

电磁场与电磁波

第13讲

5.1 边界条件

5.2 介质交界面的反射与折射

5.2.1 介质交界面对TE波的反射与折射

5.2.2 介质交界面对TM波的反射与折射

魏兴昌

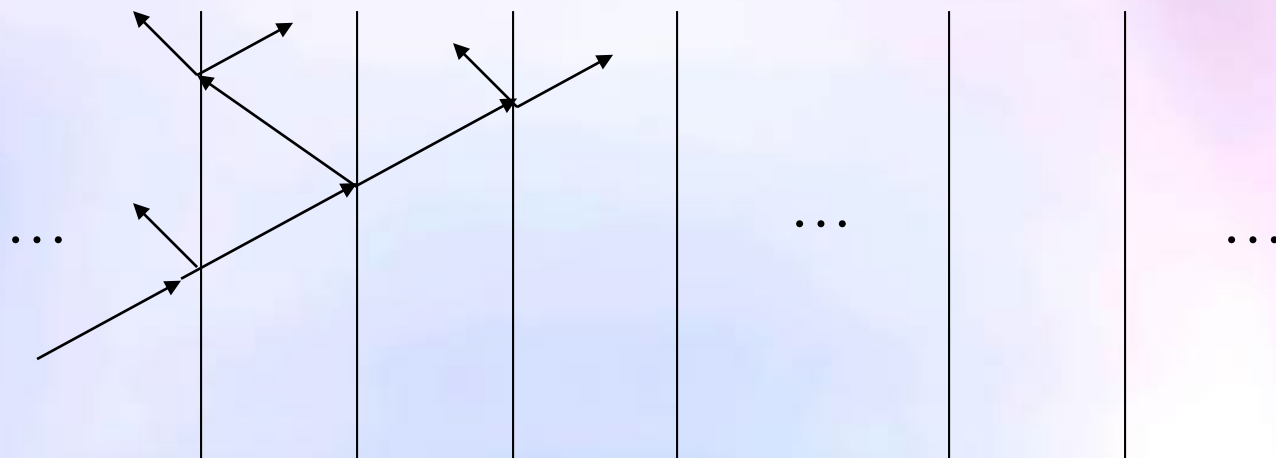
浙江大学

weixc@zju.edu.cn

作业：5.1, 5.2

不均匀介质中波的传播（以一维不均匀介质为例）：

1. 将一维不均匀介质用多层均匀介质代替



2. 每一层均匀介质中波的传播属于均匀介质中波传播的问题
3. 介质交界面波的反射与透射（本章研究的问题）

所以介质交界面对波的反射、透射是研究不均匀介质中波传播的基本问题。

目录

5.1 边界条件

5.2 介质交界面的反射与折射

5.2.1 介质交界面对TE波的反射与折射

5.2.2 介质交界面对TM波的反射与折射

电磁波在两介质交界面的反射、折射必须服从麦克斯韦方程组

$$\left\{\begin{array}{l}\nabla \times \boldsymbol{E} = -j\omega\mu\boldsymbol{H} \\ \nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + j\omega\varepsilon\boldsymbol{E} \\ \nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho_V \\ \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0\end{array}\right.$$

要注意的是在介质交界面 ε 不连续、 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 不连续、 ∇ 导数不存在，微分形式的麦克斯韦方程不能直接应用，但我们可以用差分近似微分,或从积分形式的麦克斯韦方程出发导出交界面电磁场量必须满足的关系——边界条件。

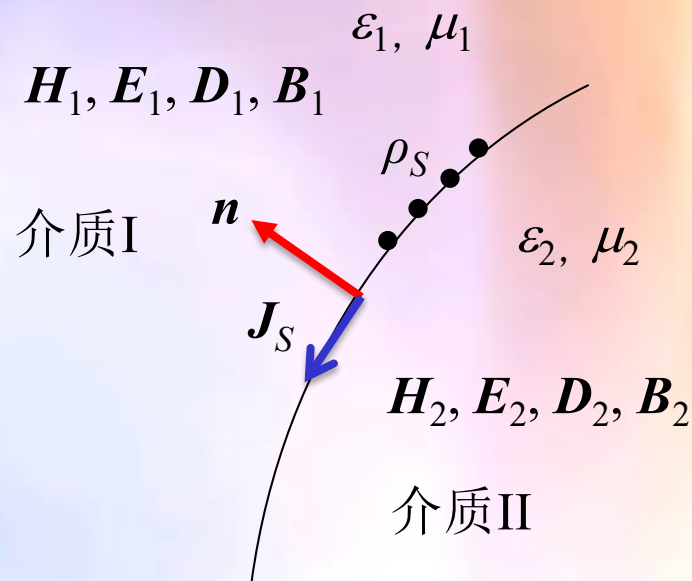
介质交界面波的反射与透射特性由边界条件决定。

边界条件：麦克斯韦方程组在介质交界面的形式

$$\begin{cases} \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{J}_S \\ \mathbf{n} \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = 0 \\ \mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) = \rho_S \\ \mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = 0 \end{cases}$$

特殊情况：介质-导体交界面（介质II为导体，导体中场量=0）

$$\begin{cases} \mathbf{n} \times \mathbf{H}_1 = H_{t1} = \mathbf{J}_S \\ \mathbf{n} \times \mathbf{E}_1 = E_{t1} = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{导体表面切向电场为零} \\ \text{切向磁场等于表面电流} \end{array}$$



边界条件的导出

6

$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + j\omega\mathbf{D}$ 的z分量

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = J_z + j\omega D_z$$

其差分形式是

$$\frac{H_{4n} - H_{3n}}{l} - \frac{H_{1x} - H_{2x}}{w} = J_z + j\omega D_z$$



$$H_{2x} - H_{1x} = J_z w + (j\omega D_z + \frac{H_{3n} - H_{4n}}{l})w$$

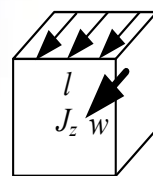
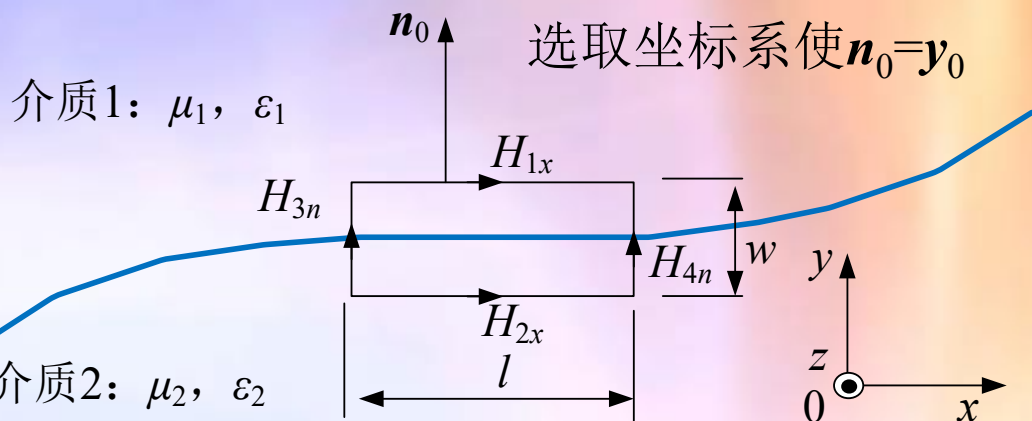
使矩形截面收缩到一个点，且窄边 w 比长边 l 更快趋于零，并定义 $J_{zS} = \lim_{w \rightarrow 0} J_z w$

得到 $H_{2x} - H_{1x} = J_{zS}$

$$\mathbf{y}_0 \times (H_{1x} \mathbf{x}_0 - H_{2x} \mathbf{x}_0) = J_{zS} \mathbf{z}_0$$

同理，当考虑 $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + j\omega\mathbf{D}$ 的x分量

$$\mathbf{y}_0 \times (H_{1z} \mathbf{z}_0 - H_{2z} \mathbf{z}_0) = J_{xS} \mathbf{x}_0$$



$$J_z w l = J_{zS} l$$

$$\mathbf{n}_0 \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{J}_S$$

$$\mathbf{J}_S = J_{xS} \mathbf{x}_0 + J_{zS} \mathbf{z}_0$$

同样的分析应用于 $\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mathbf{B}$

可得 $E_{1x} = E_{2x}, E_{1z} = E_{2z}$

或 $\mathbf{n}_0 \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = 0$

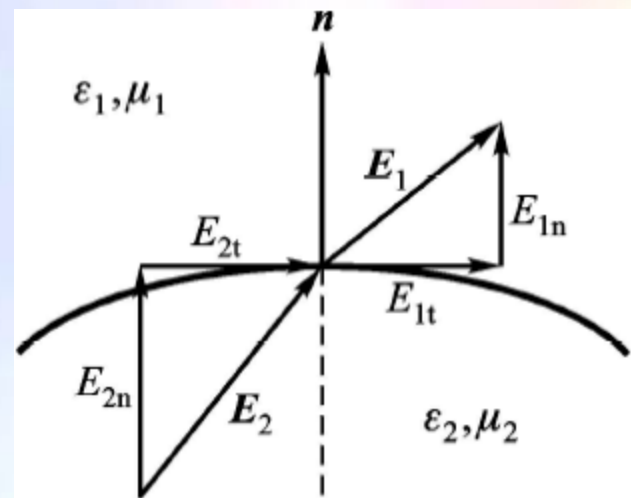
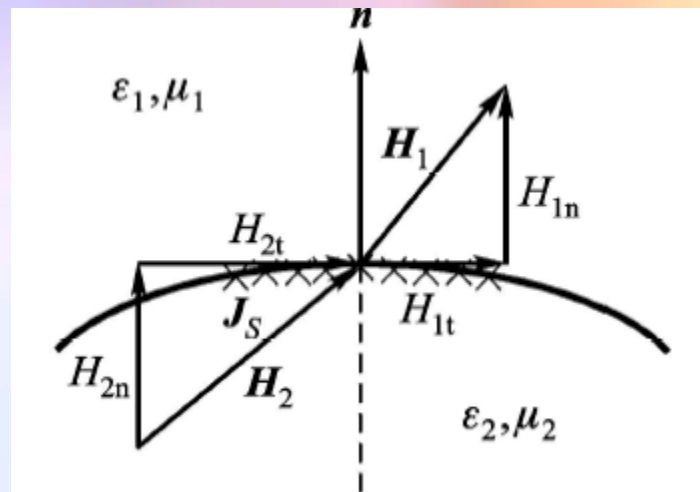
$$\begin{cases} \mathbf{n}_0 \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{J}_S \\ \mathbf{n}_0 \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = 0 \end{cases}$$

