模的截止角频率和截止波数。

经归一化后，色散曲线上任一点与原点连线斜率表示相速与光速之比，切线斜率表示群速与光速之比。

$$\frac{\omega/\omega_{10}}{k_z/k_{t10}} = \frac{\omega}{k_z} \cdot \frac{k_{t10}}{\omega_{10}} = \frac{v_p}{v}$$

不管什么模式，愈接近截止频率( $k_z \rightarrow 0$ )色散愈严重。

截止频率在色散曲线上的体现。



$mn$ 模对 $\omega_{10}$ 归一化的截止角频率

# 特征阻抗与等效阻抗

TE模特征阻抗为  $Z_{\text{TE}} = \omega\mu / k_z$

TM模特征阻抗为  $Z_{\text{TM}} = k_z / \omega\varepsilon$

$$k_z = \sqrt{\omega^2 \mu \varepsilon - k_t^2} \quad \lambda_g = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - (\lambda/\lambda_c)^2}} \quad \lambda_g = 2\pi/k_z$$

得到  $Z_{\text{TE}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{\lambda_g}{\lambda} = \eta \frac{\lambda_g}{\lambda}$

$$Z_{\text{TM}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{\lambda}{\lambda_g} = \eta \frac{\lambda}{\lambda_g}$$

其中  $\eta = \sqrt{\mu/\varepsilon}$  介质中的波阻抗

$$Z_{\text{TE}} \cdot Z_{\text{TM}} = \eta^2$$

空气填充的矩形波导

$$Z_{\text{TE}} = \eta_0 \frac{\lambda_g}{\lambda}$$

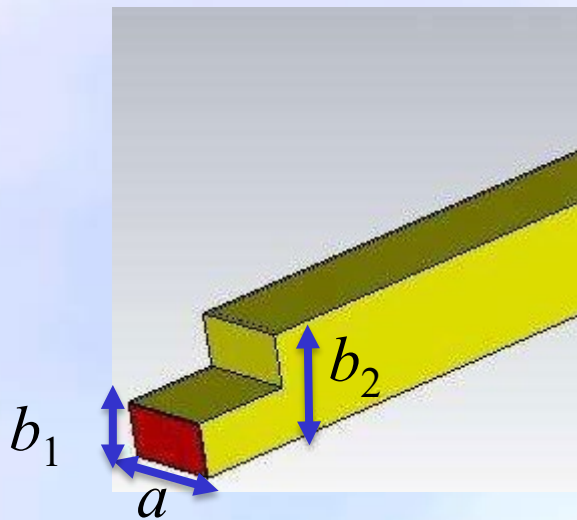
$$Z_{\text{TM}} = \eta_0 \frac{\lambda}{\lambda_g}$$

$$\eta_0 = \sqrt{\mu_0 / \varepsilon_0} \approx 377\Omega$$

# 特征阻抗与等效阻抗

对于TE<sub>10</sub>模特征阻抗为 
$$Z_{\text{TE}_{10}} = \frac{\eta_0}{\sqrt{1 - (\lambda/2a)^2}}$$

与波导窄边 $b$ 无关。宽边尺寸 $a$ 相同而窄边 $b$ 不同的两个工作与TE<sub>10</sub>模的波导，特征阻抗相等，但是在连接处仍然有反射。



# 特征阻抗与等效阻抗

TE<sub>10</sub>模等效阻抗有三种定义

电压-电流定义

$$Z_{U \cdot I} = U / I$$

功率-电流定义

$$Z_{P \cdot I} = 2P / |I|^2$$

功率-电压定义

$$Z_{P \cdot V} = |U|^2 / 2P$$

$P$  为TE<sub>10</sub>模的纵向功率流  $P = \int_0^a dx \int_0^b dy (-E_y \times H_x)$

$U$  为波导截面中心从底面到顶面电场的线积分

$$U = \int_0^b E_y \Big|_{x=\frac{a}{2}} dy$$

$I$  为顶面上总的纵向电流  
所以  $I = \int_0^a H_x(y=b) dx = \int_0^a J_z dx$

$$(Z_{eTE_{10}})_{P \cdot U} = \frac{\pi}{2} \frac{b}{a} Z_{TE_{10}}, \quad (Z_{eTE_{10}})_{P \cdot I} = \frac{\pi^2}{8} \frac{b}{a} Z_{TE_{10}}, \quad (Z_{eTE_{10}})_{U \cdot I} = \frac{\pi^2}{8} \frac{b}{a} Z_{TE_{10}}$$

