

电磁场与电磁波

第11讲

4.6 电各向异性介质中平面波的传播

1. 电各向异性介质中的波方程及其平面波解
2. 寻常波和非寻常波

4.7 磁化铁氧体中的平面波

魏兴昌

浙江大学

weixc@zju.edu.cn

作业：4.16, 4.10, 4.13

4.6 电各向异性介质中平面波的传播

1. 电各向异性介质中的波方程及其平面波解
2. 寻常波和非寻常波

4.7 磁化铁氧体中的平面波

电各向异性介质中的波方程

电各向异性、无源、无耗介质中麦克斯韦方程组

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H} \\ \nabla \times \mathbf{H} = j\omega\mathbf{D} = j\omega\varepsilon_0\overline{\overline{\varepsilon}}_r \cdot \mathbf{E} \\ \nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \end{cases} \quad \overline{\overline{\varepsilon}}_r = \frac{1}{\varepsilon_0} \overline{\overline{\varepsilon}}$$

假定各向异性介质中波方程也有平面波形式的解

$$\begin{cases} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{H}_0 e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \end{cases} \quad \mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0 \text{ 和 } \mathbf{k} \text{ 待求}$$

将 ∇ 算子替换为 $-j\mathbf{k}$

$$\begin{cases} -j\mathbf{k} \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H} \\ -j\mathbf{k} \times \mathbf{H} = j\omega\mathbf{D} \\ -j\mathbf{k} \cdot \mathbf{D} = 0 \\ -j\mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} \mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega\mu\mathbf{H} \\ \mathbf{k} \times \mathbf{H} = -\omega\mathbf{D} \\ \mathbf{k} \cdot \mathbf{D} = 0 \\ \mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = 0 \end{cases}$$

在平面波条件下,
简化的麦克斯韦
方程组

电各向异性介质中的波方程

4

在平面波条件下，
简化的麦克斯韦
方程组

$$\begin{cases} \mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega \mu \mathbf{H} \\ \mathbf{k} \times \mathbf{H} = -\omega \mathbf{D} \\ \mathbf{k} \cdot \mathbf{D} = 0 \\ \mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = 0 \end{cases}$$

用 $\mathbf{k} \times$ 等式 $\mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega \mu \mathbf{H}$ 两边，可导出电磁场满足的矢量波动方程

$$\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) = \omega \mu \mathbf{k} \times \mathbf{H} = -\omega^2 \mu \mathbf{D} = -\omega^2 \varepsilon_0 \mu \bar{\bar{\varepsilon}}_r \cdot \mathbf{E}$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \quad \begin{matrix} \text{blue arrow} \\ \text{blue arrow} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{red arrow} \\ \text{red arrow} \end{matrix} \quad \begin{cases} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{H}_0 e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \end{cases}$$

$$\boxed{k^2 \mathbf{E}_0 - \mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0) - k_0^2 \bar{\bar{\varepsilon}}_r \cdot \mathbf{E}_0 = 0}$$

$$k_0^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu$$

同理可得 $\mathbf{k} \times \bar{\bar{\varepsilon}}_r^{-1} \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{H}_0) + k_0^2 \mathbf{H}_0 = 0$

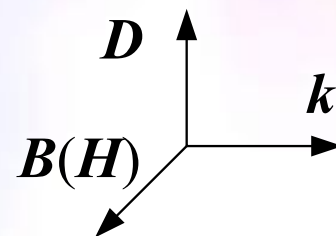
这就是平面波复振幅应当满足的波动方程

在平面波条件下,
简化的麦克斯韦
方程组

$$\begin{cases} \mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega \mu \mathbf{H} \\ \mathbf{k} \times \mathbf{H} = -\omega \mathbf{D} \\ \mathbf{k} \cdot \mathbf{D} = 0 \\ \mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{k} \cdot \mathbf{D} = 0 \\ \mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = \mu \mathbf{k} \cdot \mathbf{H} = 0 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{D} \text{ 和 } \mathbf{B} \text{ (或 } \mathbf{H}) \text{ 均与波矢量 } \mathbf{k} \text{ 垂直。}$$

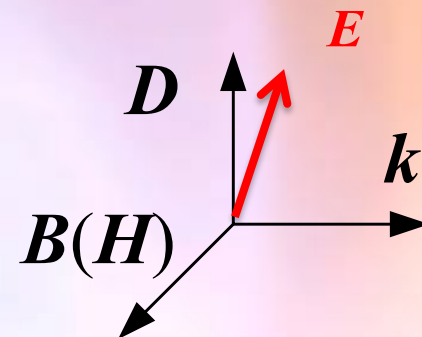
$$\mathbf{k} \times \mathbf{H} = -\omega \mathbf{D} \Rightarrow \mathbf{D} \text{ 和 } \mathbf{H} \text{ 垂直。}$$



$\mathbf{D}$, $\mathbf{H}$ ($\mathbf{B}$) 和 $\mathbf{k}$ 三个矢量是按右手螺旋关系互相垂直

在平面波条件下,
简化的麦克斯韦
方程组

$$\begin{cases} \mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega \mu \mathbf{H} \\ \mathbf{k} \times \mathbf{H} = -\omega \mathbf{D} \\ \mathbf{k} \cdot \mathbf{D} = 0 \\ \mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = 0 \end{cases}$$



由于介电常数 $\overline{\epsilon}$ 是张量, $\mathbf{D}$ 与 $\mathbf{E}$ 一般是不平行的。

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega \mu \mathbf{H}$$

$\mathbf{D}$ 和 $\mathbf{H}$ 互相垂直

$$(\mathbf{k} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{D} = \omega \mu \mathbf{H} \cdot \mathbf{D} = 0$$

各向异性介质中平面波场矢量与
波矢量的关系

$\mathbf{E}$ 在 $\mathbf{D}$ 和 $\mathbf{k}$ 组成的平面内, 即 $\mathbf{E}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{k}$ 共面

*如果三个矢量满足 $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = 0$, 则 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ 共面

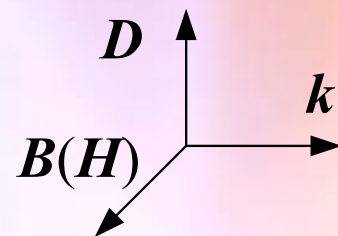
4.6 电各向异性介质中平面波的传播

1. 电各向异性介质中的波方程及其平面波解
2. 寻常波和非寻常波

4.7 磁化铁氧体中的平面波

当取单轴介质的主对称轴（光学中称为光轴）为 z 轴时，单轴介质的介电常数用张量表示为

$$\overline{\overline{\epsilon}} = \begin{pmatrix} \epsilon_{\perp} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{//} \end{pmatrix}$$



将单轴介质的介电常数表达式代入 $\mathbf{k} \cdot \mathbf{D} = 0$ 得到

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{D} = \mathbf{k} \cdot (\overline{\overline{\epsilon}} \cdot \mathbf{E}) = \mathbf{k} \cdot \begin{bmatrix} \epsilon_{\perp} E_x \\ \epsilon_{\perp} E_y \\ \epsilon_{//} E_z \end{bmatrix} = \epsilon_{\perp} (k_x E_x + k_y E_y) + \epsilon_{//} k_z E_z = 0$$

$\mathbf{k} = k_x \mathbf{x}_0 + k_y \mathbf{y}_0 + k_z \mathbf{z}_0$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = k_x E_x + k_y E_y + k_z E_z = \left(1 - \frac{\epsilon_{//}}{\epsilon_{\perp}} \right) k_z E_z$$