在介质交界面切向电场连续，而切向磁场不连续，其值等于表面电流。

常规材料的电导率总是有限，趋肤深度 δ 不等于零，为一有限值。当 $w \rightarrow 0$ ，即使体电流密度不为零，面电流密度还是等于零。所以面电流密度仅对于完纯导体才存在。

(1) 两个具有有限电导率的介质，交界面切向电场和切向磁场都连续。

(2) 对于完纯导体交界面切向电场为零， $E_{1t}=0$ ，表面电流 $\mathbf{J}_S = \mathbf{n}_0 \times \mathbf{H}$ ， $\mathbf{n}_0$ 是导体表面的单位法向矢量， $\mathbf{H}$ 是导体表面磁场。



边界条件的导出

跨越交界面取一小盒子，并将

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \rho_V dV$$

用于该小盒子，即流出该小盒子的电通量等于该小盒子内电荷。

当高度 w 比底面积更快趋于零时，

面电荷密度 $\rho_S = \lim_{w \rightarrow 0} \rho_V w$

$$\int_V \rho_V dV = \int_S \int_w \rho_V dw dS = \int_S \rho_V w dS = \int_S \rho_S dS$$

矢量 $\mathbf{D}$ 的边界条件

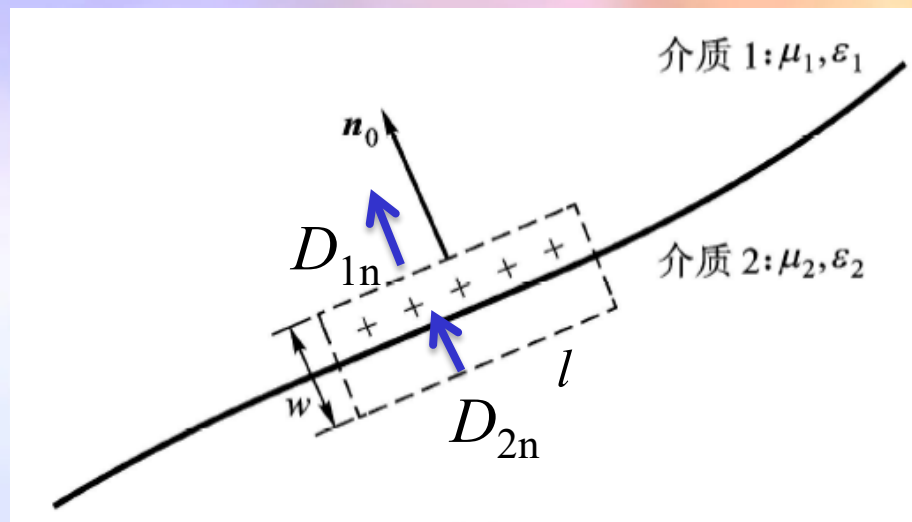
$$[D_{1n} - D_{2n}] \cdot [\text{底面积}] = \rho_S \cdot [\text{底面积}]$$

流出小盒的电通量 小盒内总电荷

$$D_{1n} - D_{2n} = \rho_S \quad \text{得到} \quad \mathbf{n}_0 \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) = \rho_S$$

$$\text{同样从} \quad \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad \text{得到} \quad B_{1n} - B_{2n} = 0$$

$$\mathbf{n}_0 \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = 0$$



边界条件表述

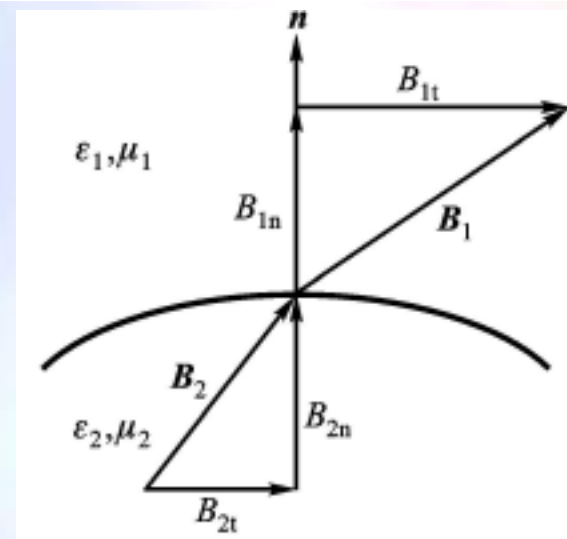
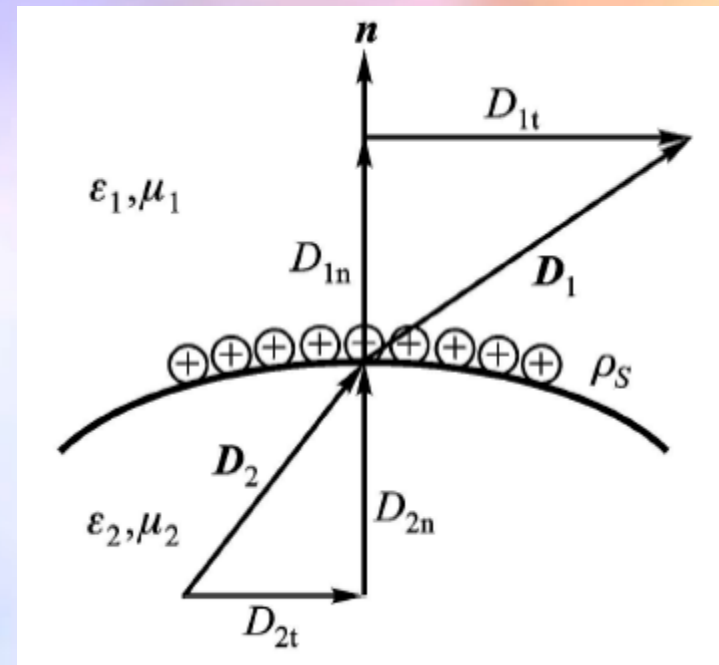
$$\begin{cases} \mathbf{n}_0 \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) = \rho_S \\ \mathbf{n}_0 \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = 0 \end{cases}$$

磁通量密度 $\mathbf{B}$ 的法向分量在交界面两旁连续，电通量密度 $\mathbf{D}$ 的法向分量在交界面两旁的不连续，等于交界面表面电荷密度 ρ_S 。

完纯导体内部不存在电磁场，即 $E_{2n}=D_{2n}=0$ 。完纯导体表面： $B_{1n}=0$ ， $D_{1n}=\rho_S$ ，

即完纯导体表面磁场的法线分量等于零，电通量密度的法向分量等于导体表面电荷密度 ρ_S 。

总结：完纯导体表面，切向电场=法向磁场=0；法向电场、切向磁场取极大值。



目录

5.1 边界条件

5.2 介质交界面的反射与折射

5.2.1 介质交界面对TE波的反射与折射

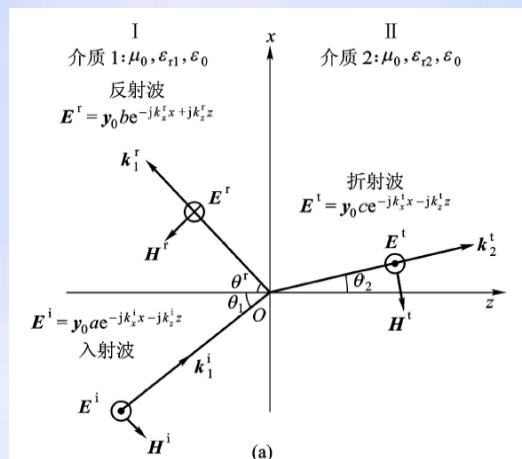
5.2.2 介质交界面对TM波的反射与折射

介质交界面反射透射

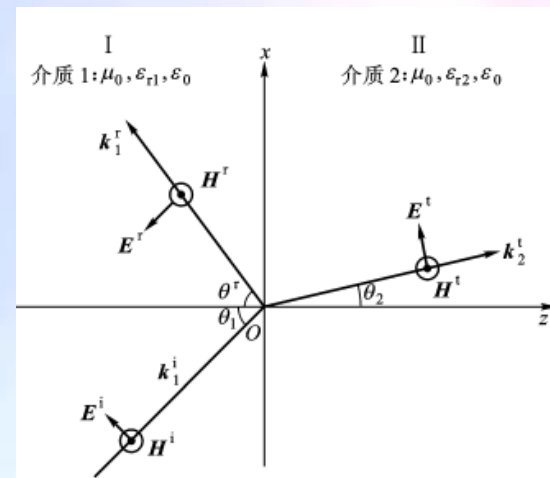
1. TE波（或垂直极化波）的反射与折射
2. TM波（或水平极化波）的反射与折射

- 入射波、反射波、透射波；
- TE和TM波是相对于介质交界面的法向（ z 方向）定义的；
- 在TE和TM波的分析中，我们选取本征坐标系，即 $\mathbf{k}$ 在 xz 平面内。

$$\mathbf{k} = k_x \mathbf{x}_0 + k_z \mathbf{z}_0, k_y = 0$$



TE波（或垂直极化波）的反射与折射



TM波（或水平极化波）的反射与折射

TE波（或垂直极化波）的反射与折射

在本征坐标系下，**TE入射波只产生TE反射波和TE折射波，不激励起TM波。**

相对于 z 方向的TE（垂直极化）波： $\mathbf{E}$ 只有 y 分量，没有纵向 z 分量； $\mathbf{H}$ 在 $x-z$ 平面内，有纵向 z 分量。

