

电磁场与电磁波

第10讲

4.4 有耗介质中的平面波

4.5 色散与群速

4.6.1 各向异性介质中 ϵ 、 μ 的并矢表示

魏兴昌

浙江大学

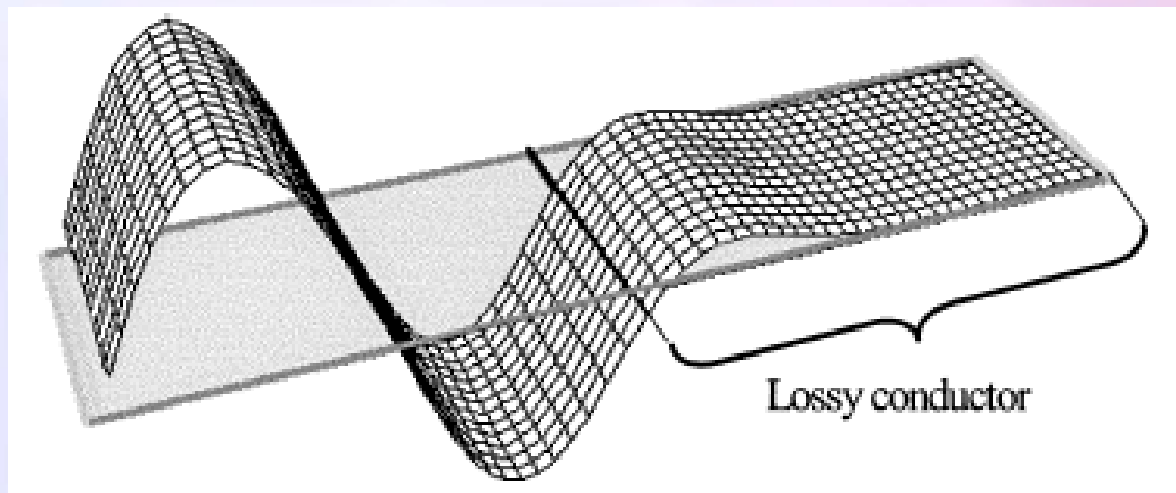
weixc@zju.edu.cn

作业：4.12,4.14

有耗介质(导电介质)中的平面波

2

波在传播方向幅度按指数衰减，即波传播的方向与衰减的方向一致



分析方法：

导电介质中电导率 σ 为有限值，可用复数介电系数表示

$$\tilde{\epsilon} = \epsilon - j\frac{\sigma}{\omega}$$

复介电系数

对于电导率为 σ 的各向同性导体 $\mathbf{J}_c = \sigma \mathbf{E}$

安培全电流定律的微分形式为 $\nabla \times \mathbf{H} = j\omega \mathbf{D} + \mathbf{J}_c$

将 $\mathbf{D}=\varepsilon \mathbf{E}$ ， $\mathbf{J}_c=\sigma \mathbf{E}$ 代入安培全电流定律描述的方程，得到

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega \left(\varepsilon - j \frac{\sigma}{\omega} \right) \mathbf{E}$$

定义复介电常数， $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon - j \frac{\sigma}{\omega}$ ，其虚部就表示介质电导率的影响

引入复介电常数后，麦克斯韦方程为

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= -j\omega \mu \mathbf{H} & \nabla \cdot \mathbf{H} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} &= j\omega \tilde{\varepsilon} \mathbf{E} & \nabla \cdot \mathbf{E} &= 0 \end{aligned}$$

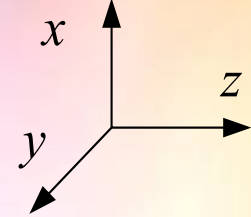
所以引入复介电常数后有耗介质中麦氏方程与无耗介质中相同

有耗介质中波方程及其解

4

$$\left. \begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= -j\omega\mu\mathbf{H} \\ \nabla \times \mathbf{H} &= j\omega\tilde{\epsilon}\mathbf{E} \end{aligned} \right\} \Rightarrow (\nabla^2 + k^2)\mathbf{E} = 0 \quad k^2 = \omega^2\mu\tilde{\epsilon} \quad \text{复数}$$

其解也是平面波，如在特定坐标系下，使得 $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{H}$ 、 $\mathbf{k}$ 都只有一个分量，便得到

$$\mathbf{E} = \mathbf{x}_0 E_0 e^{-jkz} \quad \mathbf{H} = \mathbf{y}_0 \frac{E_0}{\eta} e^{-jkz} \quad \eta = \sqrt{\frac{\mu}{\tilde{\epsilon}}}$$