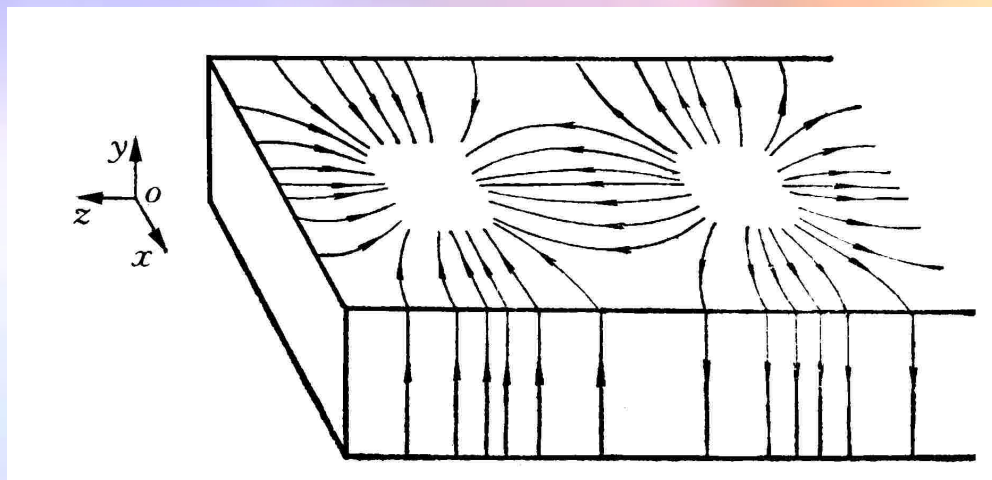
等效阻抗都与  $b/a$  有关, 一般定义为  $Z_{eTE_{10}} = \frac{b}{a} Z_{TE_{10}}$

# 矩形波导管壁的电流

管壁电流的分布由管壁附近的磁场分布决定

$$\mathbf{J}_S = \mathbf{n} \times \mathbf{H}_S$$

$\mathbf{n}$ 是波导内壁的单位法向矢量， $\mathbf{H}_S$ 为管壁附近的切向磁场。



TE<sub>10</sub>模的管壁电流结构

将TE<sub>10</sub>模管壁表面的切向磁场分量代入上式即可得到TE<sub>10</sub>模的管壁电流分布，结果表明，当矩形波导传输TE<sub>10</sub>模时

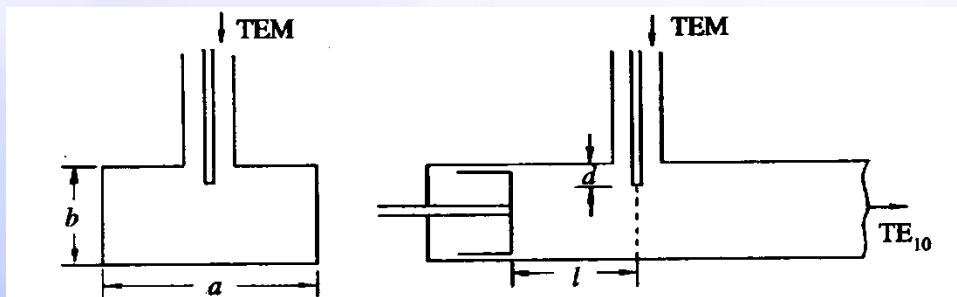
- 左、右侧壁只有 $J_y$ 分量电流，且大小相等，方向相同；
- 上、下宽壁内电流由 $J_x$ 和 $J_z$ 合成，在同一 $x$ 位置的上下宽壁内的电流大小相等，方向相反。在波导宽边中心只有纵向电流。