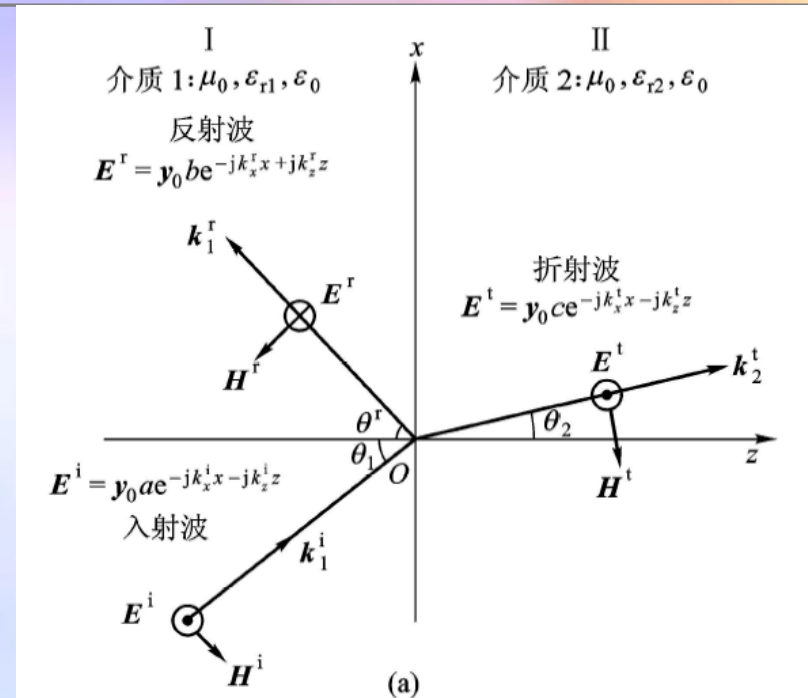
$$\begin{cases} \mathbf{E}(x, z) = E_y(x, z) \mathbf{y}_0 \\ \mathbf{H}(x, z) = H_x(x, z) \mathbf{x}_0 + H_z(x, z) \mathbf{z}_0 \end{cases}$$

定义反射系数 $\Gamma = \frac{E_y^r}{E_y^i}$

定义透射系数 $T = \frac{E_y^t}{E_y^i}$

介质交界面对波的反射、透射归结为求反射系数 Γ 与透射系数 T 。

求解方法：场量匹配法和传输线模型法。



介质交界面对TE平面波
（垂直极化波）的反射和透射

TE波 - 场量匹配法

第一步：波矢的表达式 - 反射光线与入射光线、法线在同一平面上

入射波的波矢 $\mathbf{k}_1^i = k_x^i \mathbf{x}_0 + k_z^i \mathbf{z}_0$

反射波的波矢 $\mathbf{k}_1^r = k_x^r \mathbf{x}_0 - k_z^r \mathbf{z}_0$

折射波的波矢 $\mathbf{k}_2^t = k_x^t \mathbf{x}_0 + k_z^t \mathbf{z}_0$

在同一个介质中，同频率的波， k 的幅值一样，所以波矢也可以写为如下形式： $k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}$

入射波的波矢 $\mathbf{k}_1^i = k_1 \sin \theta_1 \mathbf{x}_0 + k_1 \cos \theta_1 \mathbf{z}_0$

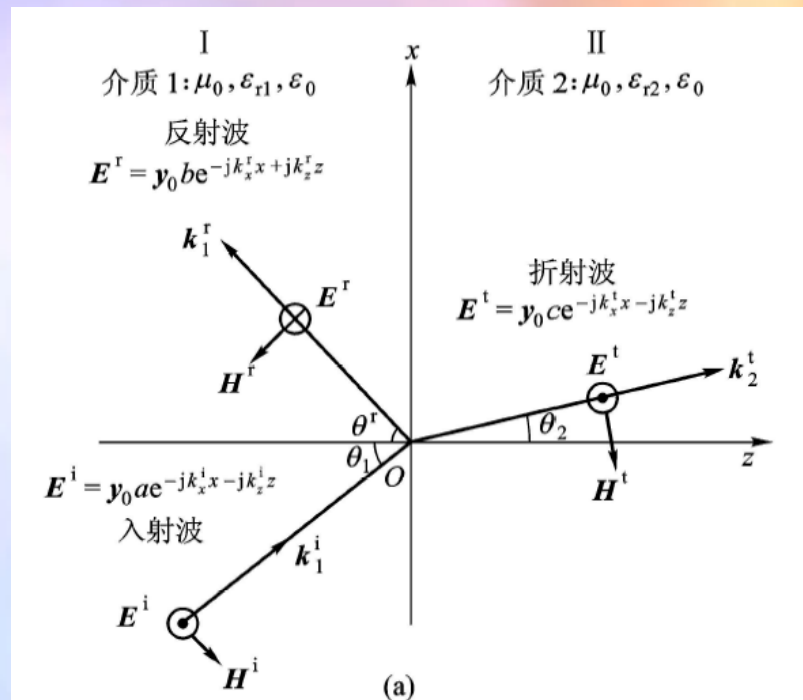
反射波的波矢 $\mathbf{k}_1^r = k_1 \sin \theta^r \mathbf{x}_0 - k_1 \cos \theta^r \mathbf{z}_0$

折射波的波矢 $\mathbf{k}_2^t = k_2 \sin \theta_2 \mathbf{x}_0 + k_2 \cos \theta_2 \mathbf{z}_0$

其中，介质I的传播常数 $k_1 = \omega\sqrt{\varepsilon_{r1}\varepsilon_0\mu_0} = k_0\sqrt{\varepsilon_{r1}}$

介质II的传播常数 $k_2 = \omega\sqrt{\varepsilon_{r2}\varepsilon_0\mu_0} = k_0\sqrt{\varepsilon_{r2}}$

真空中的传播常数 $k_0 = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$



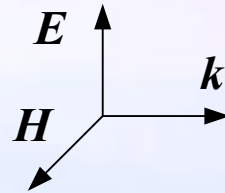
假设介质I和介质II
的磁导率 μ_0

TE波 – 场量匹配法

第二步：根据电场写磁场

入射波、反射波、折射波都可以看作沿各自 $\mathbf{k}$ 方向的TEM波，因此都满足：
 $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{H}$ 、 $\mathbf{k}$ 三者构成右手螺旋关系

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{k}_0 \times \mathbf{E}}{\eta} = \frac{1}{\omega\mu_0} \mathbf{k} \times \mathbf{E}$$

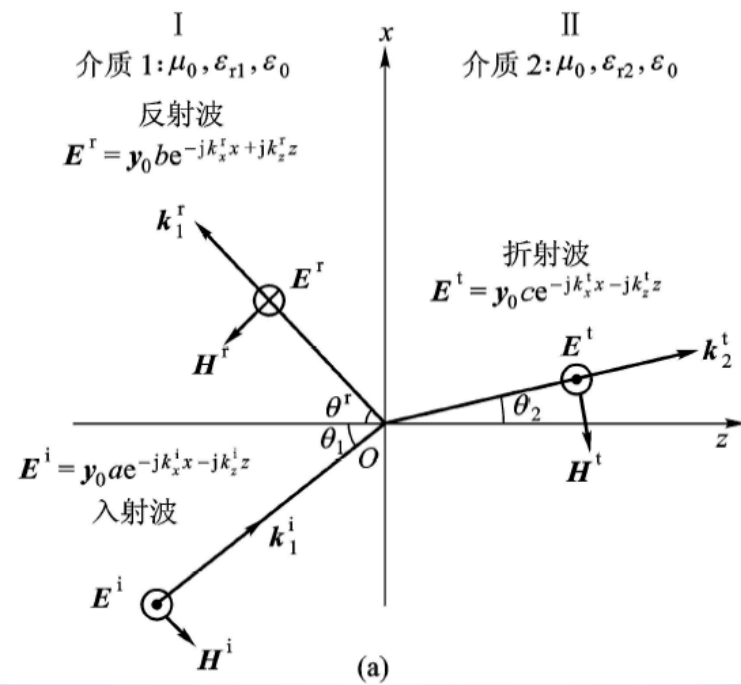


横电磁波
(TEM)

入射波，设 $\mathbf{E}^i = \mathbf{y}_0 E_y^i(x, z) = \mathbf{y}_0 a e^{-jk_x^i x} e^{-jk_z^i z}$

得到

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^i &= \frac{1}{\omega\mu_0} \mathbf{k}_1^i \times \mathbf{E}^i \\ &= \frac{1}{\omega\mu_0} (k_x^i \mathbf{x}_0 + k_z^i \mathbf{z}_0) \times (\mathbf{y}_0 E_y^i) \\ &= \frac{E_y^i}{\omega\mu_0} (-k_z^i \mathbf{x}_0 + k_x^i \mathbf{z}_0) \\ &= \mathbf{x}_0 H_x^i(x, z) + \mathbf{z}_0 H_z^i(x, z) \end{aligned}$$

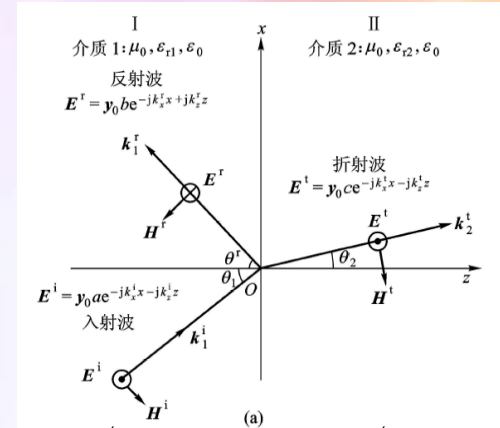


反射波, 设 $\mathbf{E}^r = \mathbf{y}_0 E_y^r(x, z) = \mathbf{y}_0 b e^{-jk_x^r x} e^{jk_z^r z}$

$$\begin{aligned} \text{得到 } \mathbf{H}^r &= \frac{1}{\omega \mu_0} \mathbf{k}_1^r \times \mathbf{E}^r = \frac{1}{\omega \mu_0} (k_x^r \mathbf{x}_0 - k_z^r \mathbf{z}_0) \times (\mathbf{y}_0 E_y^r) = \mathbf{x}_0 H_x^r(x, z) + \mathbf{z}_0 H_z^r(x, z) \\ &= \frac{E_y^r}{\omega \mu_0} (k_z^r \mathbf{x}_0 + k_x^r \mathbf{z}_0) \end{aligned}$$

折射波, 设 $\mathbf{E}^t = \mathbf{y}_0 E_y^t(x, z) = \mathbf{y}_0 c e^{-jk_x^t x} e^{-jk_z^t z}$

$$\begin{aligned} \text{得到 } \mathbf{H}^t &= \frac{1}{\omega \mu_0} \mathbf{k}_2^t \times \mathbf{E}^t = \frac{1}{\omega \mu_0} (k_x^t \mathbf{x}_0 + k_z^t \mathbf{z}_0) \times (\mathbf{y}_0 E_y^t) = \mathbf{x}_0 H_x^t(x, z) + \mathbf{z}_0 H_z^t(x, z) \\ &= \frac{E_y^t}{\omega \mu_0} (-k_z^t \mathbf{x}_0 + k_x^t \mathbf{z}_0) \end{aligned}$$



a , b , c 表示入射、反射、折射波电场的幅度, a 是已知的, b 和 c 是待求的。由 b 和 c 可以求解反射系数 Γ 与透射系数 T , 进而可以求解反射和折射波电场、反射和折射波磁场。