η 为导电介质的波阻抗。因为 $\tilde{\epsilon}$ 是复数，所以导电介质中 k, η 都是复数。

定义 $\tilde{\epsilon} = \epsilon - j\frac{\sigma}{\omega} = \epsilon \left(1 - j\frac{\sigma}{\epsilon\omega} \right) \quad \frac{\sigma}{\omega\epsilon}$ 称为导电介质的损耗正切。

$$k = \omega \sqrt{\mu\epsilon \left(1 - j\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \right)} = k_r - jk_i$$

$$\eta = |\eta| e^{j\varphi}$$

有耗介质中平面波解的特点

有耗介质中

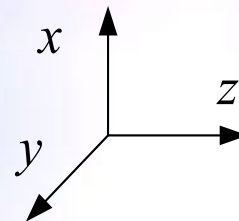
$$\begin{cases} \mathbf{E} = \mathbf{x}_0 E_0 e^{-jkz} & k = k_r - jk_i \\ \mathbf{H} = \mathbf{y}_0 \frac{E_0}{\eta} e^{-jkz} & \eta = |\eta| e^{j\varphi} \end{cases}$$

将复数形式的 k 、 η 代入 $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{H}$ 表达式

$$\mathbf{E} = \mathbf{x}_0 E_0 e^{-k_i z} e^{-jk_r z} \quad \mathbf{H} = \mathbf{y}_0 \frac{E_0}{|\eta|} e^{-k_i z} e^{-jk_r z} e^{-j\varphi}$$

$\mathbf{E}$ 的瞬时值为

$$E_x = E_0 e^{-k_i z} \cos(\omega t - k_r z)$$



■ z 方向传播的速度 $v_p = \omega / k_r$

■ 随着波向 $+z$ 方向传播，幅度则按指数规律衰减， k_i （奈培/米）。当 $k_i z = k_i d_p = 1$ 时，场幅度衰减到 $z=0$ 处的 $1/e$ 。定义**穿透深度** d_p

$$d_p = 1 / k_i$$

有耗介质中平面波解的特点

■ 复数坡印廷功率流 $\mathbf{S}(z)$

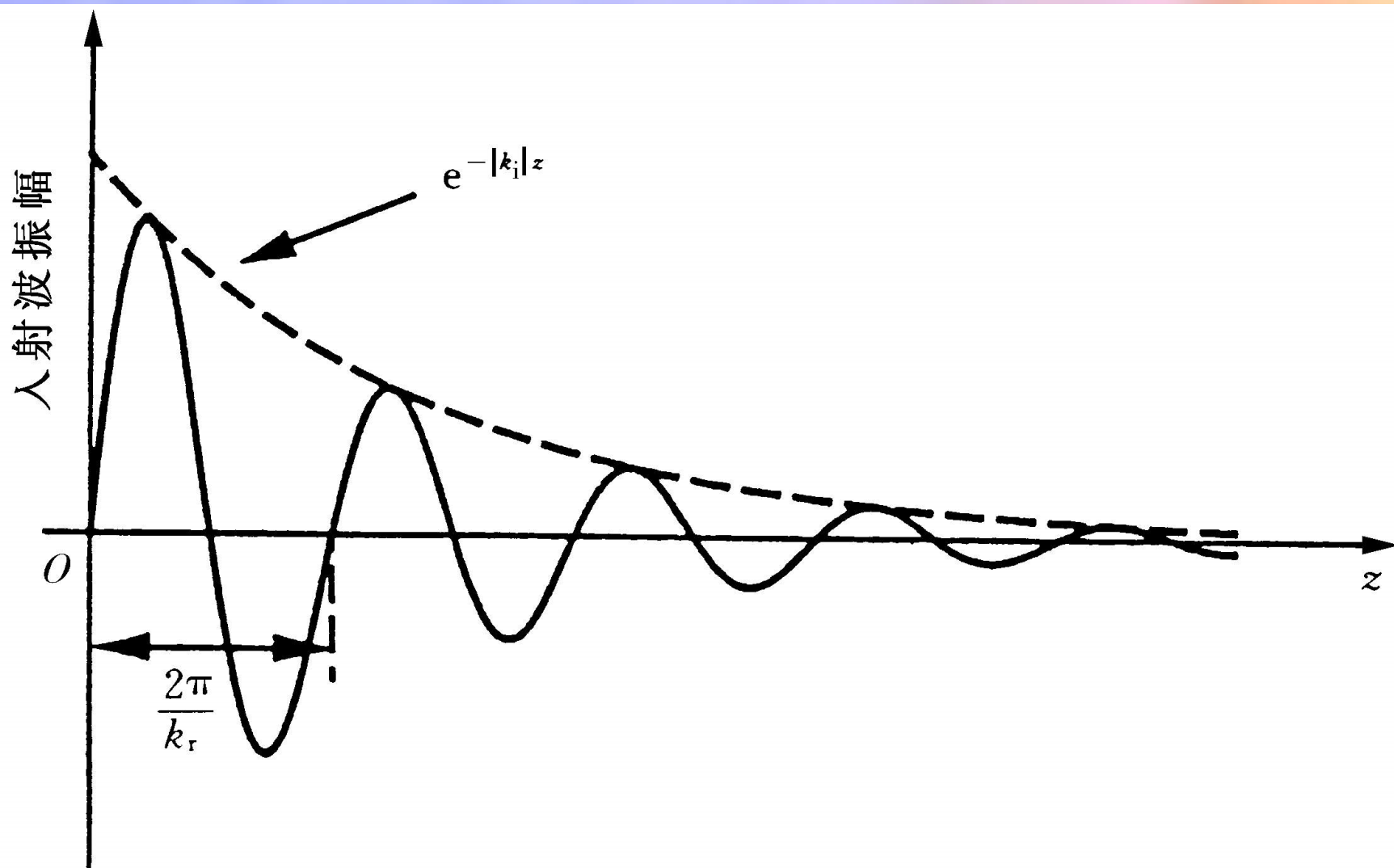
$$\mathbf{S}(z) = \mathbf{E}(z) \times \mathbf{H}^*(z) = z_0 \frac{E_0^2}{|\eta|} e^{-2k_i z} e^{j\varphi}$$