单轴介质的色散方程

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = \left(1 - \frac{\varepsilon_{//}}{\varepsilon_{\perp}}\right) k_z E_z \quad \text{代入} \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$$

$$\text{波动方程} \quad k^2 \mathbf{E}_0 - \mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0) - \omega^2 \mu \bar{\bar{\varepsilon}} \cdot \mathbf{E}_0 = 0$$

$$\text{得到} \quad \begin{pmatrix} k^2 - \omega^2 \mu \varepsilon_{\perp} & 0 & -\left(1 - \frac{\varepsilon_{//}}{\varepsilon_{\perp}}\right) k_x k_z \\ 0 & k^2 - \omega^2 \mu \varepsilon_{\perp} & -(1 - \frac{\varepsilon_{//}}{\varepsilon_{\perp}}) k_y k_z \\ 0 & 0 & k^2 - (1 - \frac{\varepsilon_{//}}{\varepsilon_{\perp}}) k_z^2 - \omega^2 \mu \varepsilon_{//} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \\ E_{0z} \end{pmatrix} = 0$$

$$\mathbf{k} = \mathbf{x}_0 k_x + \mathbf{y}_0 k_y + \mathbf{z}_0 k_z$$



$$\begin{pmatrix} k^2 - \omega^2 \mu \varepsilon_{\perp} & 0 & -\left(1 - \frac{\varepsilon_{//}}{\varepsilon_{\perp}}\right) k_x k_z \\ 0 & k^2 - \omega^2 \mu \varepsilon_{\perp} & -(1 - \frac{\varepsilon_{//}}{\varepsilon_{\perp}}) k_y k_z \\ 0 & 0 & k_x^2 + k_y^2 + \frac{\varepsilon_{//} k_z^2}{\varepsilon_{\perp}} - \omega^2 \mu \varepsilon_{//} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \\ E_{0z} \end{pmatrix} = 0$$

单轴介质色散方程

$$\begin{vmatrix} k^2 - \omega^2 \mu \varepsilon_{\perp} & 0 & -(1 - \frac{\varepsilon_{//}}{\varepsilon_{\perp}}) k_x k_z \\ 0 & k^2 - \omega^2 \mu \varepsilon_{\perp} & -(1 - \frac{\varepsilon_{//}}{\varepsilon_{\perp}}) k_y k_z \\ 0 & 0 & k_x^2 + k_y^2 + \frac{\varepsilon_{//} k_z^2}{\varepsilon_{\perp}} - \omega^2 \mu \varepsilon_{//} \end{vmatrix} = (k^2 - \omega^2 \mu \varepsilon_{\perp})^2 \left(k_x^2 + k_y^2 + \frac{\varepsilon_{//} k_z^2}{\varepsilon_{\perp}} - \omega^2 \mu \varepsilon_{//} \right) = 0$$

它有两个解

$$k^2 = \omega^2 \mu \varepsilon_{\perp} \quad k_x^2 + k_y^2 + \frac{\varepsilon_{//}}{\varepsilon_{\perp}} k_z^2 = \omega^2 \mu \varepsilon_{//}$$



寻常波



非寻常波

色散方程， k 随 ω 的变化关系

$$\text{波方程} \quad \begin{pmatrix} k^2 - \omega^2 \mu \epsilon_{\perp} & 0 & 0 & -\left(1 - \frac{\epsilon_{//}}{\epsilon_{\perp}}\right) k_x k_z & -\left(1 - \frac{\epsilon_{//}}{\epsilon_{\perp}}\right) k_x k_z \\ 0 & 0 & 0 & k^2 - \omega^2 \mu \epsilon_{\perp} & -\left(1 - \frac{\epsilon_{//}}{\epsilon_{\perp}}\right) k_y k_z \\ 0 & 0 & 0 & k^2 + k_y^2 + \frac{\epsilon_{//} k_z^2}{\epsilon_{\perp}} - \omega^2 \mu \epsilon_{//} & -\left(1 - \frac{\epsilon_{//}}{\epsilon_{\perp}}\right) k_y k_z \\ 0 & 0 & 0 & k^2 + k_x^2 + \frac{\epsilon_{//} k_z^2}{\epsilon_{\perp}} - \omega^2 \mu \epsilon_{//} & -\left(1 - \frac{\epsilon_{//}}{\epsilon_{\perp}}\right) k_x k_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \\ E_{0z} \end{pmatrix} = 0$$

将 $k^2 - \omega^2 \mu \epsilon_{\perp} = 0$ 代入波方程得到 $E_{z0} = 0$, 即 $E_z = 0$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = \left(1 - \frac{\epsilon_{//}}{\epsilon_{\perp}}\right) k_z E_z = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E}, \mathbf{k} \text{ 相互垂直}$$

又由于 $\mathbf{H}$ 与 $\mathbf{k}$ 垂直, 可见寻常波表示的波是相对于传播方向 $\mathbf{k}$ 的横电磁波 (TEM), 与各向同性介质中的平面波性质相同, 所以称为寻常波。

$$\mathbf{D} = \bar{\bar{\epsilon}} \cdot \mathbf{E} = \begin{pmatrix} \epsilon_{\perp} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{//} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z = 0 \end{bmatrix} = \epsilon_{\perp} \mathbf{E}$$

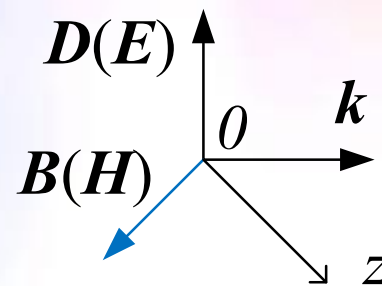
可得 $\mathbf{E}$ 与 $\mathbf{D}$ 的方向重合，寻常波。

由于 $E_z=0$ （ $\mathbf{E}$ 与 z 方向垂直），而且 $\mathbf{E}$ ， $\mathbf{k}$ 相互垂直，因此 $\mathbf{E}$ （ $\mathbf{D}$ ）垂直于 $\mathbf{k}$ 和 z 轴构成的平面（主截面）。

色散方程 $k^2 = \omega^2 \mu \epsilon_{\perp}$

相速度 $v_p = \omega / k = 1 / \sqrt{\mu \epsilon_{\perp}}$

波阻抗 $\mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega \mu \mathbf{H} \Rightarrow \eta = \frac{k}{\omega \mu} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon_{\perp}}}$



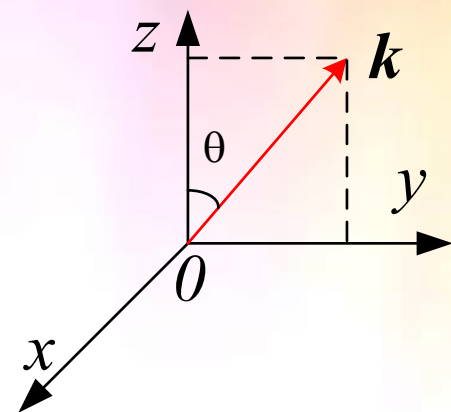
对于第二个色散方程

$$k_x^2 + k_y^2 + \frac{\epsilon_{//}}{\epsilon_{\perp}} k_z^2 = \omega^2 \mu \epsilon_{//}$$

设 $\mathbf{k}$ 在 yz 平面内， θ 是 $\mathbf{k}$ 与 z 轴的夹角，第二个解可写成更方便的形式

$$k^2 (\sin^2 \theta + \frac{\epsilon_{//}}{\epsilon_{\perp}} \cos^2 \theta) = \omega^2 \mu \epsilon_{//}$$

定义等效介电常数 ϵ_e $k^2 = \omega^2 \mu \epsilon_e, \epsilon_e = \frac{1}{\frac{\sin^2 \theta}{\epsilon_{//}} + \frac{\cos^2 \theta}{\epsilon_{\perp}}}$