斯耐尔 (Snell) 定律和反射定理

第三部：利用边界条件得到方程

边界条件：界面两边电场、磁场切向分量连续

$$\begin{cases} \mathbf{n}_0 \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = 0 \\ \mathbf{n}_0 \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_y^i(x, 0) + E_y^r(x, 0) = E_y^t(x, 0) \\ H_x^i(x, 0) + H_x^r(x, 0) = H_x^t(x, 0) \end{cases}$$

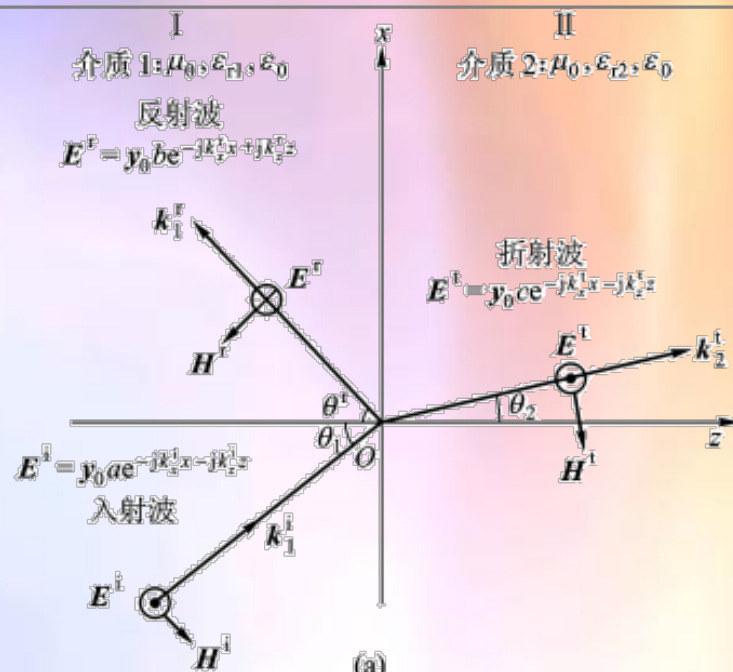
得到

$$\begin{cases} a e^{-jk_x^i x} + b e^{-jk_x^r x} = c e^{-jk_x^t x} \\ -\frac{k_z^i}{\omega \mu_0} a e^{-jk_x^i x} + \frac{k_z^r}{\omega \mu_0} b e^{-jk_x^r x} = -\frac{k_z^t}{\omega \mu_0} c e^{-jk_x^t x} \end{cases}$$

要使上两式对任意 x 都成立，只有

$$k_x^i = k_x^r = k_x^t = k_x$$

即入射波、反射波、折射波沿横向（ x 方向）的传播常数相等。- 边界条件要求



斯耐尔 (Snell) 定律和反射定理

由此可得

$$k_x^i = k_1 \sin \theta_1 = k_x^r = k_2 \sin \theta_2$$

$$\sqrt{\varepsilon_{r1}} \sin \theta_1 = \sqrt{\varepsilon_{r2}} \sin \theta_2$$

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \quad n = \sqrt{\varepsilon_r}$$

这就是物理学中熟知的斯耐尔定律

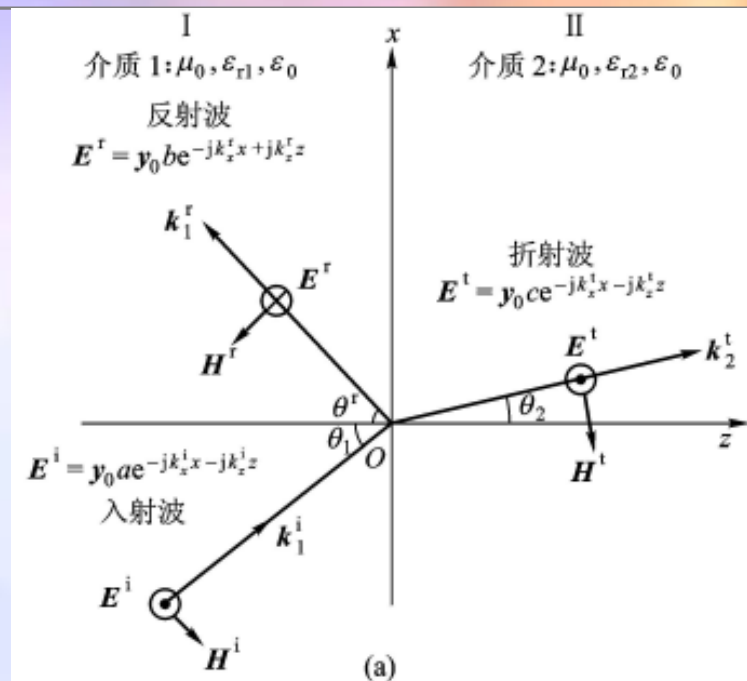
$$k_x^i = k_1 \sin \theta_1 = k_x^r = k_1 \sin \theta^r$$

$$\theta_1 = \theta^r$$

这就是反射定理

沿纵向z的传播常数

$$\begin{cases} k_z^r = k_z^i = \sqrt{k_1^2 - k_x^2} = k_{z1} \\ k_z^t = \sqrt{k_2^2 - k_x^2} = k_{z2} \end{cases}$$



反射系数与折射系数

$$\begin{cases} ae^{-jk_x^i x} + be^{-jk_x^r x} = ce^{-jk_x^t x} \\ -\frac{k_z^i}{\omega\mu_0} ae^{-jk_x^i x} + \frac{k_z^r}{\omega\mu_0} be^{-jk_x^r x} = -\frac{k_z^t}{\omega\mu_0} ce^{-jk_x^t x} \end{cases}$$

得到

$$\begin{cases} a + b = c \\ Y_1(a - b) = Y_2 c \end{cases} \quad Y_1 = \frac{k_{z1}}{\omega\mu_0}, Y_2 = \frac{k_{z2}}{\omega\mu_0}$$

Y_i 具有导纳量纲，叫做 z 方向**特征波导纳**，其倒数 $Z_i = 1/Y_i$ 具有阻抗量纲，叫做 z 方向**特征波阻抗**。

由此得到反射系数 $\Gamma(z=0)$ 与透射系数 $T(z=0)$ ：

$$\Gamma(z=0) = \frac{E_y^r(z=0)}{E_y^i(z=0)} = \frac{b}{a} = \frac{Y_1 - Y_2}{Y_1 + Y_2} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} = \frac{k_{z1} - k_{z2}}{k_{z1} + k_{z2}}$$

$$T(z=0) = \frac{E_y^t(z=0)}{E_y^i(z=0)} = \frac{c}{a} = \frac{2Y_1}{Y_1 + Y_2} = \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{2k_{z1}}{k_{z1} + k_{z2}} = 1 + \Gamma(z=0)$$

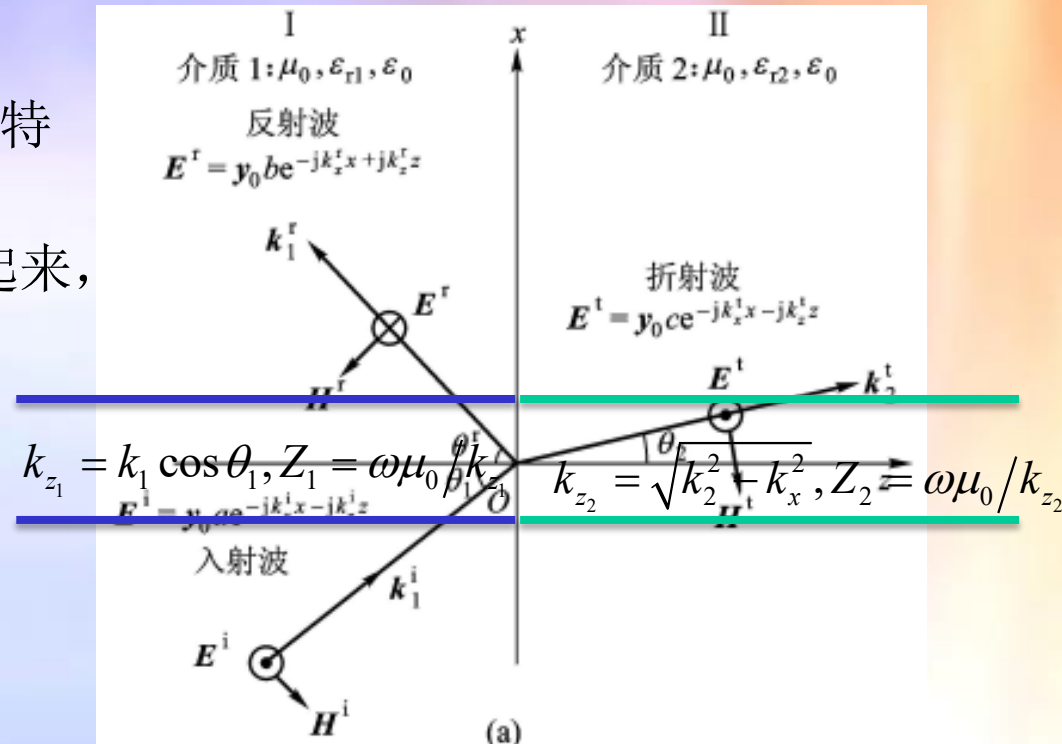
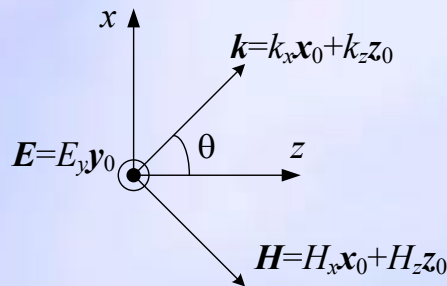
TE波 - 传输线模型法

20

区域I、II沿z方向波的传播都可用特定参数的传输线等效。

两个传输线能否在交界面直接连起来，还需要证明。

TE波



$$\begin{array}{c} \xrightarrow{I} \\ U \quad k_z, \quad Z = \frac{\omega\mu}{k_z} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{1}{\cos\theta} \quad z \end{array}$$

$$k_z = k \cos\theta$$

交界面两边电场、磁场切向分量连续

$$\begin{cases} E_y = \varphi(x)U(z) & \varphi(x) = e^{-jk_x x} \\ H_x = -\varphi(x)I(z) \end{cases}$$

横向场分量

$$\begin{cases} E_y^i(x, 0) + E_y^r(x, 0) = E_y^t(x, 0) \\ H_x^i(x, 0) + H_x^r(x, 0) = H_x^t(x, 0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} [U_1^i + U_1^r](z=0) = U_2^i(z=0) \\ [I_1^i + I_1^r](z=0) = I_2^i(z=0) \end{cases}$$