时间平均坡印廷功率流

$$\langle \mathbf{S}(z, t) \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}[\mathbf{S}(z)] = z_0 \frac{|E|_0^2}{|\eta|} e^{-2k_i z} \cos \varphi$$

有耗介质中波的传播

7



电导率对波传播的影响

1、电导率很小的介质，其 $\sigma/\omega\varepsilon \ll 1$

$$\text{当 } x \ll 1 \quad 1 - jx \approx 1 - \frac{x^2}{4} - jx = \left(1 - j\frac{x}{2}\right)^2$$

$$k = \omega \sqrt{\mu\varepsilon \left(1 - j\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)} = \omega \sqrt{\mu\varepsilon} \sqrt{1 - j\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}} \approx \omega \sqrt{\mu\varepsilon} \left(1 - j\frac{\sigma}{2\omega\varepsilon}\right) = k_r - jk_i$$

$$\text{传播常数 } k_r = \omega \sqrt{\mu\varepsilon}$$

$$\text{衰减速率 } k_i = \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

$$\text{穿透深度 } d_p = \frac{1}{k_i} = \frac{2}{\sigma} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}$$

因此在电导率很小的介质中，波以传播常数 k_r 沿正 z 方向传播，其幅度不断衰减，衰减速率为 k_i (N/m)，每行进 d_p 距离，波衰减到 $1/e$ 。

电导率对波传播的影响

2、电导率很大的介质叫良导体， $\sigma/\omega\varepsilon \gg 1$ ，此时 k 近似为

$$\begin{aligned} k &= \omega \sqrt{\mu\varepsilon \left(1 - j \frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)} \approx \omega \sqrt{\mu\varepsilon \left(-j \frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)} = \sqrt{\omega\mu\sigma} \sqrt{-j} \\ &= \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} (1 - j) = k_r - jk_i \end{aligned}$$

传播常数 $k_r = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}$

衰减速率 $k_i = k_r = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}$

穿透深度 $d_p = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} = \delta$

δ 表示 d_p 很小很小，习惯上称为**趋肤深度**。这就是说对于良导体电磁场主要集中在表面趋肤深度 δ 厚度的薄层内，这种效应称为**趋肤效应**。

3. 完纯导体, $\sigma \rightarrow \infty$, 趋肤深度

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} \rightarrow 0$$

此时欧姆定律 $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$

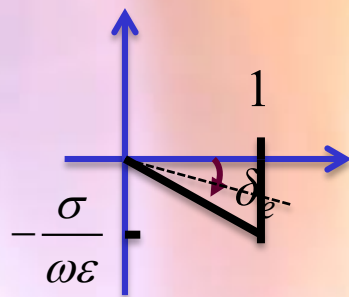
因为 $\sigma \rightarrow \infty$, 欲保证表面电流有限, $\mathbf{E} \rightarrow 0$ 。导体内没有电磁场。
屏蔽

对于Au, Ag, Cu, Al等良导体, 可被视为完纯导体, 例如Cu的电导率 $\sigma = 5.8 \times 10^7 \text{ S/m}$ 。某些金属在极低温下呈超导特性, 称为超导体, 超导铅在4.2K对于直流其电导率 σ 大于 $2.7 \times 10^{20} \text{ S/m}$ 。

对于一般材料

$$k = \omega \sqrt{\mu \epsilon \left(1 - j \frac{\sigma}{\omega \epsilon} \right)} = \omega \sqrt{\mu \epsilon} \sqrt{1 - j \frac{\sigma}{\omega \epsilon}} = k_r - j k_i$$

$$k_i = \omega \sqrt{\mu \epsilon} \left[1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \epsilon} \right)^2 \right]^{1/4} \sin \left[\frac{1}{2} \arctan^{-1} \left(\frac{\sigma}{\omega \epsilon} \right) \right]$$



$$\tan \delta_e = \frac{\sigma}{\omega \epsilon}$$

海水的相对介电常数差不多为81，平均电导率为4S/m。由于电磁波在海水中传播衰减很快，这给潜艇间通信带来了困难。

随着频率增加，损耗不断增加，在很高的频率，对应 $\sigma/\omega\epsilon \ll 1$ ，

$$k_i \approx \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = 83.8 \text{ N/m} \quad k_i (\text{dB/m}) = 20 \log_{10} (e^{k_i}) = 728 \text{ dB/m}$$