# 矩形波导的激励与耦合

波导的激励与耦合是微波源向波导内有限空间的辐射或在波导的有限空间内接收微波信息。辐射和接收是互易的。

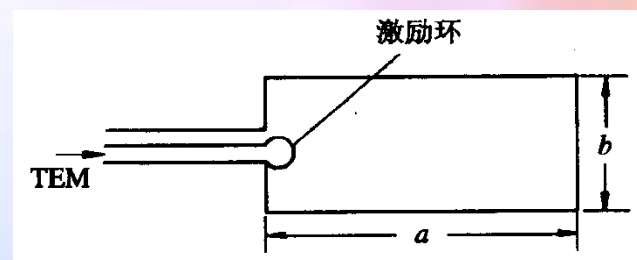
激励波导的方法通常有三种：电激励，磁激励和电流激励。

## 1. 电激励



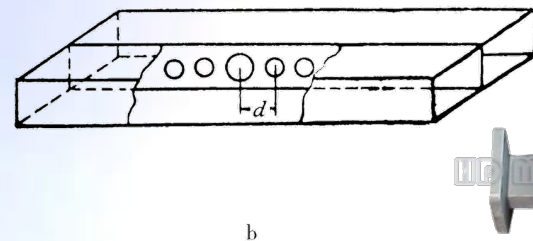
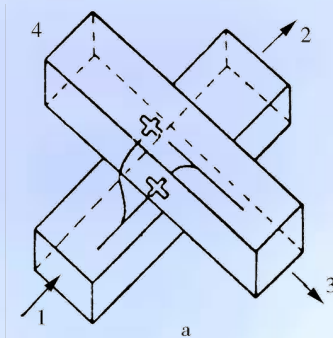
探针激励及其调配

## 2. 磁激励



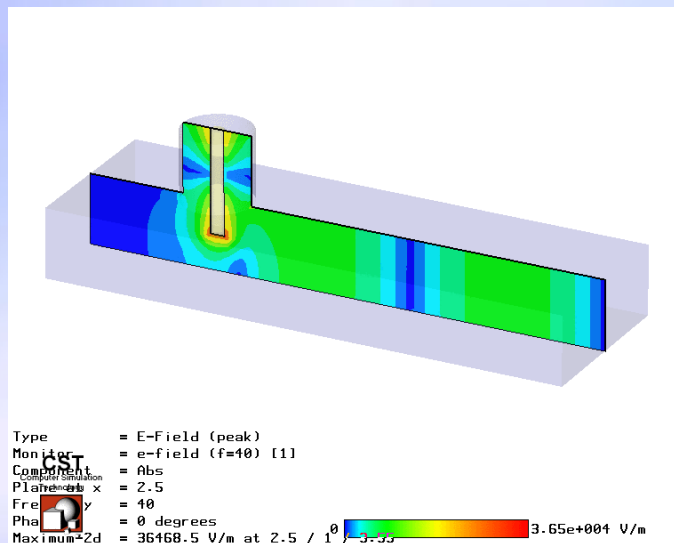
磁激励示意图

## 3. 电流激励



定向耦合器

(a) 宽边耦合的定向耦合器 (b) 窄边耦合的定向耦合器

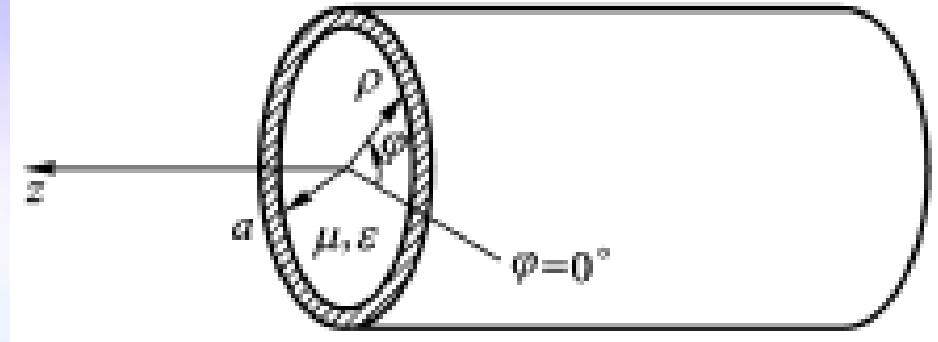


6.2 矩形波导

6.3 圆波导

# 圆波导 用纵向场量表示横向场量

圆波导在圆柱坐标系下求解，先求纵向场量再求横向场量比先求横向场量再求纵向场量方便得多。



将电场、磁场分解为横纵向场量

圆波导及其坐标系

$$\begin{cases} \mathbf{E} = \mathbf{E}_t + E_z \mathbf{z}_0 \\ \mathbf{H} = \mathbf{H}_t + H_z \mathbf{z}_0 \end{cases} \quad \nabla = \nabla_t + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{z}_0 \quad \nabla_t = \rho_0 \frac{\partial}{\partial \rho} + \phi_0 \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi}$$

代入

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H} \\ \nabla \times \mathbf{H} = j\omega\varepsilon\mathbf{E} \end{cases}$$



$$\left( \nabla_t + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{z}_0 \right) \times (\mathbf{E}_t + E_z \mathbf{z}_0) = -j\omega\mu (\mathbf{H}_t + H_z \mathbf{z}_0)$$

$$\left( \nabla_t + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{z}_0 \right) \times (\mathbf{H}_t + H_z \mathbf{z}_0) = j\omega\varepsilon (\mathbf{E}_t + E_z \mathbf{z}_0)$$