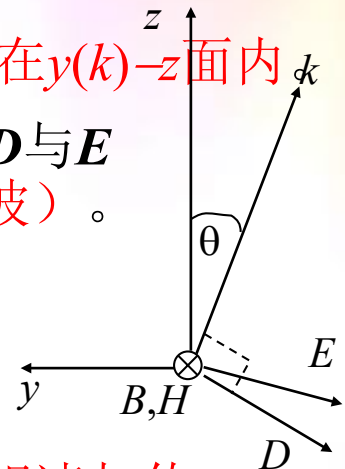
非寻常波

光轴 z 和波矢 $\mathbf{k}$ 构成的平面为主截面。取 y - z 面为主截面，则 $k_x=0$ 。

从波方程

$$\begin{pmatrix} k^2 - \omega^2 \mu \epsilon_{\perp} & 0 & -\left(1 - \frac{\epsilon_{\parallel}}{\epsilon_{\perp}}\right) k_x k_z \\ 0 & k^2 - \omega^2 \mu \epsilon_{\perp} & -\left(1 - \frac{\epsilon_{\parallel}}{\epsilon_{\perp}}\right) k_y k_z \\ 0 & 0 & k_x^2 + k_y^2 + \frac{\epsilon_{\parallel}}{\epsilon_{\perp}} k_z^2 - \omega^2 \mu \epsilon_{\parallel} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \\ E_{0z} \end{pmatrix} = 0$$

得到 $E_x=0$ ，所以 $\mathbf{E}$ 在 $y(k)$ - z 面内。又由于 $\mathbf{E}$ ， $\mathbf{D}$ ， $\mathbf{k}$ 共面， $\mathbf{D}$ 也在 $y(k)$ - z 面内。但现在 $\mathbf{E}$ 有沿波传播方向的分量，而 $\mathbf{D}$ 与 $\mathbf{k}$ 总是垂直的，所以 $\mathbf{D}$ 与 $\mathbf{E}$ 不再保持平行。而 $\mathbf{H}$ 与 $\mathbf{k}$ 垂直，所以非寻常波为**TM波（横磁波）**。

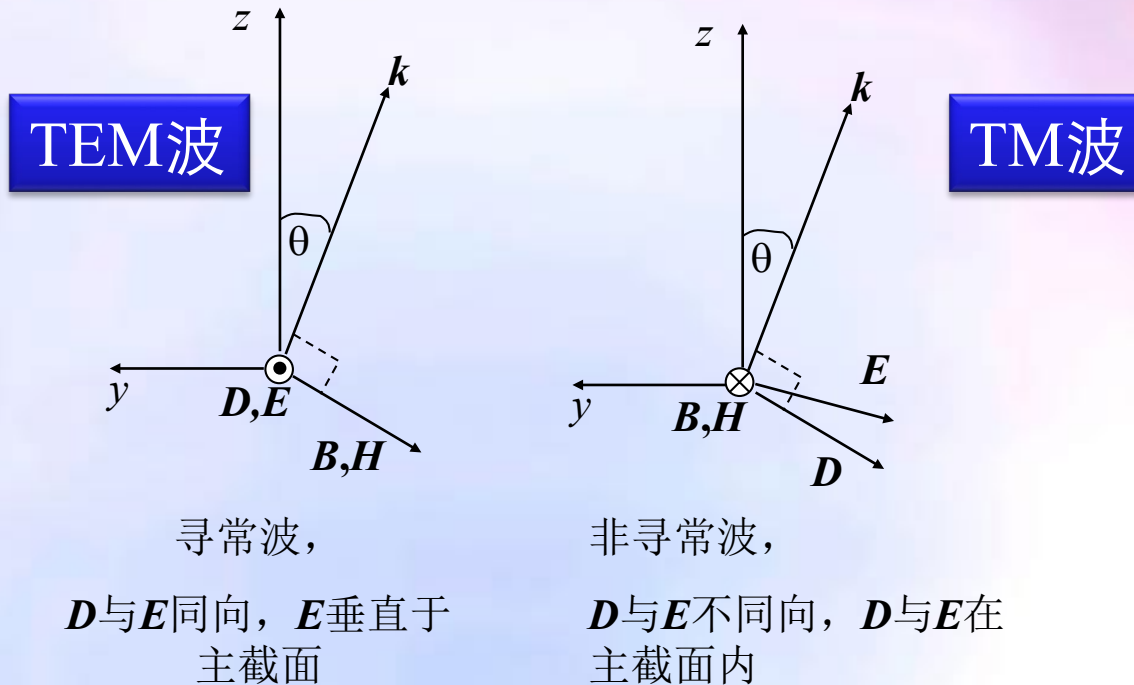


色散方程 $k^2 (\sin^2 \theta + \frac{\epsilon_{\parallel}}{\epsilon_{\perp}} \cos^2 \theta) = \omega^2 \mu \epsilon_{\parallel}$

相速度 $v_p = \omega / k = \sqrt{\frac{\epsilon_{\perp}}{\mu \epsilon_{\parallel} \sin^2 \theta + \mu \epsilon_{\perp} \cos^2 \theta}} = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon_e}}$

波的相速与传播方向有关

电磁场矢量与波矢量关系



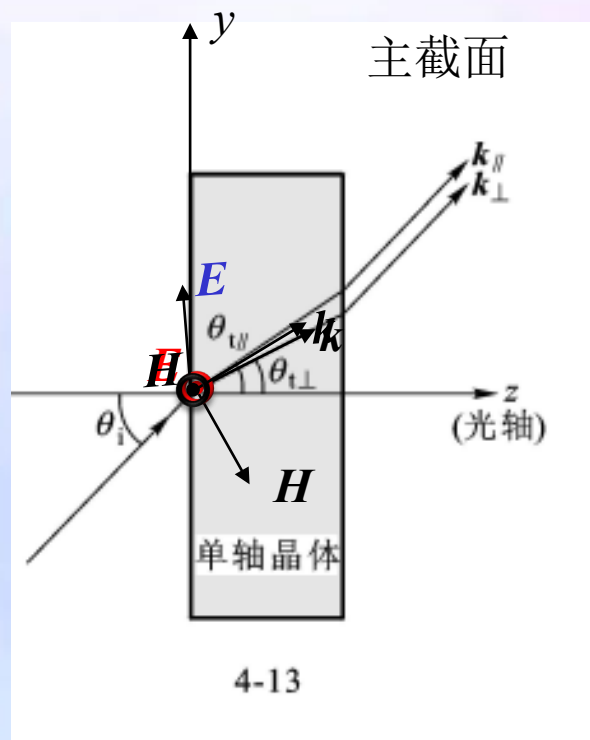
$$\mathbf{S}(\mathbf{r}) \equiv \mathbf{E}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}^*(\mathbf{r})$$

对于非寻常波，功率流的方向与波矢 $\mathbf{k}$ 的方向不同

双折射

当一极化方向任意的线极化波入射到单晶片上时将分解为极化方向（电场方向）垂直于 $y(k)-z$ 平面的寻常波和极化在 $y(k)-z$ 平面内的非寻常波。

由于两种波的 k 值不同 $\rightarrow \epsilon_r$ 不同 $\rightarrow$ 折射角不同, 在晶片内这两个波的射线将分离, 这就是双折射现象。