TE波 - 传输线模型法

$$\begin{cases} U_1(z=0) = U_2(z=0) \\ I_1(z=0) = I_2(z=0) \end{cases}$$

两传输线在交界面可直接连接。

$$\Gamma(z=0) = \frac{U_1^r}{U_1^i} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} \quad \text{电压反射系数}$$

$$\text{因为 } U_1(z) = U_1^i [1 + \Gamma(z)] e^{-jk_{z1}z}$$

$$U_2(z) = U_2^i e^{-jk_{z2}z}$$

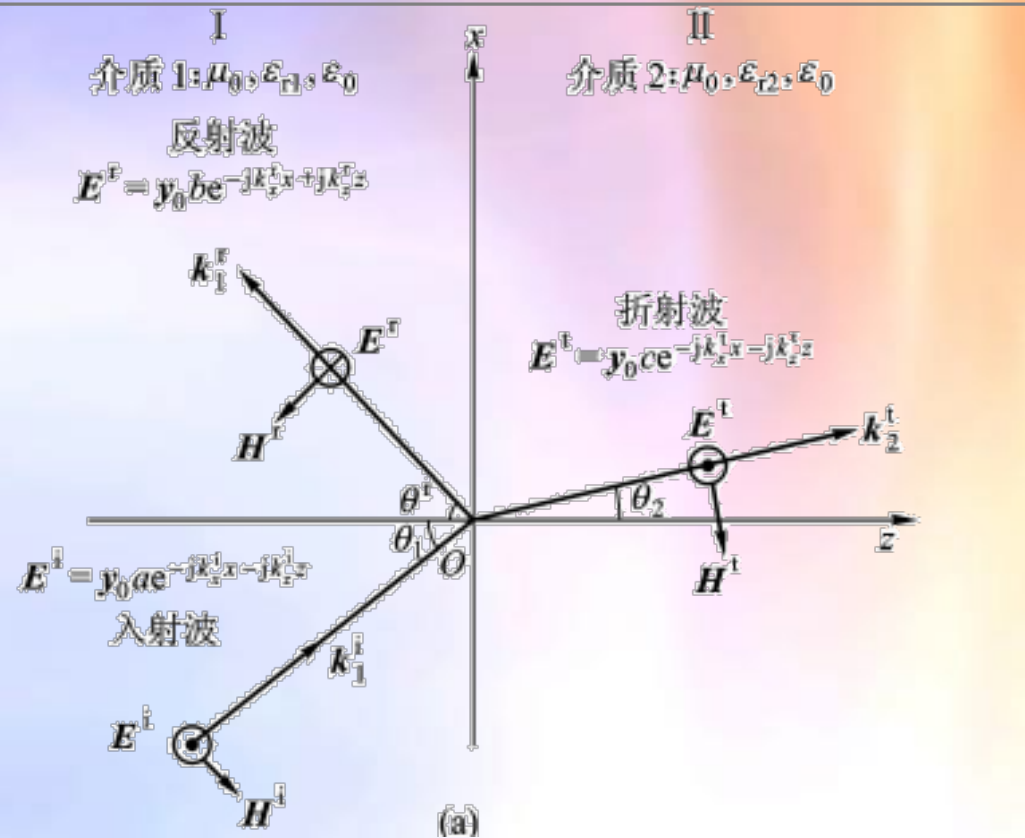
$$\text{在 } z=0 \text{ 交界面, } U_1(0) = U_2(0)$$

$$U_1^i (1 + \Gamma(z=0)) = U_2^i$$

$$\text{所以折射系数 } T(z=0) = \frac{U_2^i}{U_1^i}$$

$$T(z=0) = 1 + \Gamma(z=0)$$

与前面用场量匹配法得到的结果一致。



$$k_{z1} = k_1 \cos \theta_1, Z_1 = \omega \mu_0 / k_{z1} \quad k_{z2} = \sqrt{k_2^2 - k_x^2}, Z_2 = \omega \mu_0 / k_{z2}$$

$z=0$

z

TE波 – 传输线模型法

22

横向场量沿纵向的分布与电压 U 、电流 I 沿传输线分布相同。

$z < 0$ 区域I

$$U_1(z) = [1 + \Gamma(z)] U_1^i e^{-jk_{z1}z}$$

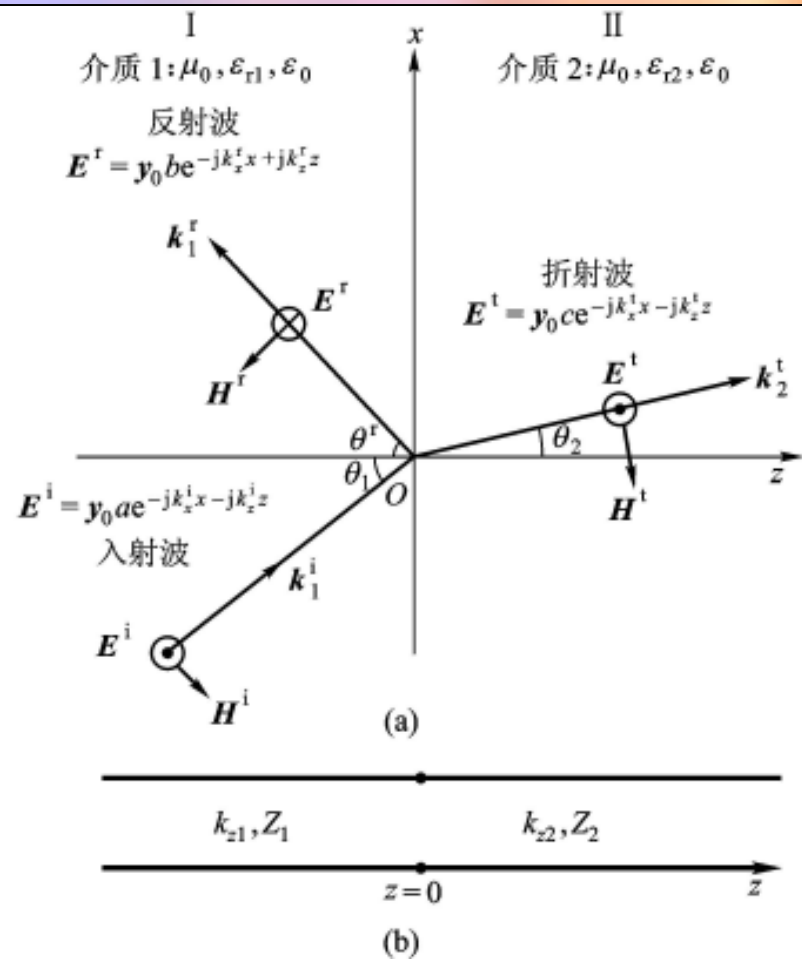
$$I_1(z) = [1 - \Gamma(z)] \frac{U_1^i}{Z_1} e^{-jk_{z1}z}$$

$z > 0$ 的区域II

$$U_2(z) = U_2^i e^{-jk_{z2}z}$$

$$I_2(z) = \frac{U_2^i}{Z_2} e^{-jk_{z2}z}$$

$z = 0$ 处电压 U 连续。

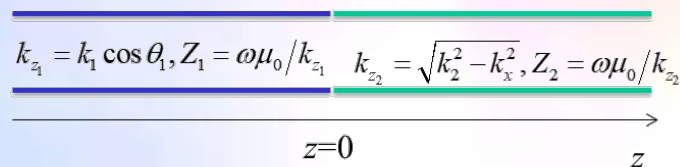


TE波 - 传输线模型法

电压、电流与横向电场、磁场之间的对应关系

$$\left\{ \begin{array}{l} E_y^i(x, z) = ae^{-jk_x x} e^{-jk_{z1} z} = \varphi(x) U_1^i e^{-jk_{z1} z} \\ E_y^r(x, z) = be^{-jk_x x} e^{jk_{z1} z} = \varphi(x) U_1^r e^{jk_{z1} z} \\ E_y^t(x, z) = ce^{-jk_x x} e^{-jk_{z2} z} = \varphi(x) U_2^i e^{-jk_{z2} z} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} H_x^i(x, z) = -\frac{k_{z1}}{\omega\mu_0} ae^{-jk_x x} e^{-jk_{z1} z} = -\varphi(x) I_1^i e^{-jk_{z1} z} \\ H_x^r(x, z) = \frac{k_{z1}}{\omega\mu_0} be^{-jk_x x} e^{jk_{z1} z} = -\varphi(x) I_1^r e^{jk_{z1} z} \\ H_x^t(x, z) = -\frac{k_{z2}}{\omega\mu_0} ce^{-jk_x x} e^{-jk_{z2} z} = -\varphi(x) I_2^i e^{-jk_{z2} z} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a = U_1^i = I_1^i Z_1 \\ b = U_1^r = -I_1^r Z_1 \\ c = U_2^i = I_2^i Z_2 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} Z_1 = \frac{\omega\mu_0}{k_{z1}} \\ Z_2 = \frac{\omega\mu_0}{k_{z2}} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{模式函数} \\ \varphi(x) = e^{-jk_x x} \end{array}$$



$$k_{z1} = k_1 \cos \theta_1, Z_1 = \omega\mu_0 / k_{z1} \quad k_{z2} = \sqrt{k_2^2 - k_x^2}, Z_2 = \omega\mu_0 / k_{z2}$$

介质I中的电压和电流分布 总电场

$$\left\{ \begin{array}{l} U_1(z) = U_1^i e^{-jk_{z1} z} + U_1^r e^{jk_{z1} z} = \frac{E_y^i(x, z) + E_y^r(x, z)}{\varphi(x)} \\ I_1(z) = I_1^i e^{-jk_{z1} z} + I_1^r e^{jk_{z1} z} = \frac{H_x^i(x, z) + H_x^r(x, z)}{-\varphi(x)} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{总磁场} \end{array}$$

介质II中的电压和电流分布

$$\left\{ \begin{array}{l} U_2(z) = U_2^i e^{-jk_{z2} z} = \frac{E_y^t(x, z)}{\varphi(x)} \\ I_2(z) = I_2^i e^{-jk_{z2} z} = \frac{H_x^t(x, z)}{-\varphi(x)} \end{array} \right.$$