为使损耗减小，工作频率必须降低，但是，即使 $f=1\text{kHz}$ ，衰减还是较大

$$k_i = \omega \sqrt{\mu \epsilon} \left[1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \epsilon} \right)^2 \right]^{1/4} \sin \left[\frac{1}{2} \arctan^{-1} \left(\frac{\sigma}{\omega \epsilon} \right) \right] = 0.126 \text{ N/m} = 1.1 \text{ dB/m}$$

因此，在1kHz频率，电磁波在海水中传播100m，其衰减达到110dB。如应用更低的频率，可传播的信号速率就很小。

穿透深度：电磁波穿透冰层的深度

冰的电导率很小， $\sigma \approx 10^{-6} \text{S/m}$ ， $\varepsilon \approx 3.2\varepsilon_0$ ，损耗正切 $=10^{-6}/[2\pi f \times 3.2 \times 8.85 \times 10^{-12}] = 5.6 \times 10^3/f$ ，当频率在兆赫范围，损耗正切是很小的。其穿透深度 $d_p \approx 9.5 \text{km}$ ，这就是说在兆赫频率范围，电磁波用于探测冰层厚度是很好的。美国阿波罗登月飞行也利用兆赫范围频率电磁波，因在该频率范围月球表面电导率也很低，电磁波有较大的穿透深度。

对于更高的频率，由于冰层中含有气泡，气泡中空气对高频电磁波产生散射，上面简单的模型对于更高频率的电磁波不再适用。

穿透深度：微波炉

微波炉中的磁控管将50Hz的市电功率转换为微波功率（一般工作频率为915MHz，2450MHz），再用微波对食物加热。

用微波加热食物的原理是多数食物对于微波为有耗介质，微波穿透这些食物时，在食物内部的微波损耗就转变为热。特点是升温速度快，而且可从食物内部热起来。

因为Polystyrene的介电常数接近自由空间介电常数，损耗很小，对微波可看作透明。所以这种材料可做加热食物的容器。

牛排的损耗正切很大，所以牛排可用微波烹饪。牛排的介电常数近似为 $\epsilon=40(1-j0.3)\epsilon_0$ ，在 $f=3\text{GHz}$ 时，其复数波数 k 为

$$k = 402 - j59$$

穿透深度 $d_p=1/k_i=1.7\text{cm}$ ，所以在接近牛排表面0.85cm的范围内，微波功率损耗63%，尚有37%功率可用于加热离表面0.85cm以内的牛排。

电磁波在介质中传播时，传播速度随频率变化的现象称为色散。

对于理想介质 $k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}, v_p = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$

k 与 ω 成正比，相速 v_p 与频率 ω 无关，所以理想介质是非色散介质。
如果 k 与 ω 不成线性关系，相速 v_p 与 ω 有关，这种介质就称为色散介质。

对于有耗介质 $k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon\left(1 - j\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)} = k_r(\omega) - jk_i(\omega), v_p(\omega) = \frac{\omega}{k_r(\omega)}$

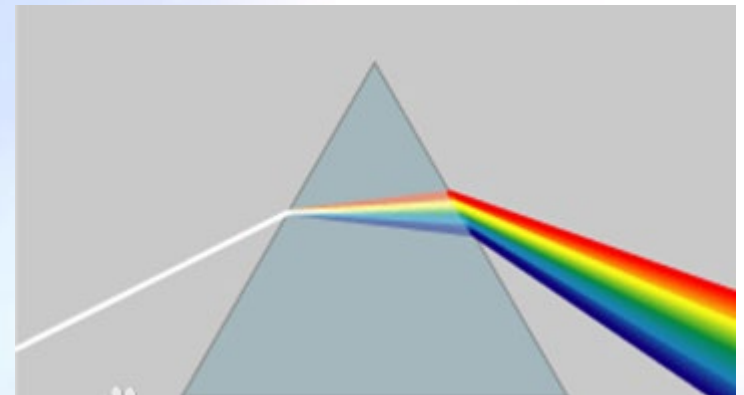
k_r 是 ω 的复杂函数， v_p 与 ω 有关，所以有耗介质一定是色散的。反过来，色散介质一定有损耗。