单轴晶体中的双折射

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$$

$$n_{1,2} = \sqrt{\epsilon_{r1,r2}}$$

四分之一波板

17

假定一个线极化波从左边垂直入射，并表示为

$$\mathbf{E} = E_0(\mathbf{x}_0 + \mathbf{y}_0)e^{-jkz}$$

$$(z < 0, k = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0})$$

忽略在 $z=0$ 和 $z=d$ 边界波的反射效应，则波刚通过该各向异性媒质板时可表示为

$$\mathbf{E} = E_0(\mathbf{x}_0e^{-jk_e d} + \mathbf{y}_0e^{-jk_0 d})e^{-jk(z-d)} \quad (z > d)$$

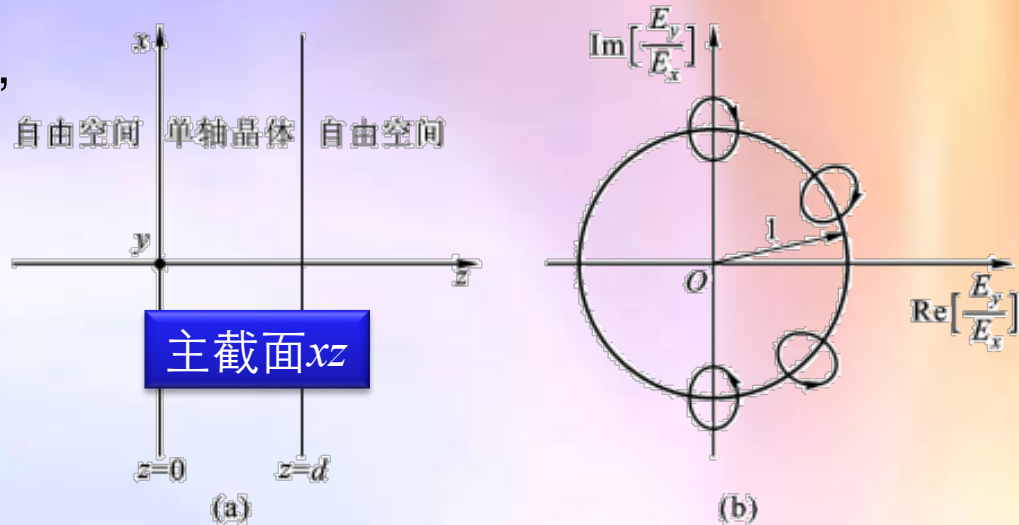
波通过各向异性媒质板后其极化形式可由 $E_y/E_x = e^{(-jk_0 d + jk_e d)}$ 决定

如果 $-k_0 d + k_e d = \pm \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ 得到圆极化波

满足上式的最短距离 $d = \frac{\pi/2}{k_e - k_0}$

定义 $k_e - k_0 = k_B, \lambda_B = \frac{2\pi}{k_B}$ 则 $d = \frac{\lambda_B}{4}$

四分之一波板



1. 求解思路：假定各向异性介质中存在平面波，可以化简麦克斯韦方程组，进而得到波动方程，得到色散方程，研究波的传播特性。

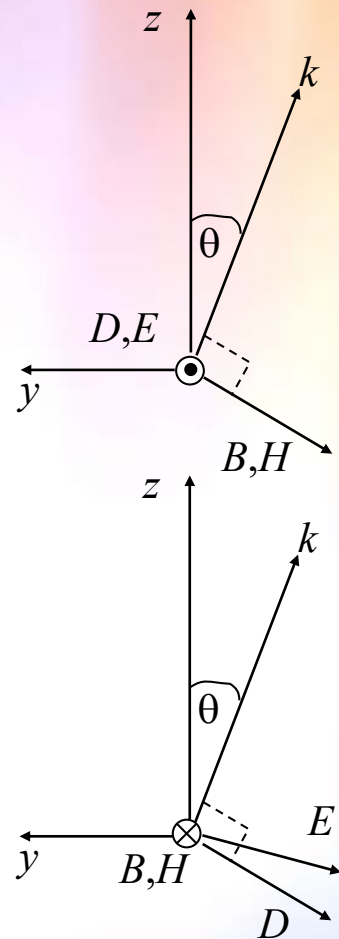
2. 电各向异性介质中的波：

- $\mathbf{D}$, $\mathbf{H}$ ($\mathbf{B}$) 和 $\mathbf{k}$ 三个矢量是按右手螺旋关系互相垂直；
- $\mathbf{D}$, $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{k}$ 共面。

3. 波在单轴介质中的传播可分为寻常波与非寻常波：

- 寻常波： $\mathbf{E}$ 与 $\mathbf{D}$ 同向， $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{D}$ 垂直于主截面，沿 $\mathbf{k}$ 方向的 TEM 波； $k^2 = \omega^2 \mu \epsilon_{\perp}$
- 非寻常波： $\mathbf{E}$ 与 $\mathbf{D}$ 不同向， $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{D}$ 在主截面内，沿 $\mathbf{k}$ 方向的 TM 波，传播常数与传播方向有关。

等效介电常数 ϵ_e $k^2 = \omega^2 \mu \epsilon_e$, $\epsilon_e = \frac{1}{\frac{\sin^2 \theta}{\epsilon_{//}} + \frac{\cos^2 \theta}{\epsilon_{\perp}}}$



4.6 电各向异性介质中平面波的传播

1. 电各向异性介质中的波方程及其平面波解
2. 寻常波和非寻常波

4.7 磁化铁氧体中的平面波

磁各向异性介质中的波动方程

磁各向异性、无源、无耗介质中麦克斯韦方程组

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = -j\omega \mathbf{B} = -j\omega \bar{\bar{\mu}} \cdot \mathbf{H} \\ \nabla \times \mathbf{H} = j\omega \varepsilon \mathbf{E} \\ \nabla \cdot \mathbf{D} = \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \end{cases}$$

假定磁各向异性介质中波方程也有平面波形式的解

$$\begin{cases} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{H}_0 e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \end{cases}$$

将 ∇ 算子替换为 $-j\mathbf{k}$

$$\begin{cases} -j\mathbf{k} \times \mathbf{E} = -j\omega \mathbf{B} \\ -j\mathbf{k} \times \mathbf{H} = j\omega \varepsilon \mathbf{E} \\ -j\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0 \\ -j\mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} \mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega \mathbf{B} \\ \mathbf{k} \times \mathbf{H} = -\omega \varepsilon \mathbf{E} \\ \mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0 \\ \mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = 0 \end{cases}$$

平面波简化
下的麦克斯
韦方程组

$$\begin{cases} \mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega \mathbf{B} \\ \mathbf{k} \times \mathbf{H} = -\omega \varepsilon \mathbf{E} \\ \mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0 \\ \mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = 0 \end{cases}$$

用 $\mathbf{k} \times$ 等式 $\mathbf{k} \times \mathbf{H} = -\omega \varepsilon \mathbf{E}$ ，可导出电磁场满足的矢量波动方程

$$\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{H}) = -\omega \varepsilon \mathbf{k} \times \mathbf{E} = -\omega^2 \varepsilon \mathbf{B}$$



$$k^2 \mathbf{H}_0 - \mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{H}_0) - k_0^2 \bar{\bar{\boldsymbol{\mu}}}_r \cdot \mathbf{H}_0 = 0$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{H}_0 e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$$

$$\bar{\bar{\boldsymbol{\mu}}}_r = \frac{1}{\mu_0} \bar{\bar{\boldsymbol{\mu}}}$$

$$k_0^2 = \omega^2 \mu_0 \varepsilon$$

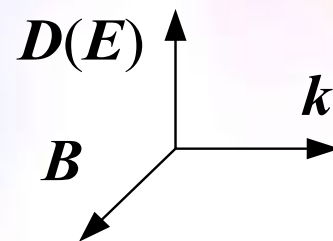
这就是平面波复振幅应当满足的波动方程

平面波简化下
的麦克斯韦方
程组

$$\begin{cases} \mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega \mathbf{B} \\ \mathbf{k} \times \mathbf{H} = -\omega \varepsilon \mathbf{E} \\ \mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0 \\ \mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0 \\ \mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E}(\mathbf{D}) \text{ 和 } \mathbf{B} \text{ 均与波矢量 } \mathbf{k} \text{ 垂直。}$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega \mathbf{B} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E} \text{ 和 } \mathbf{B} \text{ 垂直。}$$