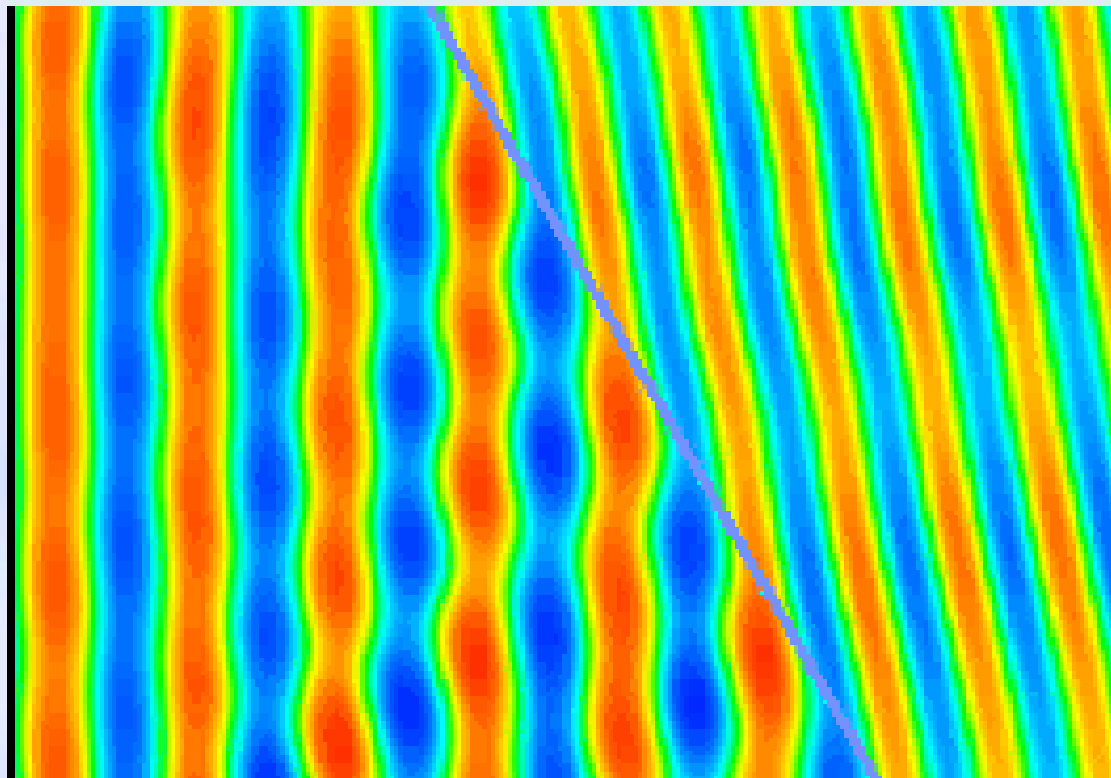
区域I与II波传播的特征

区域I、II都有沿界面分量的波 $e^{-jk_x x}$ 传播。

区域I入射波与反射波的叠加，与界面垂直的方向形成驻波。

沿界面方向为以 $e^{-jk_x x}$ 表示的行波。

区域II则是以 k_z 为特征的平面波。



TM波（或水平极化波）的反射与折射

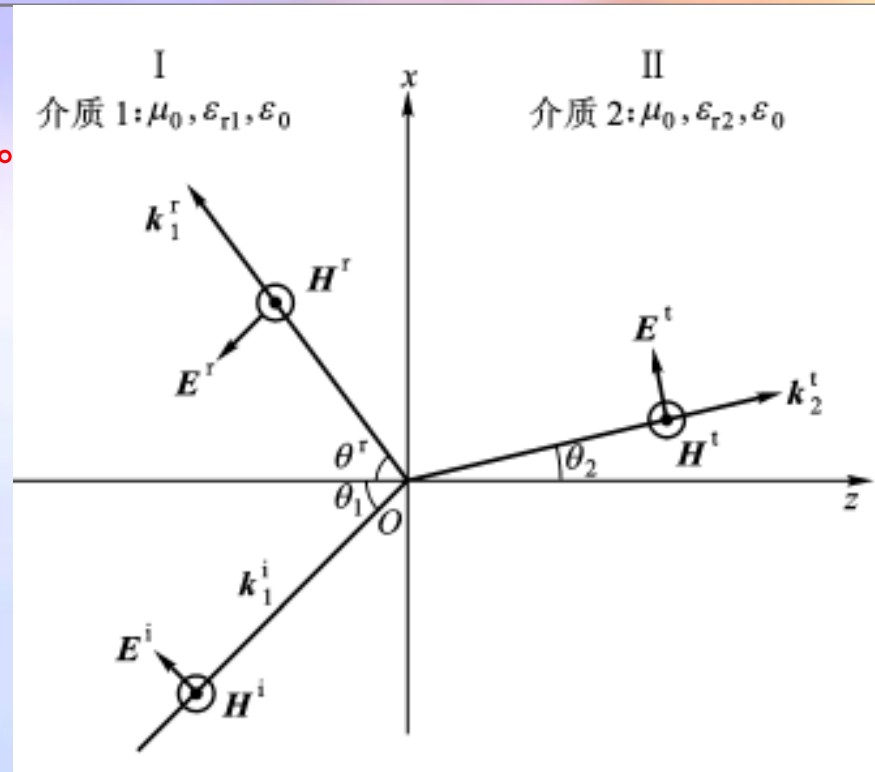
在本征坐标系下，**TM**入射波只产生**TM**反射波和**TM**折射波，不激励**TE**波。

相对于 z 方向的**TM**（水平极化）波：
 $\mathbf{H}$ 只有 y 分量，没有纵向 z 分量； $\mathbf{E}$ 在 $x-z$ 平面内，有纵向 z 分量。

$$\begin{cases} \mathbf{H}(x, z) = H_y(x, z) \mathbf{y}_0 \\ \mathbf{E}(x, z) = E_x(x, z) \mathbf{x}_0 + E_z(x, z) \mathbf{z}_0 \end{cases}$$

定义反射系数 $\Gamma = \frac{E_x^r}{E_x^i} = -\frac{H_y^r}{H_y^i}$

定义透射系数 $T = \frac{H_y^t}{H_y^i}$



介质交界面对**TM**平面波
（水平极化波）的反射和透射

介质交界面对波的反射、透射归结为求反射系数 Γ 与透射系数 T 。

求解方法：场量匹配法和传输线模型法。

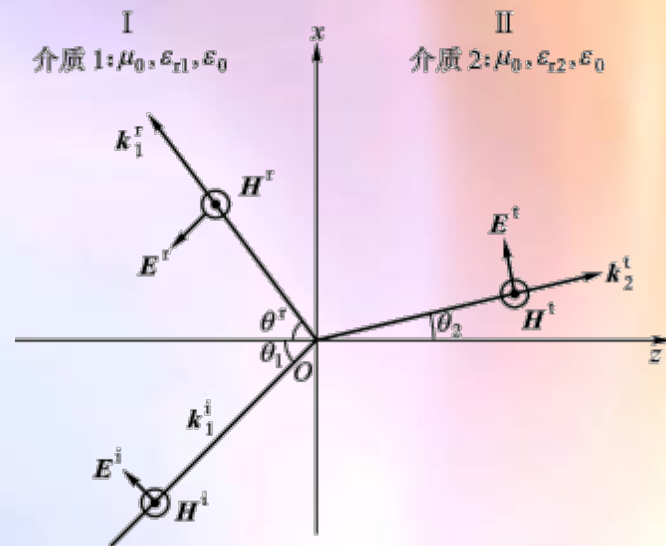
TM波 – 场量匹配法

波矢的表达式

入射波的波矢 $\mathbf{k}_1^i = k_1 \sin \theta_1 \mathbf{x}_0 + k_1 \cos \theta_1 \mathbf{z}_0$

反射波的波矢 $\mathbf{k}_1^r = k_1 \sin \theta^r \mathbf{x}_0 - k_1 \cos \theta^r \mathbf{z}_0$

折射波的波矢 $\mathbf{k}_2^t = k_2 \sin \theta_2 \mathbf{x}_0 + k_2 \cos \theta_2 \mathbf{z}_0$



其中，介质I的传播常数 $k_1 = \omega \sqrt{\varepsilon_{r1} \varepsilon_0 \mu_0} = k_0 \sqrt{\varepsilon_{r1}}$

介质II的传播常数 $k_2 = \omega \sqrt{\varepsilon_{r2} \varepsilon_0 \mu_0} = k_0 \sqrt{\varepsilon_{r2}}$

真空中的传播常数 $k_0 = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$

入射波场: $H_y^i = ae^{-jk_x^i x} e^{-jk_z^i z}$

$$E_x^i = \frac{k_z^i}{\omega \epsilon_{r1} \epsilon_0} ae^{-jk_x^i x} e^{-jk_z^i z}$$

$$E_z^i = -\frac{k_x^i}{\omega \epsilon_{r1} \epsilon_0} ae^{-jk_x^i x} e^{-jk_z^i z}$$

反射波场: $H_y^r = be^{-jk_x^r x} e^{jk_z^r z}$

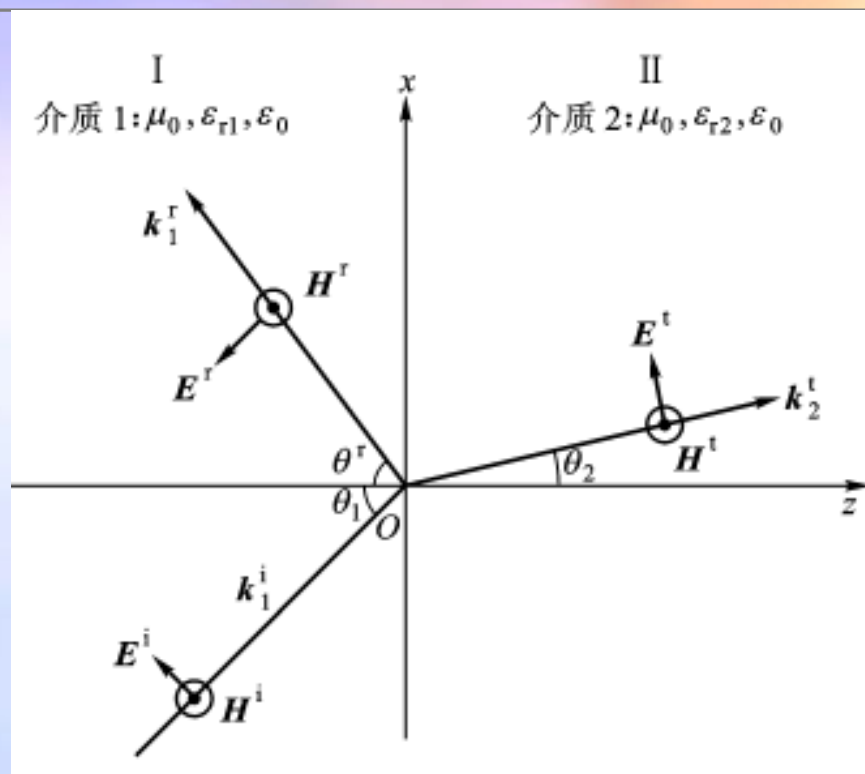
$$E_x^r = -\frac{k_z^r}{\omega \epsilon_{r1} \epsilon_0} be^{-jk_x^r x} e^{jk_z^r z}$$

$$E_z^r = -\frac{k_x^r}{\omega \epsilon_{r1} \epsilon_0} be^{-jk_x^r x} e^{jk_z^r z}$$