# 场量表达式

横向场量可用纵向场量表示，因此由 $E_z$ 、 $H_z$ 得到其他各场分量表达式

(1) TE模

$$E_\rho = \pm \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{j\omega\mu a^2}{(u'_{mn})^2 \rho} H_{mn} J_m \left( \frac{u'_{mn}}{a} \rho \right) \frac{\sin m\varphi}{\cos m\varphi} e^{j(\omega t - k_z z)}$$

$$E_\varphi = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{j\omega\mu a}{u'_{mn}} H_{mn} J'_m \left( \frac{u'_{mn}}{a} \rho \right) \frac{\cos m\varphi}{\sin m\varphi} e^{j(\omega t - k_z z)}$$

$$E_z = 0$$

$$H_\rho = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-jk_z a}{u'_{mn}} H_{mn} J'_m \left( \frac{u'_{mn}}{a} \rho \right) \frac{\cos m\varphi}{\sin m\varphi} e^{j(\omega t - k_z z)}$$

$$H_\varphi = \pm \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{jk_z m a^2}{(u'_{mn})^2 \rho} H_{mn} J_m \left( \frac{u'_{mn}}{a} \rho \right) \frac{\sin m\varphi}{\cos m\varphi} e^{j(\omega t - k_z z)}$$

$$H_z = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} H_{mn} J_m \left( \frac{u'_{mn}}{a} \rho \right) \frac{\cos m\varphi}{\sin m\varphi} e^{j(\omega t - k_z z)}$$