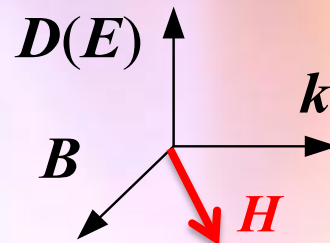
$\mathbf{E}$ ($\mathbf{D}$) , $\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{k}$ 三个矢量是按右手螺旋关系互相垂直

由于磁导率 $\overline{\mu}$ 是张量, $\mathbf{B}$ 与 $\mathbf{H}$ 一般是不平行的。

由于 $\mathbf{k} \times \mathbf{H} = -\omega \varepsilon \mathbf{E}$ 且 $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{k}$ 互相垂直

所以 $(\mathbf{k} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{B} = 0$

$\mathbf{H}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{k}$ 共面



*如果三个矢量满足 $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = 0$, 则 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ 共面

铁氧体的相对导磁率

高频下磁化铁氧体的相对导磁率是一反对称二阶张量

$$\mathbf{B} = \mu_0 \bar{\bar{\mu}}_r \cdot \mathbf{H}$$

$$\bar{\bar{\mu}}_r = \begin{bmatrix} \mu_{11} & -j\mu_{12} & 0 \\ j\mu_{12} & \mu_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mu_{11} = 1 + \frac{\omega_g \omega_m}{\omega_g^2 - \omega^2} \quad \mu_{12} = \frac{\omega \omega_m}{\omega_g^2 - \omega^2}$$

$$\omega_g = \gamma_e H_0 \quad \omega_m = \gamma_e M_0$$

其中, $\gamma_e = e/m = -1.76 \times 10^{11}$ C/kg, 是一常数, 称为旋磁比。
 H_0 , M_0 为外加磁场和磁化强度。取 H_0 沿 z 方向

高频下磁化铁氧体的特点

$$\bar{\bar{\mu}}_r = \begin{bmatrix} \mu_{11} & -j\mu_{12} & 0 \\ j\mu_{12} & \mu_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} \mu_{11} &= 1 + \frac{\omega_g \omega_m}{\omega_g^2 - \omega^2} & \omega_g &= \gamma_e H_0 \\ \mu_{12} &= \frac{\omega \omega_m}{\omega_g^2 - \omega^2} & \omega_m &= \gamma_e M_0 \end{aligned}$$

1. 如果 $\omega_g=0$, $\omega_m=0$, 则 $\mu_{11}=1$, $\mu_{12}=0$, $\mathbf{B}=\mu_0\mathbf{H}$ 。
因此, 未受磁化的铁氧体是一均匀、各向同性的介质。

2. 如果 $\omega=0$ (没有高频场), 则 $\mu_{11} = 1 + \frac{\omega_m}{\omega_g}$, $\mu_{12} = 0$

铁氧体成为一种磁性单轴晶体。

3. 当一恒定磁场 $\mathbf{H}_0$ 加在铁氧体上时, 它变成一块各向异性介质。
4. μ_{11} 、 μ_{12} 都是外加直流磁场 $\mathbf{H}_0$ 、饱和磁化强度 $\mathbf{M}_0$ 和外加频率 ω 的函数。因此可以用改变 $\mathbf{H}_0$ 的办法改变 μ_{11} 和 μ_{12} 。
5. 当 $\omega=\omega_g$, $\mu_{11}\rightarrow\infty$, $\mu_{12}\rightarrow\infty$, 发生所谓共振现象。称它为铁磁共振。

张量磁导率 μ_r 是在 $h \ll H_0$ 情况下得到的, 因此 $\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{H}$ 的关系是线性的。

磁化铁氧体中的波方程及其平面波解

26

磁化铁氧体中平面
波解满足的波动方程

$$k^2 \mathbf{h}_0 - \mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{h}_0) - k_0^2 \bar{\bar{\mu}}_r \cdot \mathbf{h}_0 = 0$$

用 $\mathbf{h}_0$ 代替 $\mathbf{H}_0$

定义等效相对磁导率 μ_e

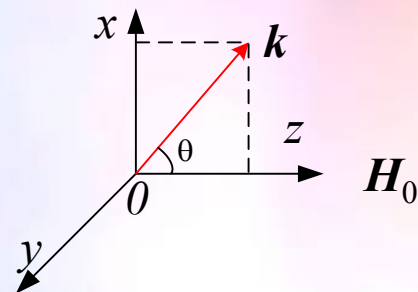
$$k = \omega \sqrt{\mu_e \mu_0 \epsilon}, \mu_e = \frac{k^2}{k_0^2}$$

波动方程两边除以 k_0^2

$$\mu_e \mathbf{h}_0 - \mu_e \hat{\mathbf{k}}_0 (\hat{\mathbf{k}}_0 \cdot \mathbf{h}_0) - \bar{\bar{\mu}}_r \cdot \mathbf{h}_0 = 0$$

设 $\mathbf{k}$ 在 x - z 平面，与 z 轴成 θ 角，则

$$\begin{cases} \mathbf{h}_0 = h_x \mathbf{x}_0 + h_y \mathbf{y}_0 + h_z \mathbf{z}_0 \\ \hat{\mathbf{k}}_0 = \sin \theta \mathbf{x}_0 + \cos \theta \mathbf{z}_0 \end{cases}$$



$$\mu_e \hat{\mathbf{k}}_0 (\hat{\mathbf{k}}_0 \cdot \mathbf{h}_0) = \mu_e \hat{\mathbf{k}}_0 (\sin \theta h_x + \cos \theta h_z) = \mu_e \begin{bmatrix} \sin^2 \theta & 0 & \sin \theta \cos \theta \\ 0 & 0 & 0 \\ \sin \theta \cos \theta & 0 & \cos^2 \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_x \\ h_y \\ h_z \end{bmatrix} \quad \bar{\bar{\mu}}_r = \begin{bmatrix} \mu_{11} & -j\mu_{12} & 0 \\ j\mu_{12} & \mu_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mu_e - \mu_e \sin^2 \theta - \mu_{11} & j\mu_{12} & -\mu_e \sin \theta \cos \theta \\ -j\mu_{12} & \mu_e - \mu_{11} & 0 \\ -\mu_e \sin \theta \cos \theta & 0 & \mu_e - \mu_e \cos^2 \theta - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_x \\ h_y \\ h_z \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} \mu_e \cos^2 \theta - \mu_{11} & j\mu_{12} & -\mu_e \sin \theta \cos \theta \\ -j\mu_{12} & \mu_e - \mu_{11} & 0 \\ -\mu_e \sin \theta \cos \theta & 0 & \mu_e \sin^2 \theta - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_x \\ h_y \\ h_z \end{bmatrix} = 0$$

矩阵形式
的波动方程

其非零解必须使其系数行列式为零，则得传播常数的两个解 $k^\pm$ 为

$$k^\pm = k_0 \left\{ \frac{(\mu_{11}^2 - \mu_{12}^2 - \mu_{11}) \sin^2 \theta + 2\mu_{11} \pm [(\mu_{11}^2 - \mu_{12}^2 - \mu_{11})^2 \sin^2 \theta + 4\mu_{12}^2 \cos^2 \theta]^{1/2}}{2[(\mu_{11} - 1) \sin^2 \theta + 1]} \right\}^{1/2} \quad (4)$$