折射波场: $H_y^t = ce^{-jk_x^t x} e^{-jk_z^t z}$

$$E_x^t = \frac{k_z^t}{\omega \epsilon_{r2} \epsilon_0} ce^{-jk_x^t x} e^{-jk_z^t z}$$

$$E_z^t = -\frac{k_x^t}{\omega \epsilon_{r2} \epsilon_0} ce^{-jk_x^t x} e^{-jk_z^t z}$$



E 、 H 、 k 三者构成
右手螺旋关系

TM波 - 场量匹配法

边界条件关系式，在 $z=0$ 界面

$$H_y^i(x,0) + H_y^r(x,0) = H_y^t(x,0)$$

$$E_x^i(x,0) + E_x^r(x,0) = E_x^t(x,0)$$

可以得到与TE波类似的关系式

$$ae^{-jk_x^i x} + be^{-jk_x^r x} = ce^{-jk_x^t x}$$

$$\frac{k_z^i}{\omega \epsilon_{r1} \epsilon_0} ae^{-jk_x^i x} - \frac{k_z^r}{\omega \epsilon_{r1} \epsilon_0} be^{-jk_x^r x} = \frac{k_z^t}{\omega \epsilon_{r2} \epsilon_0} ce^{-jk_x^t x}$$

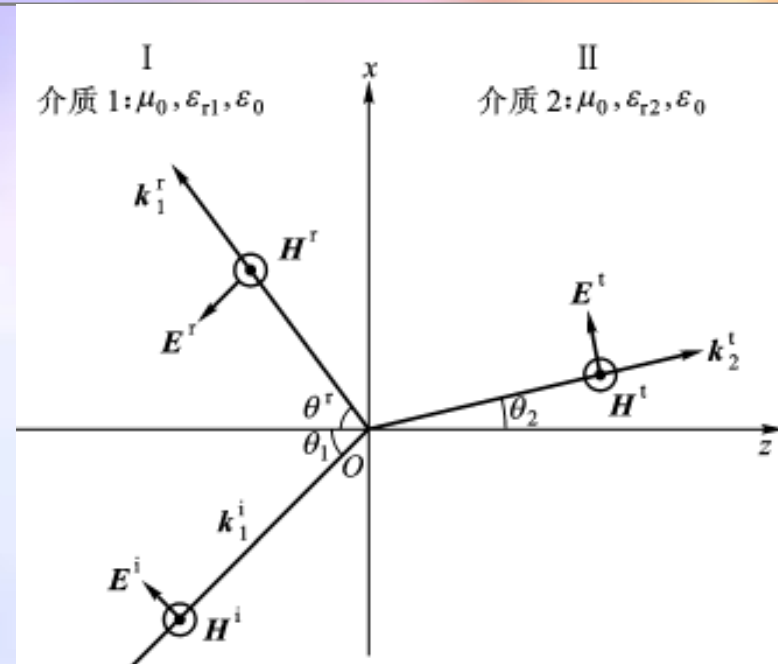
由此得到：

$$k_x^i = k_x^r = k_x^t = k_x = k_1 \sin \theta_1$$

$$k_z^i = k_z^r = k_{z1} = k_1 \cos \theta_1$$

$$k_z^t = k_{z2} = k_2 \cos \theta_2 = k_0 \sqrt{\epsilon_{r2} - \epsilon_{r1} \sin^2 \theta_1}$$

由介质1的色散关系也可得出入射角与反射角相等的结论，折射角 θ_2 与入射角 θ_1 也满足斯耐尔定律。



TM波 - 场量匹配法

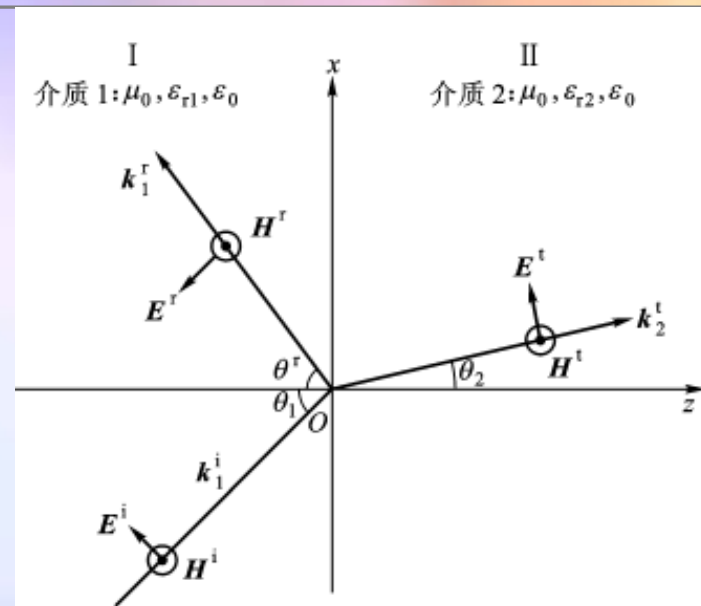
29

$$ae^{-jk_x^i x} + be^{-jk_x^r x} = ce^{-jk_x^t x}$$

$$\frac{k_z^i}{\omega \varepsilon_{r1} \varepsilon_0} ae^{-jk_x^i x} - \frac{k_z^r}{\omega \varepsilon_{r1} \varepsilon_0} be^{-jk_x^r x} = \frac{k_z^t}{\omega \varepsilon_{r2} \varepsilon_0} ce^{-jk_x^t x}$$

边界面 $z=0$ ，得到

$$\begin{cases} a + b = c \\ Z_1(a - b) = Z_2 c \end{cases} \quad Z_1 = \frac{k_{z1}}{\omega \varepsilon_{r1} \varepsilon_0}, Z_2 = \frac{k_{z2}}{\omega \varepsilon_{r2} \varepsilon_0}$$



反射系数 $\Gamma(z=0)$ 与透射系数 $T(z=0)$

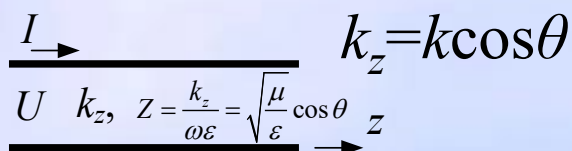
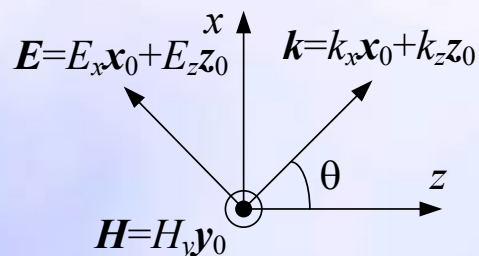
$$\Gamma(z=0) = \frac{E_x^r}{E_x^i} = -\frac{b}{a} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} = \frac{\varepsilon_{r1} k_{z2} - \varepsilon_{r2} k_{z1}}{\varepsilon_{r1} k_{z2} + \varepsilon_{r2} k_{z1}}$$

$$T(z=0) = \frac{H_y^t}{H_y^i} = \frac{c}{a} = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} = \frac{2\varepsilon_{r2} k_{z1}}{\varepsilon_{r1} k_{z2} + \varepsilon_{r2} k_{z1}} = 1 - \Gamma(z=0)$$

TM波 – 传输线模型

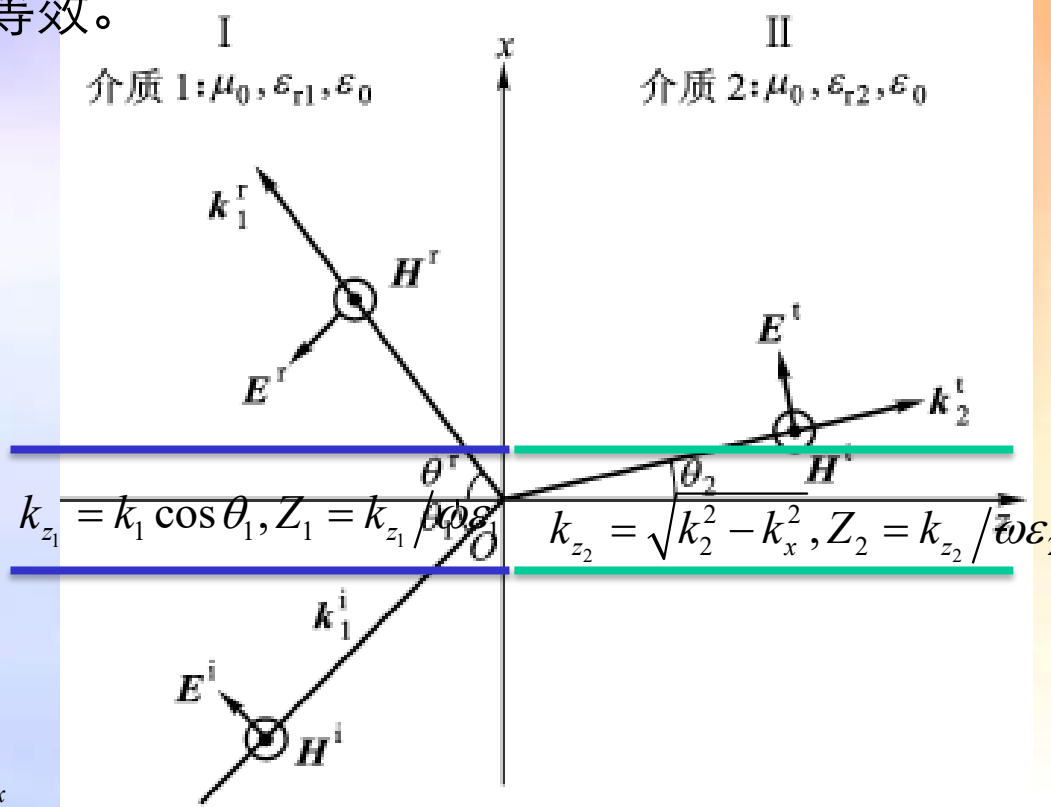
区域I与II z 方向波的传播用传输线等效。

TM波



$$\begin{cases} H_y = \varphi(x) I(z) \\ E_x = \varphi(x) U(z) \end{cases} \quad \varphi(x) = e^{-jk_x x}$$