$\rho=a$ 处满足完纯导体表面的边界条件：切向电场=法向磁场=0；法向电场、切向磁场幅值取极大值

由此可见，圆波导中的TE模有无穷多个，以 $TE_{mn}$ 表示之， $m$ 表示场沿圆周分布的驻波数， $n$ 表示场沿半径分布的半驻波数或场的最大值个数。

# 场量表达式

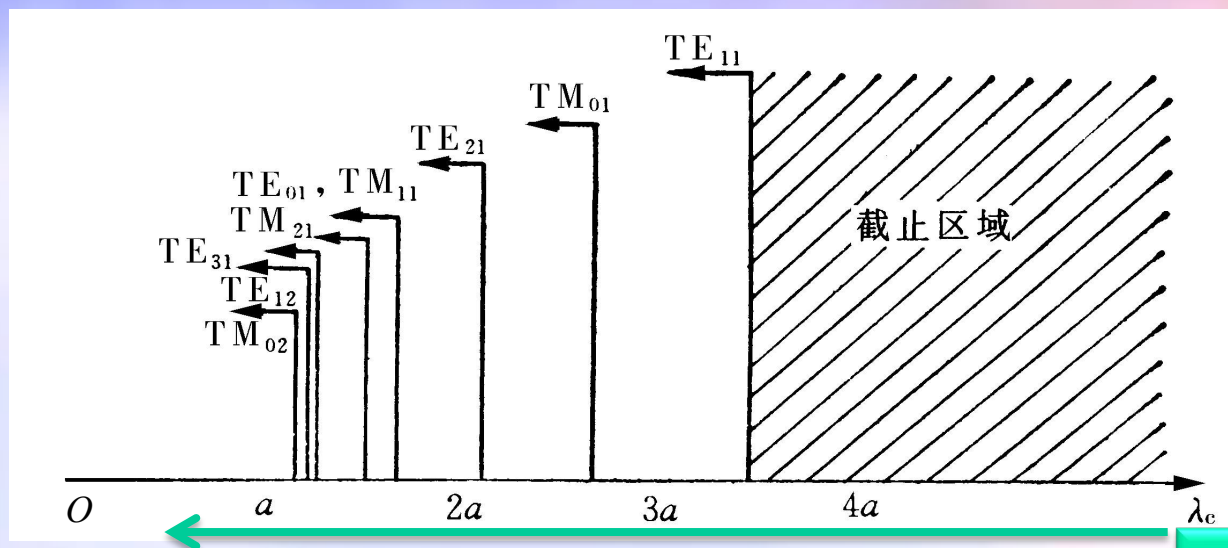
## (2) TM模

$$\begin{aligned}
 E_{\rho} &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-jk_z a}{u_{mn}} E_{mn} J'_m \left( \frac{u_{mn}}{a} \rho \right) \frac{\cos m\varphi}{\sin m\varphi} e^{j(\omega t - k_z z)} \\
 E_{\varphi} &= \pm \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{jk_z a^2 m}{u_{mn}^2} E_{mn} J_m \left( \frac{u_{mn}}{a} \rho \right) \frac{\sin m\varphi}{\cos m\varphi} e^{j(\omega t - k_z z)} \\
 E_z &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} E_{mn} J_m \left( \frac{u_{mn}}{a} \rho \right) \frac{\cos m\varphi}{\sin m\varphi} e^{j(\omega t - k_z z)} \\
 H_{\rho} &= \mp \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{j\omega\epsilon a^2 m}{u_{mn}^2 \rho} E_{mn} J_m \left( \frac{u_{mn}}{a} \rho \right) \frac{\sin m\varphi}{\cos m\varphi} e^{j(\omega t - k_z z)} \\
 H_{\varphi} &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-j\omega\epsilon a}{u_{mn}} E_{mn} J'_m \left( \frac{u_{mn}}{a} \rho \right) \frac{\cos m\varphi}{\sin m\varphi} e^{j(\omega t - k_z z)} \\
 H_z &= 0
 \end{aligned}$$

$\rho=a$ 处满足完纯导体表面的边界条件：切向电场=法向磁场=0；法向电场、切向磁场幅值取极大值

结果表明，圆波导中的TM模也有无穷多，以 $TM_{mn}$ 表示之。

# 截止波长分布与模式简并



圆波导的模式截止波长分布图

频率

圆波导中的主模是 $TE_{11}$ 模，其截止波长最长。

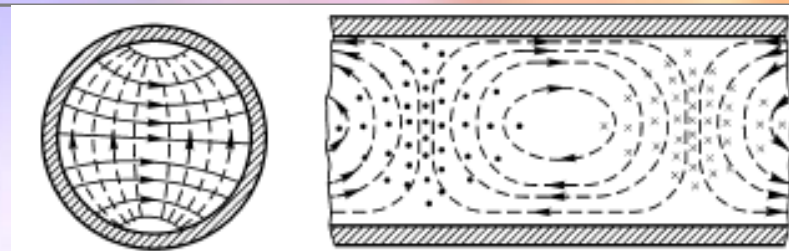
当 $2.61a < \lambda < 3.41a$ 时，圆波导中只能传输 $TE_{11}$ 模，可以做到单模工作。

圆波导简并现象：

- 一种是 $TE_{0n}$ 模和 $TM_{1n}$ 模简并，这两种模的 $\lambda_c$ 相同。
- 另一种是特殊的简并现象，即所谓“**极化简并**”。这是因为场分量沿 $\varphi$ 方向的分布存在着 $\cos(m\varphi)$ 和 $\sin(m\varphi)$ 两种可能性（两个模式）。这两种分布模的 $m$ 、 $n$ 和场结构完全一样，只是极化面相互旋转了 $90^\circ$ ，故称为极化简并。除 $TE_{0n}$ 和 $TM_{0n}$ 模外，每种 $TE_{mn}$ 和 $TM_{mn}$ 模（ $m$ 、 $n \neq 0$ ）本身都存在极化简并现象。