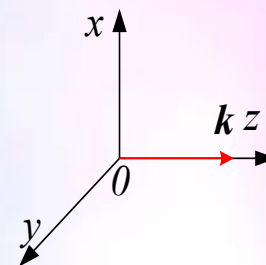
两种特别有意义的情况发生在 $\theta=0$ 和 $\pi/2$ 时。

$$\begin{bmatrix} \mu_e \cos^2 \theta - \mu_{11} & j\mu_{12} & -\mu_e \sin \theta \cos \theta \\ -j\mu_{12} & \mu_e - \mu_{11} & 0 \\ -\mu_e \sin \theta \cos \theta & 0 & \mu_e \sin^2 \theta - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_x \\ h_y \\ h_z \end{bmatrix} = 0$$

矩阵形式
的波动方程

当 $\mathbf{h} \perp \mathbf{H}_0$ 时,
 $\theta=0$

$$\begin{bmatrix} \mu_e - \mu_{11} & j\mu_{12} & 0 \\ -j\mu_{12} & \mu_e - \mu_{11} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_x \\ h_y \\ h_z \end{bmatrix} = 0$$



其非零解必须使其系数行列式为零

$$\begin{vmatrix} \mu_e - \mu_{11} & j\mu_{12} & 0 \\ -j\mu_{12} & \mu_e - \mu_{11} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -[(\mu_e - \mu_{11})^2 - \mu_{12}^2] = 0$$

其解为 $\mu_e^{\pm} = \mu_{11} \pm \mu_{12}$ $k^{\pm} = k_0 \sqrt{\mu_e^{\pm}}$ 色散方程

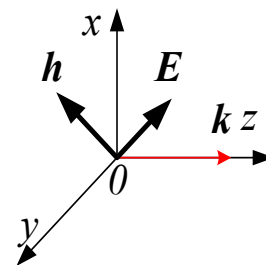
$$\mu_e^{\pm} = \mu_{11} \pm \mu_{12} \quad \text{代入} \quad \begin{bmatrix} \mu_e - \mu_{11} & j\mu_{12} & 0 \\ -j\mu_{12} & \mu_e - \mu_{11} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_x \\ h_y \\ h_z \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} \pm\mu_{12} & j\mu_{12} & 0 \\ -j\mu_{12} & \pm\mu_{12} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_x \\ h_y \\ h_z \end{bmatrix} = 0$$

简化后

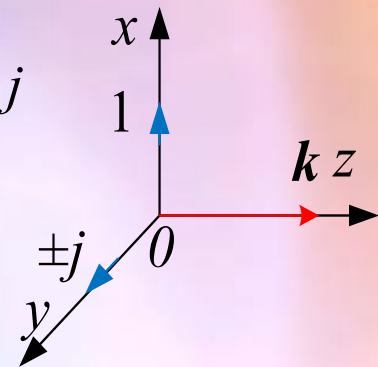
$$\begin{bmatrix} \pm 1 & j & 0 \\ -j & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_x \\ h_y \\ h_z \end{bmatrix} = 0$$

1. $h_z=0$, 同时考虑到 $\mathbf{E}$ 垂直于 $\mathbf{k}$, **TEM波**



$$2. \begin{bmatrix} \pm 1 & j & 0 \\ -j & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_x \\ h_y \\ h_z \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \pm h_x + j h_y = 0 \Rightarrow \frac{h_y}{h_x} = \pm j$$

$$\mathbf{h}_0^\pm = h_x (\mathbf{x}_0 \pm j \mathbf{y}_0)$$



TEM圆极化波： +代表左旋圆极化； -代表右旋圆极化

3. 波阻抗

$$\mathbf{k} \times \mathbf{H} = -\omega \epsilon \mathbf{E} \Rightarrow \eta = \frac{k}{\omega \epsilon} = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu_e^\pm}{\epsilon}}$$

4. 相速度

$$v_p^\pm = \omega / k = 1 / \sqrt{\mu_e^\pm \mu_0 \epsilon}$$

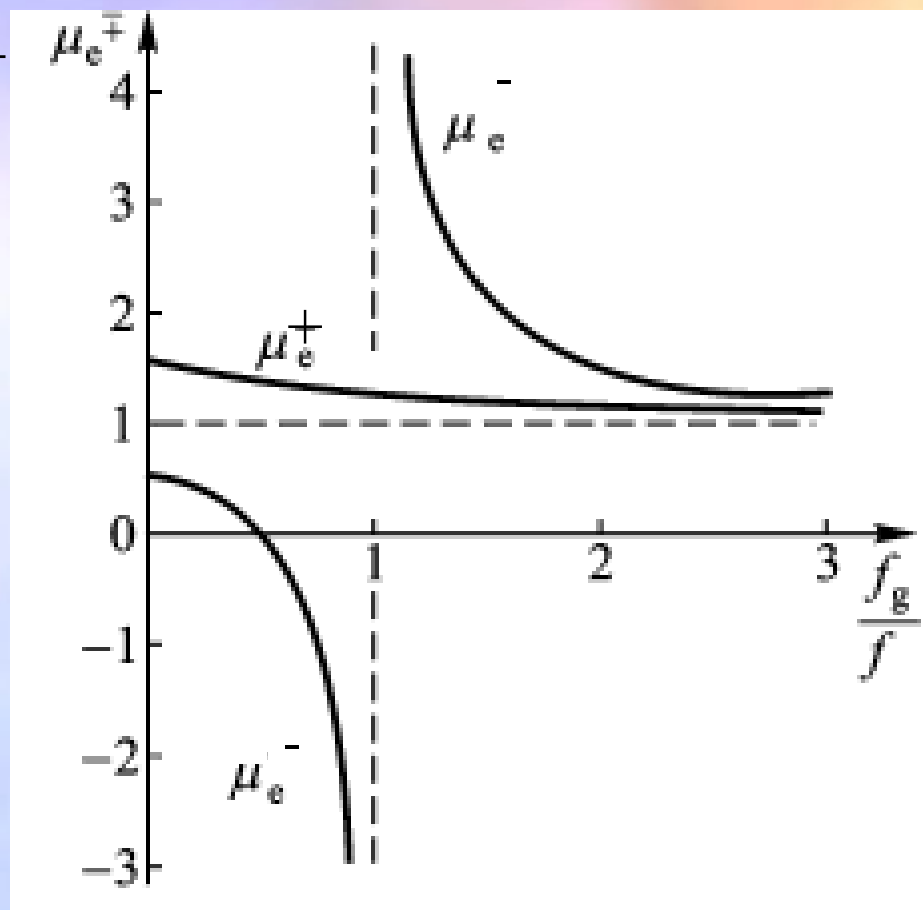
$$\mu_e^{\pm} = \mu_{11} \pm \mu_{12} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu_{11} = 1 + \frac{\omega_g \omega_m}{\omega_g^2 - \omega^2} \\ \mu_{12} = \frac{\omega \omega_m}{\omega_g^2 - \omega^2} \end{cases}$$

$$\mu_e^{\pm} = \mu_{11} \pm \mu_{12} = 1 + f_m (f_g \pm f)^{-1}$$

从图中可见:

μ_e^{-} 具有共振特性, 有通带、止带

μ_e^{+} 无共振特性

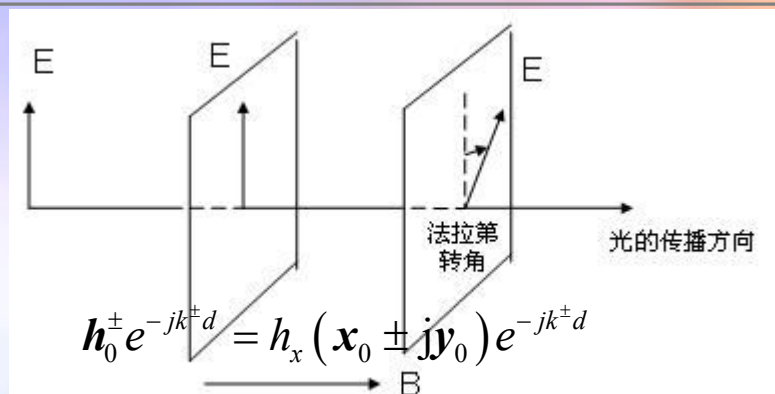


9.8GHz平面波在YIG铁氧体中平行于直流磁场传播时与 f_g/f 关系

$\mathbf{M}_0 = 1750 \text{ Oe}$, 故 $f_m = 4.9\text{GHz}$ 。 f 值选9.8GHz。

$$h_0^\pm = h_x (x_0 \pm jy_0)$$

$$k^\pm = k_0 \sqrt{\mu_{11} \pm \mu_{12}}$$



线极化波波在各向异性铁氧体中传播，由于分解成左、右旋圆极化波的相速不同，从而使合成波的极化平面（电场方向与传播方向构成的平面）旋转，**法拉第旋转**。

假如两分量相等或无衰减、极化平面的转角 φ 由 $\varphi = \frac{(k^- - k^+)z}{2}$ 计算

当 $\omega \gg \omega_g$, $\omega \gg \omega_m$, 上式成为 $\varphi = \frac{\omega_m}{2c} z^\circ$

式中， c 是铁氧体材料中光速，因此这种情况转角与频率无关。从而把铁氧体可以制成宽带器件。

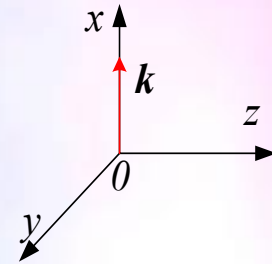
如果波在反向传播，可得相同转角，这表明铁氧体这种各向异性介质是**非互易的**。

$$\begin{bmatrix} \mu_e \cos^2 \theta - \mu_{11} & j\mu_{12} & -\mu_e \sin \theta \cos \theta \\ -j\mu_{12} & \mu_e - \mu_{11} & 0 \\ -\mu_e \sin \theta \cos \theta & 0 & \mu_e \sin^2 \theta - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_x \\ h_y \\ h_z \end{bmatrix} = 0$$

矩阵形式
的波动方程

当 $\mathbf{h} // \mathbf{H}_0$ 时,
 $\theta = \pi/2$

$$\begin{bmatrix} \mu_{11} & -j\mu_{12} & 0 \\ j\mu_{12} & \mu_{11} - \mu_e & 0 \\ 0 & 0 & \mu_e - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_x \\ h_y \\ h_z \end{bmatrix} = 0$$



其非零解必须使其系数行列式为零

$$\begin{vmatrix} \mu_{11} & -j\mu_{12} & 0 \\ j\mu_{12} & \mu_{11} - \mu_e & 0 \\ 0 & 0 & \mu_e - 1 \end{vmatrix} = (\mu_e - 1) [\mu_{11} (\mu_{11} - \mu_e) - \mu_{12}^2] = 0$$

其解为

$$\mu_e = 1, \mu_e = \frac{\mu_{11}^2 - \mu_{12}^2}{\mu_{11}}$$

色散方程

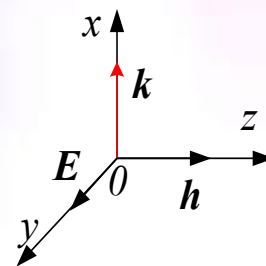
$$\mu_e = 1$$

$$\begin{bmatrix} \mu_{11} & -j\mu_{12} & 0 \\ j\mu_{12} & \mu_{11} - \mu_e & 0 \\ 0 & 0 & \mu_e - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_x \\ h_y \\ h_z \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} \mu_{11} & -j\mu_{12} & 0 \\ j\mu_{12} & \mu_{11} - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_x \\ h_y \\ h_z \end{bmatrix} = 0$$

1. $h_z \neq 0$ 。

由于 $\begin{vmatrix} \mu_{11} & -j\mu_{12} \\ j\mu_{12} & \mu_{11} - 1 \end{vmatrix} \neq 0$ 所以 $h_x = h_y = 0$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \begin{bmatrix} \mu_{11} & -j\mu_{12} & 0 \\ j\mu_{12} & \mu_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{h} \quad \text{所以 } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{h}$$



线极化的TEM波，寻常波

$$\mu_e = 1$$

2. 波阻抗

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon}}$$

3. 相速度

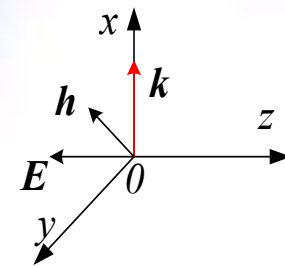
$$v_p = \omega / k = 1 / \sqrt{\mu_0 \varepsilon}$$

$$\mu_e = \frac{\mu_{11}^2 - \mu_{12}^2}{\mu_{11}}$$

$$\begin{bmatrix} \mu_{11} & -j\mu_{12} & 0 \\ j\mu_{12} & \mu_{11} - \mu_e & 0 \\ 0 & 0 & \mu_e - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_x \\ h_y \\ h_z \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} \mu_{11} & -j\mu_{12} & 0 \\ j\mu_{12} & \frac{\mu_{12}^2}{\mu_{11}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\mu_{11}^2 - \mu_{12}^2}{\mu_{11}} - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_x \\ h_y \\ h_z \end{bmatrix} = 0$$

1. $h_z = 0$ 。

由于 $\begin{vmatrix} \mu_{11} & -j\mu_{12} \\ j\mu_{12} & \frac{\mu_{12}^2}{\mu_{11}} \end{vmatrix} = 0$ 所以 $h_x, h_y \neq 0$



$$\mathbf{k} \times \mathbf{H} = -\omega \varepsilon \mathbf{E} \Rightarrow E_x = E_y = 0, E_z = -\sqrt{\frac{\mu_0 \mu_e}{\varepsilon}} h_y$$

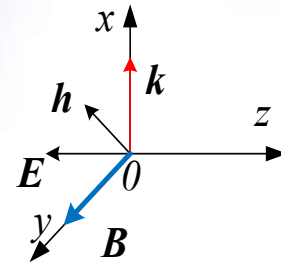
TE波

$$\mu_e = \frac{\mu_{11}^2 - \mu_{12}^2}{\mu_{11}}$$

2. 由于 $h_z=0$, 同时

$$\begin{bmatrix} \mu_{11} & -j\mu_{12} & 0 \\ j\mu_{12} & \frac{\mu_{12}^2}{\mu_{11}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\mu_{11}^2 - \mu_{12}^2}{\mu_{11}} - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_x \\ h_y \\ h_z \end{bmatrix} = 0$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \begin{bmatrix} \mu_{11} & -j\mu_{12} & 0 \\ j\mu_{12} & \mu_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h_x \\ h_y \\ h_z = 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mu_0 \mu_e h_y \\ 0 \end{bmatrix}$$