无耗材料 $v_p(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon(\omega)}}$

ε 与 ω 有关也导致色散，此时折射角与 ω 有关

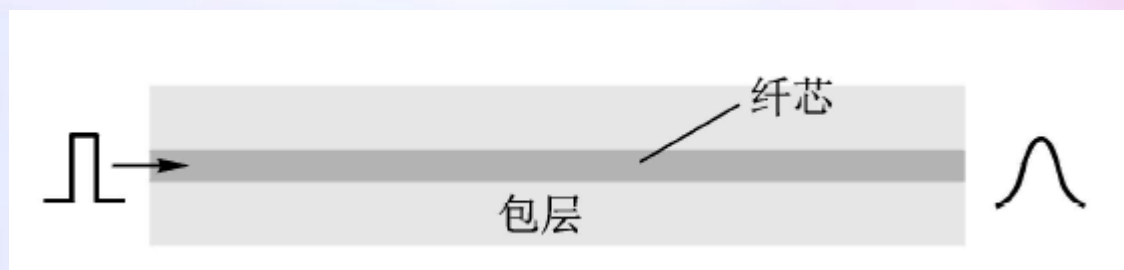
$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$$

$$n_{1,2} = \sqrt{\varepsilon_{r1,r2}}$$



光的色散

引起色散的原因是多方面的，介质色散只是其一。
色散引起波导传输信号的畸变。



光纤色散引起传输信号的畸变

定义 k 或者 v_p 随 ω 变化的函数为色散关系/色散方程

$$k(\omega) = \omega \sqrt{\mu \tilde{\epsilon}} = \omega \sqrt{\mu \epsilon \left(1 - j \frac{\sigma}{\omega \epsilon} \right)}$$

$$v_p(\omega) = \frac{\omega}{k}$$

$E(z, t) = E_0 \cos(\omega t - kz)$ 称为单色波。信号加到电磁波上就不再是单色波。

假设有两个同振幅、不同频率（但频率差别很小）信号沿 z 方向传播，由于媒质色散，其传播常数不同：

$$E(z, t) = E_0 \cos(\omega_1 t - k_1 z) + E_0 \cos(\omega_2 t - k_2 z)$$

利用 $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$

$$E(z, t) = 2E_0 \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t - \frac{k_1 + k_2}{2}z\right) \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t - \frac{k_1 - k_2}{2}z\right)$$

$$= 2E_0 \underbrace{\cos(\omega_c t - k_c z)}_{\text{高频分量}} \underbrace{\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}z\right)}_{\text{低频分量}} \begin{cases} \omega_c = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}, \Delta\omega = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \\ k_c = \frac{k_1 + k_2}{2}, \Delta k = \frac{k_1 - k_2}{2} \end{cases}$$

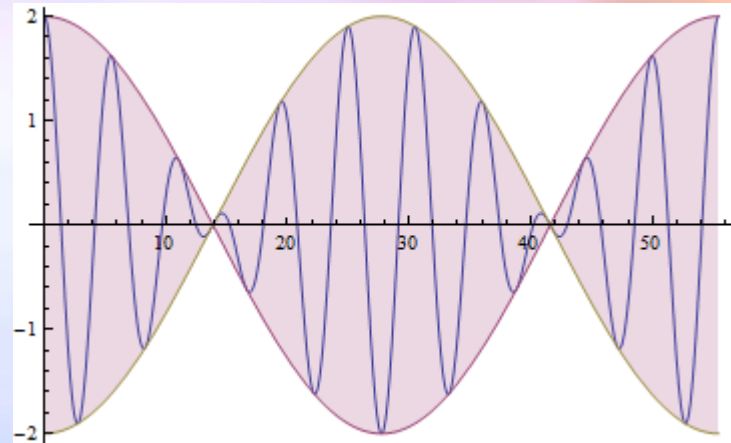
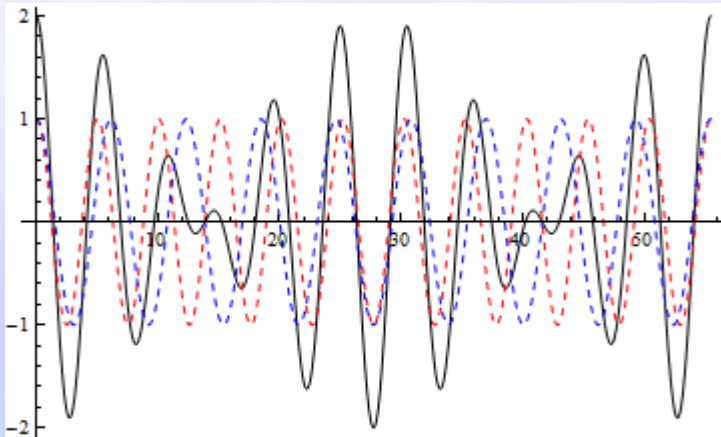
该信号可看成是一高频载波的振幅被低频分量调制

群速度

$$\cos(\omega_1 t - k_1 z) + \cos(\omega_2 t - k_2 z)$$

$$\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}z\right)$$

红色和蓝色分别为2个单色波，黑色为其合成波



相速度 $v_{p1} = \frac{\omega_1}{k(\omega_1)}$ $v_{p2} = \frac{\omega_2}{k(\omega_2)}$