横向场分量



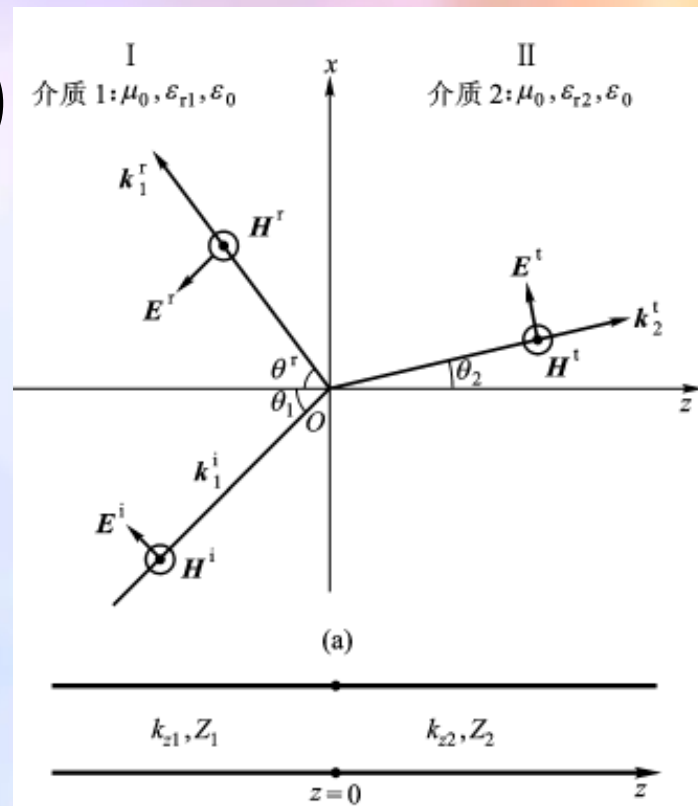
界面($z=0$)切向场连续可导出

$$U_1(z=0^-) = U_2(z=0^+), \quad I_1(z=0^-) = I_2(z=0^+)$$

$$\Gamma(z=0) = \frac{U_1^r}{U_1^i} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} = \frac{E_x^r}{E_x^i}$$

$$T(z=0) = \frac{I_2^t}{I_1^i} = 1 - \Gamma(z=0) = \frac{H_y^t}{H_y^i}$$

电压反
射系数



电压、电流与横向电场、磁场之间的对应关系

$$\begin{cases} H_y^i(x, z) = ae^{-jk_x^i x} e^{-jk_{z1} z} = \varphi(x) I_1^i e^{-jk_{z1} z} \\ H_y^r(x, z) = be^{-jk_x^r x} e^{jk_{z1} z} = \varphi(x) I_1^r e^{jk_{z1} z} \\ H_y^t(x, z) = ce^{-jk_x^t x} e^{-jk_{z2} z} = \varphi(x) I_2^i e^{-jk_{z2} z} \end{cases} \quad \begin{cases} E_x^i(x, z) = \frac{k_z^i}{\omega \epsilon_{r1} \epsilon_0} ae^{-jk_x^i x} e^{-jk_{z1} z} = \varphi(x) U_1^i e^{-jk_{z1} z} \\ E_x^r(x, z) = -\frac{k_z^r}{\omega \epsilon_{r1} \epsilon_0} be^{-jk_x^r x} e^{jk_{z1} z} = \varphi(x) U_1^r e^{jk_{z1} z} \\ E_x^t(x, z) = \frac{k_z^t}{\omega \epsilon_{r2} \epsilon_0} ce^{-jk_x^t x} e^{-jk_{z2} z} = \varphi(x) U_2^i e^{-jk_{z2} z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = I_1^i = \frac{U_1^i}{Z_1} \\ b = I_1^r = -\frac{U_1^r}{Z_1} \\ c = I_2^i = \frac{U_2^i}{Z_2} \end{cases} \quad \begin{cases} Z_1 = \frac{k_{z1}}{\omega \epsilon_1} \\ Z_2 = \frac{k_{z2}}{\omega \epsilon_2} \end{cases} \quad \text{模式函数} \quad \varphi(x) = e^{-jk_x x}$$

$$k_{z1} = k_1 \cos \theta_1, Z_1 = k_{z1} / \omega \epsilon_1 \quad k_{z2} = \sqrt{k_2^2 - k_x^2}, Z_2 = k_{z2} / \omega \epsilon_2$$

介质I中的电压和电流分布

总电场

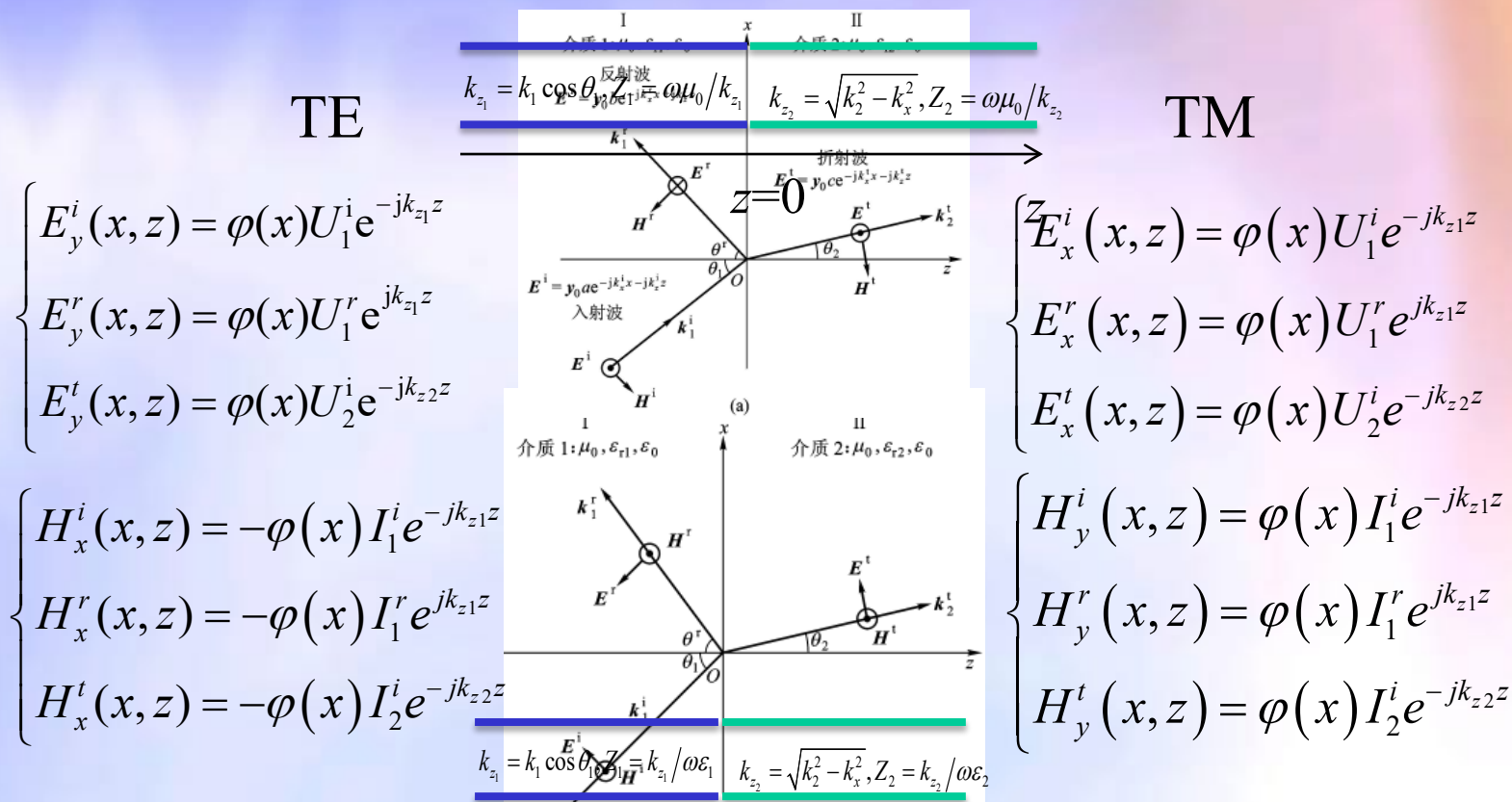
介质II中的电压和电流分布

$$\begin{cases} U_1(z) = U_1^i e^{-jk_{z1} z} + U_1^r e^{jk_{z1} z} = \frac{E_x^i(x, z) + E_x^r(x, z)}{\varphi(x)} \\ I_1(z) = I_1^i e^{-jk_{z1} z} + I_1^r e^{jk_{z1} z} = \frac{H_y^i(x, z) + H_y^r(x, z)}{\varphi(x)} \end{cases}$$

总磁场

$$\begin{cases} U_2(z) = U_2^i e^{-jk_{z2} z} = \frac{E_x^t(x, z)}{\varphi(x)} \\ I_2(z) = I_2^i e^{-jk_{z2} z} = \frac{H_y^t(x, z)}{\varphi(x)} \end{cases}$$

TE、TM传输线模型的理解



在本征坐标系下，TE、TM波斜入射到介质交界面时，在区域I和II，电磁场的横向分量：

- y方向没有波的传播 – 反射、入射光线、法线在同一平面上；
 - x方向有行波的传播， $\varphi(x) = e^{-jk_x x}$ ，行波的幅度与z有关；
 - z方向波的传播可以用级联传输线上的电压和电流表示
- $k_{z1} = k_1 \cos \theta_1$
 $k_{z2} = k_2 \cos \theta_2$
 $k_x = k_1 \sin \theta_1 = k_2 \sin \theta_2$

复习要点

- 麦克斯韦方程在介质交界面形式就是边界条件。它是处理波在交界面行为的出发点。
 - 介质交界面对波的反射、透射可用反射系数 Γ 与透射系数 T 表示。
 - 介质交界面对波的反射、透射可分为TE、TM两种情况处理，其分析既可以用场量匹配法，也可用传输线模型法，两种方法等价。
- 区域I入射波与反射波的干涉，在与界面垂直方向形成驻波，沿界面方向为 $e^{-jk_x x}$ 的行波。

复习范围

5.1, 5.2