符合 $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{k}$ 三个矢量是按右手螺旋关系互相垂直

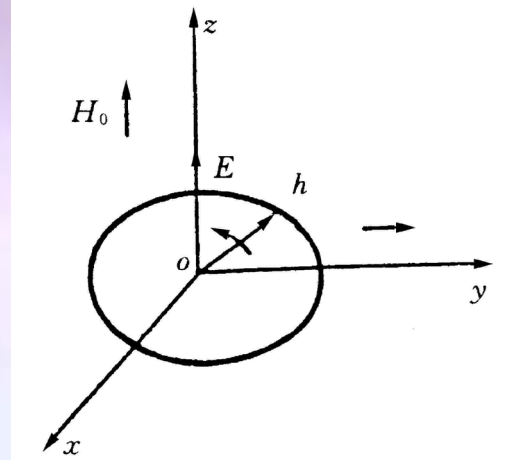
$$\begin{cases} h_z = 0 \\ \frac{h_y}{h_x} = -j \frac{\mu_{11}}{\mu_{12}} \end{cases}$$

h 在 x - y 平面内是椭圆极化的。

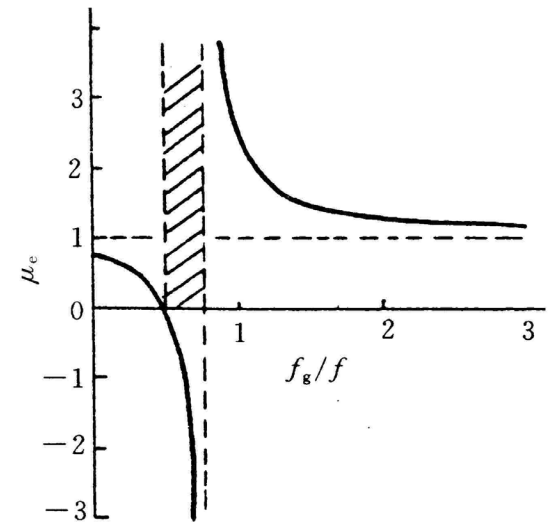
$$\mu_e = \frac{\mu_{11}^2 - \mu_{12}^2}{\mu_{11}}$$

由 μ_e 的表达式可见，当 $f_g/f = 1 - f_m/f_g$ ， $\mu_e = 0$ ；

当 $f_g / f = -f_m / 2f + \sqrt{(f_m / 2f)^2 + 1}$ 时，
可出现极点。



非寻常波的椭圆极化



9.4GHz非寻常平面波在YIG铁氧体中垂直于直流磁场传播时 μ_e 与 f_g/f 的关系

均匀平面波有以下两个特点，
其一，波的幅度在整个空间是常数；
其二，等相位面（波前）是平行平面。
对于更复杂的波，波的幅度不再均匀，波前不再是平面。

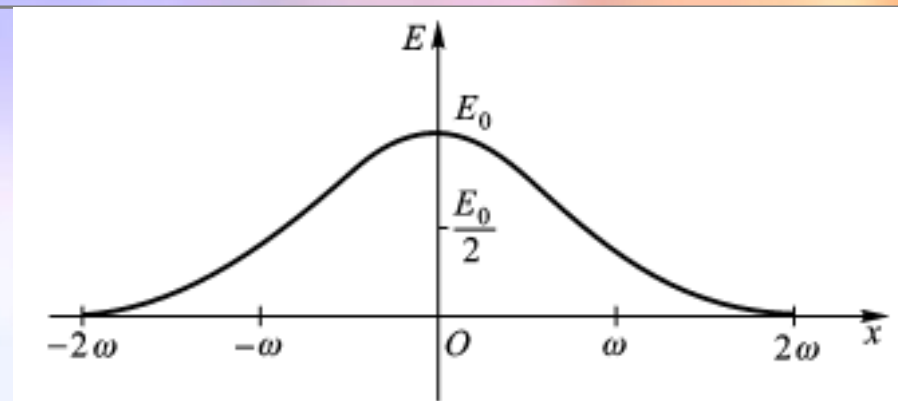
激光束就属于这种波，其幅度在中心轴线上最强，离开轴线愈远光场愈弱。
场按高斯分布的光束称为高斯光束

$$E(x, z=0) = y_0 E_0 e^{-x^2/w^2}$$

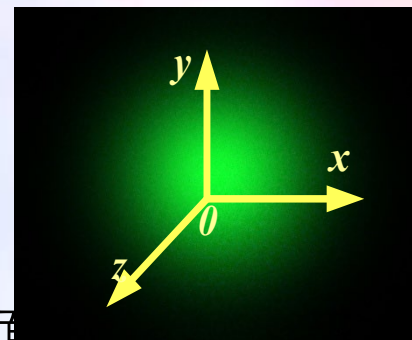
高斯光束传播的分析方法：

将高斯光束展开为无限多平面波叠加，研究每个平面波的传播，再把这些平面波加起来。

当光束沿传播相当一段距离后，高斯光束变得越来越宽，其宽度与传播距离近似线性关系，等相位面成为一柱面，这种现象称为高斯光束衍射。



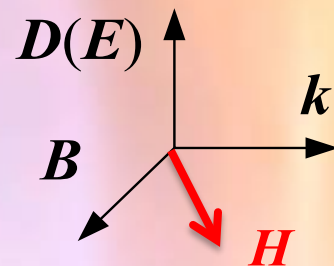
高斯分布，非均匀波电场
按 e^{-x^2/w^2} 变化



复习要点

1. 磁各向异性介质中的波：

- E (D), B 和 k 三个矢量是按右手螺旋关系互相垂直；
- B , H 和 k 共面。



2. 铁氧体未经磁化是各向同性的。如果 $\omega=0$ ，铁氧体成为一种磁性单轴晶体。当一恒定磁场 H_0 加在铁氧体上时，它变成一块各向异性介质。磁导率 μ_{11} 、 μ_{12} 都是外加直流磁场 H_0 、饱和磁化强度 M_0 和外加频率 ω 的函数。当 $\omega=\omega_g$ ，磁导率趋向于无穷，称为铁磁共振。

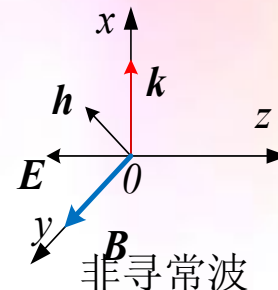
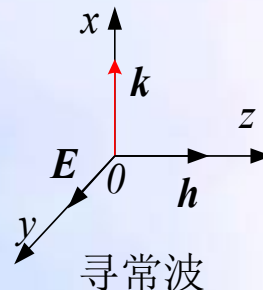
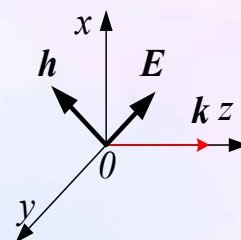
$$\bar{\bar{\mu}}_r = \begin{bmatrix} \mu_{11} & -j\mu_{12} & 0 \\ j\mu_{12} & \mu_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{取外加磁场沿z方向}$$

复习要点

3. 铁氧体中传播的波可以分为纵向传播的波与横向传播的波。取外加磁场沿 z 方向

- 纵向（ z 方向）传播的波是两个**TEM圆极化波**。左旋波和右旋波相速不等。右旋波有共振特性，有通带和止带。纵向传播的波是非互易的，存在**法拉第旋转效应**。

- 横向（垂直于 z 方向）传播的波分为**寻常波**与**非寻常波**。寻常波就是普通的**TEM线极化波**；非寻常波是**TE椭圆极化波**。其极化特性相互垂直。



4. 高斯光束沿 z 轴传播一段距离后，其宽度与 z 轴近似线性关系，等相位面成为一柱面。这称为**高斯光束衍射**。

复习范围：4.6,4.7