振幅包络的传播速度定义为群速度

$$v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}$$

令 $\Delta\omega \Rightarrow 0$ 取极限

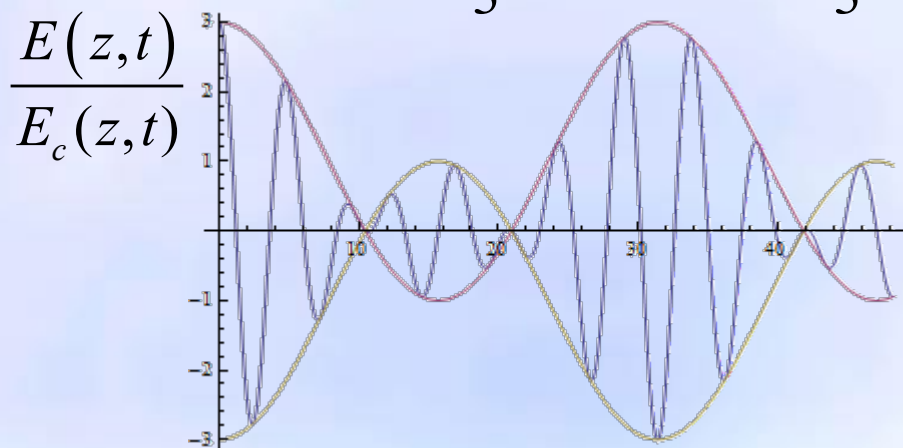
$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{\frac{dk(\omega)}{d\omega}}$$

色散关系 $k(\omega)$ 函数由媒质决定，所以群速度也由媒质决定。

如果信号中包含更多的频率分量，那么在一个不大的频率范围内，整个**信号包络**可近似为以 v_g 速度在传播。

$$E(z, t) = \cos(2.1t - 1.5z) + \cos(2t - 1.3z) + \cos(1.9t - 1.1z)$$

取载波 $E_c(z, t) = \cos\left(\frac{2.1+2+1.9}{3}t - \frac{1.5+1.3+1.1}{3}z\right)$ 包络为 $\frac{E(z, t)}{E_c(z, t)}$



对于更通用的情况 $\sum_i \cos[\omega_i t - k(\omega_i)z]$ ， ω_i 相差很小，**信号包络**以 v_g 速度传播。 v_g 也是描述信号的能量传播速度。

色散曲线

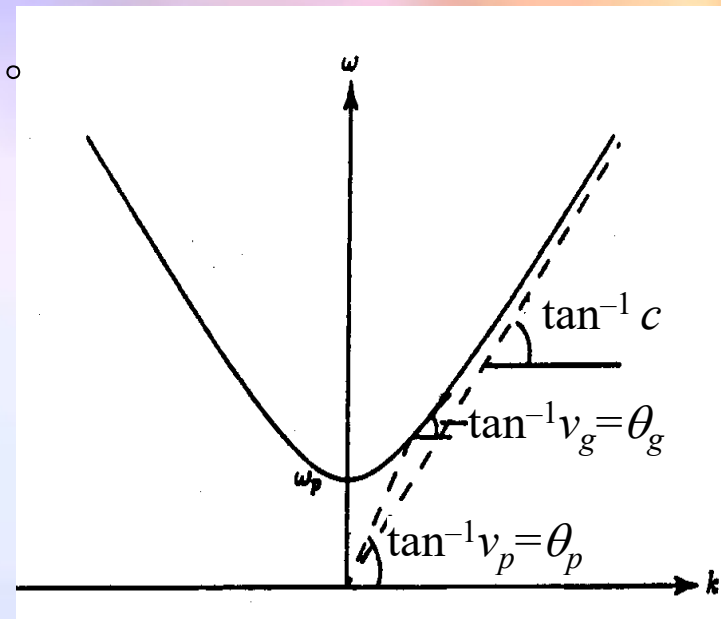
色散曲线：在 $\omega-k$ 平面上画出 $k(\omega)$ 曲线。

- 曲线上任一点与原点连线斜率 $\tan\theta_p$ 表示该点相速 v_p ：

$$v_p = \omega/k$$

- 曲线上任一点而切线斜率 $\tan\theta_g$ 表示该点群速 v_g

$$v_g = d\omega/dk$$



等离子体色散曲线

相速度与群速度的关系

$$v_g(\omega) = \frac{d\omega}{dk(\omega)} = \frac{d\omega}{d\left(\frac{\omega}{v_p(\omega)}\right)} = \frac{d\omega}{\frac{d\omega}{v_p(\omega)} - \frac{\omega dv_p(\omega)}{v_p^2(\omega)}} = \frac{1}{\frac{1}{v_p(\omega)} - \frac{\omega}{v_p^2(\omega)} \frac{dv_p(\omega)}{d\omega}}$$

$$v_g(\omega) = \frac{v_p(\omega)}{1 - \frac{\omega}{v_p(\omega)} \left[\frac{dv_p(\omega)}{d\omega} \right]}$$

色散曲线

$$v_g(\omega) = \frac{v_p(\omega)}{1 - \frac{\omega}{v_p(\omega)} \left[\frac{dv_p(\omega)}{d\omega} \right]}$$

- 如果 v_p 与频率无关，则群速等于相速， $v_g = v_p$ ，与频率无关。
- 当 $dv_p/d\omega \neq 0$ 时， $v_p \neq v_g$ 。又分两种情况：