(1) **主模**TE<sub>11</sub>模：TE<sub>11</sub>模的截止波长最长，是圆波导中的最低次模，也是主模。

- 场分布与矩形波导TE<sub>10</sub>模场分布类似，容易形成矩形-圆波导变换器；
- 存在极化简并，很难实现单模传输。

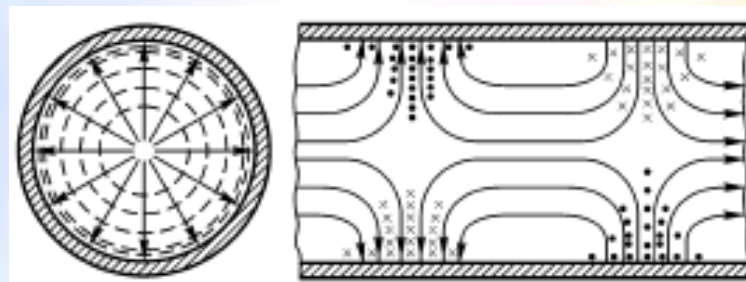


TE<sub>11</sub>模



(2) **圆对称**TM<sub>01</sub>模：TM<sub>01</sub>模是圆波导的第一个高次模。 $(E_\rho, E_z, H_\phi)$

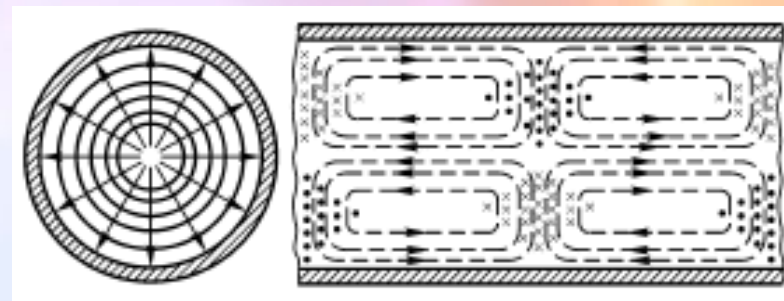
- 磁场只有 $H_\phi$ 分量，波导壁内只有纵向电流；
- 场分布具有圆对称性，不存在极化简并。



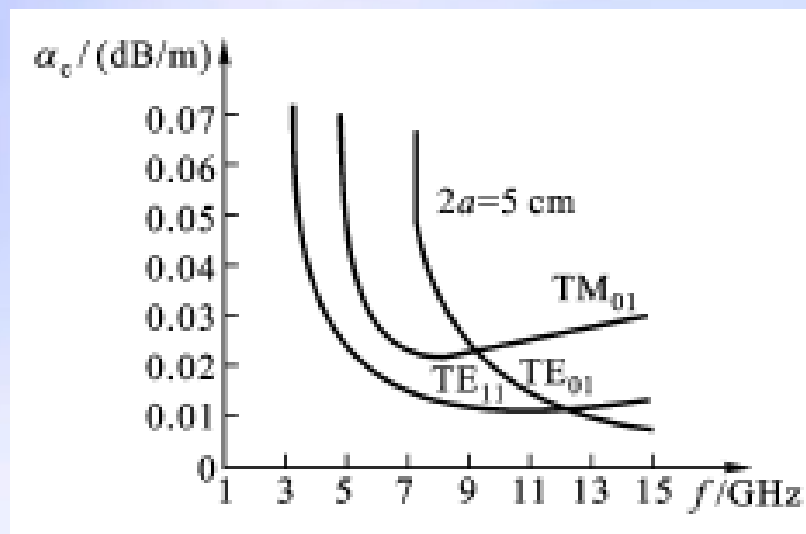
TM<sub>01</sub>模

## (3) 低损耗TE<sub>01</sub>模: ( $E_\phi, H_\rho, H_z$ )

TE<sub>01</sub>模是圆波导的高次模式，当传输功率一定时，随着频率升高，管壁的热损耗将单调下降，故其损耗相对其他模式来说是低的。管壁只有周向电流，无纵向电流。



TE<sub>01</sub>模



不同模式的导体衰减随频率变化曲线

## 复习要点

- 横向场量 $\mathbf{E}_t$ 、 $\mathbf{H}_t$ 沿 $z$ 轴变化与等效传输线上 $U$ 、 $I$ 变化相当。
- 模式函数 $\mathbf{e}$ 、 $\mathbf{h}$ 反映场在横截面变化，可用 $\text{TE}_{mn}$ 、 $\text{TM}_{mn}$ 表征，TE表示 $E_z = 0$ ，TM表示 $H_z = 0$ ，下标 $m$ 、 $n$ 分别表示场沿波导 $x$ 、 $y$ 方向变化的半波数。波导的每一模式表示满足波导横截面边界条件的一组解，它们可独立存在。
- 最低模是 $\text{TE}_{10}$ 模，矩形波导一般工作于 $\text{TE}_{10}$ 模。
- 矩形波导的色散关系为  $k_z = \sqrt{\omega^2 \mu \varepsilon - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$ 。色散特性可用截止波长 $\lambda_c$ （或截止频率 $f_c$ ）、相速 $v_p$ 、群速 $v_g$ 、波导波长 $\lambda_g$ 等表示。工作于 $\text{TE}_{10}$ 模的矩形波导，等效阻抗更能反映不同波导连接时引起的反射。
- 矩形波导横截面场分布用三角函数表示，圆波导横截面内场分布在半径方向用贝塞尔函数表示，如果注意到三角函数与贝塞尔函数的相似性，那么将圆波导与矩形波导进行对比，圆波导就容易理解与掌握。

## 复习范围 6.2, 6.3