当 $\frac{dv_p}{d\omega} < 0$ ， $v_g < v_p$ 时称为正常色散

当 $\frac{dv_p}{d\omega} > 0$ ， $v_g > v_p$ 时称为非正常色散

各向异性介质中的本构关系

在各向同性介质中 $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$

在电各向异性介质中，电场强度 $\mathbf{E}$ 与电通量密度 $\mathbf{D}$ 不再平行， $\mathbf{E}$ 与 $\mathbf{D}$ 一般的线性关系为

$$\begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$$

在磁各向异性介质中，磁场强度 $\mathbf{H}$ 与磁感应强度 $\mathbf{B}$ 不再平行，其关系为

$$\begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_{xx} & \mu_{xy} & \mu_{xz} \\ \mu_{yx} & \mu_{yy} & \mu_{yz} \\ \mu_{zx} & \mu_{zy} & \mu_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{pmatrix}$$

两矢量的直接相乘定义为并矢

$$\begin{aligned}\bar{\bar{C}} &= \mathbf{AB} = (A_x \mathbf{x}_0 + A_y \mathbf{y}_0 + A_z \mathbf{z}_0)(B_x \mathbf{x}_0 + B_y \mathbf{y}_0 + B_z \mathbf{z}_0) \\ &= A_x B_x \mathbf{x}_0 \mathbf{x}_0 + A_x B_y \mathbf{x}_0 \mathbf{y}_0 + A_x B_z \mathbf{x}_0 \mathbf{z}_0 + \\ &\quad A_y B_x \mathbf{y}_0 \mathbf{x}_0 + A_y B_y \mathbf{y}_0 \mathbf{y}_0 + A_y B_z \mathbf{y}_0 \mathbf{z}_0 + \\ &\quad A_z B_x \mathbf{z}_0 \mathbf{x}_0 + A_z B_y \mathbf{z}_0 \mathbf{y}_0 + A_z B_z \mathbf{z}_0 \mathbf{z}_0\end{aligned}$$

称 $\bar{\bar{C}}$ 为并矢。所以在三维空间，标量用一个元素表示，矢量用三个元素表示，而并矢就要用九个元素表示。

并矢的运算规则 - 矢量表示形式

1. 并矢与矢量的点乘 $\bar{\bar{C}} \cdot a = (AB) \cdot a = A(B \cdot a)$

$$\mathbf{x}_0 \mathbf{x}_0 \cdot \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0 \quad \mathbf{x}_0 \mathbf{x}_0 \cdot \mathbf{y}_0 = 0$$

2. 并矢的一次标积 $\bar{\bar{A}} \cdot \bar{\bar{B}} = (A_1 A_2) \cdot (B_1 B_2) = A_1 (A_2 \cdot B_1) B_2 = (A_2 \cdot B_1) A_1 B_2$

其运算法则是夹在中间两个单位矢量按标积运算。

$$\mathbf{x}_0 \mathbf{x}_0 \cdot \mathbf{x}_0 \mathbf{y}_0 = \mathbf{x}_0 \mathbf{y}_0$$

$$\mathbf{x}_0 \mathbf{x}_0 \cdot \mathbf{y}_0 \mathbf{y}_0 = 0$$

3. 并矢的二次标积 $\bar{\bar{A}} : \bar{\bar{B}}$

其运算法则是夹在中间的两个单位矢量先按标积运算，剩下的两边的两个单位矢量再进行一次标积运算。

$$\mathbf{x}_0 \mathbf{x}_0 : \mathbf{x}_0 \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0 \cdot \mathbf{x}_0 = 1$$

$$\mathbf{x}_0 \mathbf{x}_0 : \mathbf{x}_0 \mathbf{y}_0 = \mathbf{x}_0 \cdot \mathbf{y}_0 = 0$$

并矢

并矢的运算规则 - 矩阵表示形式

$$\bar{\bar{\mathbf{C}}} = \begin{bmatrix} C_{xx} & C_{xy} & C_{xz} \\ C_{yx} & C_{yy} & C_{yz} \\ C_{zx} & C_{zy} & C_{zz} \end{bmatrix}$$

1. 并矢与矢量的点乘，矩阵与向量点乘

$$\bar{\bar{\mathbf{C}}} \cdot \mathbf{a} = \begin{bmatrix} C_{xx} & C_{xy} & C_{xz} \\ C_{yx} & C_{yy} & C_{yz} \\ C_{zx} & C_{zy} & C_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}$$

2. 并矢的一次标积，矩阵相乘

$$\bar{\bar{\mathbf{A}}} \cdot \bar{\bar{\mathbf{B}}} = \begin{bmatrix} A_{xx} & A_{xy} & A_{xz} \\ A_{yx} & A_{yy} & A_{yz} \\ A_{zx} & A_{zy} & A_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{xx} & B_{xy} & B_{xz} \\ B_{yx} & B_{yy} & B_{yz} \\ B_{zx} & B_{zy} & B_{zz} \end{bmatrix}$$

各向异性介质本构关系的并矢表示

如定义并矢 $\overline{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}}$

$$\overline{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \mathbf{x}_0 \mathbf{x}_0 & \varepsilon_{xy} \mathbf{x}_0 \mathbf{y}_0 & \varepsilon_{xz} \mathbf{x}_0 \mathbf{z}_0 \\ \varepsilon_{yx} \mathbf{y}_0 \mathbf{x}_0 & \varepsilon_{yy} \mathbf{y}_0 \mathbf{y}_0 & \varepsilon_{yz} \mathbf{y}_0 \mathbf{z}_0 \\ \varepsilon_{zx} \mathbf{z}_0 \mathbf{x}_0 & \varepsilon_{zy} \mathbf{z}_0 \mathbf{y}_0 & \varepsilon_{zz} \mathbf{z}_0 \mathbf{z}_0 \end{bmatrix}$$

而 $\mathbf{D} = D_x \mathbf{x}_0 + D_y \mathbf{y}_0 + D_z \mathbf{z}_0$ $\mathbf{E} = E_x \mathbf{x}_0 + E_y \mathbf{y}_0 + E_z \mathbf{z}_0$

那么引入并矢 $\overline{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}}$ 后, $\mathbf{D}$ 和 $\mathbf{E}$ 关系可简写为 $\mathbf{D} = \overline{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}} \cdot \mathbf{E}$

同样引入并矢 $\overline{\overline{\boldsymbol{\mu}}}$

$$\overline{\overline{\boldsymbol{\mu}}} = \begin{bmatrix} \mu_{xx} \mathbf{x}_0 \mathbf{x}_0 & \mu_{xy} \mathbf{x}_0 \mathbf{y}_0 & \mu_{xz} \mathbf{x}_0 \mathbf{z}_0 \\ \mu_{yx} \mathbf{y}_0 \mathbf{x}_0 & \mu_{yy} \mathbf{y}_0 \mathbf{y}_0 & \mu_{yz} \mathbf{y}_0 \mathbf{z}_0 \\ \mu_{zx} \mathbf{z}_0 \mathbf{x}_0 & \mu_{zy} \mathbf{z}_0 \mathbf{y}_0 & \mu_{zz} \mathbf{z}_0 \mathbf{z}_0 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{B}$ 与 $\mathbf{H}$ 关系可记为 $\mathbf{B} = \overline{\overline{\boldsymbol{\mu}}} \cdot \mathbf{H}$

复习要点

- 引入复介电常数 $\tilde{\epsilon} = \epsilon - j\frac{\sigma}{\omega}$ 后, 传播常数 $k = k_r - jk_i$, 波阻抗 $\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\tilde{\epsilon}}}$ 均为复数。
- k 的实部 k_r 表示波的传播 $\lambda = \frac{2\pi}{k_r}$, $v_p = \frac{\omega}{k_r}$, 虚部表示沿传播方向波的衰减。良导体的趋肤深度 $\delta = \sqrt{2/\omega\mu\sigma}$
- 波传播速度与频率有关称为色散, 色散关系可用 $k - \omega$ 表示。相速 $v_p = \omega/k(\omega)$ 群速 $v_g = d\omega/dk(\omega)$ 。在 $k - \omega$ 平面上的 $k(\omega)$ 曲线, 曲线任一点与原点连线斜率就是 v_p , 切线斜率就是 v_g 。
- 各向异性介质中的本构关系。 $\bar{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \mathbf{x}_0 \mathbf{x}_0 & \epsilon_{xy} \mathbf{x}_0 \mathbf{y}_0 & \epsilon_{xz} \mathbf{x}_0 \mathbf{z}_0 \\ \epsilon_{yx} \mathbf{y}_0 \mathbf{x}_0 & \epsilon_{yy} \mathbf{y}_0 \mathbf{y}_0 & \epsilon_{yz} \mathbf{y}_0 \mathbf{z}_0 \\ \epsilon_{zx} \mathbf{z}_0 \mathbf{x}_0 & \epsilon_{zy} \mathbf{z}_0 \mathbf{y}_0 & \epsilon_{zz} \mathbf{z}_0 \mathbf{z}_0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \bar{\epsilon} \cdot \mathbf{E}$

复习范围

4.4, 4.5

$$\bar{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_{xx} \mathbf{x}_0 \mathbf{x}_0 & \mu_{xy} \mathbf{x}_0 \mathbf{y}_0 & \mu_{xz} \mathbf{x}_0 \mathbf{z}_0 \\ \mu_{yx} \mathbf{y}_0 \mathbf{x}_0 & \mu_{yy} \mathbf{y}_0 \mathbf{y}_0 & \mu_{yz} \mathbf{y}_0 \mathbf{z}_0 \\ \mu_{zx} \mathbf{z}_0 \mathbf{x}_0 & \mu_{zy} \mathbf{z}_0 \mathbf{y}_0 & \mu_{zz} \mathbf{z}_0 \mathbf{z}_0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \bar{\mu} \cdot \mathbf{H}$$