

电磁场与电磁波

第十讲

4.1 波动方程

4.2 平面电磁波

4.3 极化

魏兴昌

浙江大学

weixc@zju.edu.cn

作业：4.3，4.6，4.8 (1) & (2)，4.9，4.11

无源空间麦氏方程组

波动方程

无源:

$$\mathbf{J} = \rho = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega\varepsilon\mathbf{E}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$$

$\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{H}$ 去耦合

$$\Rightarrow (\nabla^2 + k^2) \begin{cases} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{cases} = 0$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -j\omega\mu(\nabla \times \mathbf{H}) = -j\omega\mu(j\omega\varepsilon\mathbf{E}) = \omega^2\mu\varepsilon\mathbf{E}$$

利用恒等关系 $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}$ 以及 $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ 得到

$$\nabla^2 \mathbf{E} + \omega^2\mu\varepsilon\mathbf{E} = 0$$

同理 $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{H}) = j\omega\mu\varepsilon(-j\omega\mu\mathbf{H}) = \omega^2\mu\varepsilon\mathbf{H}$ 而 $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$

得到 $\nabla^2 \mathbf{H} + \omega^2\mu\varepsilon\mathbf{H} = 0$

波动方程

$$(\nabla^2 + k^2) \begin{cases} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{cases} = 0$$

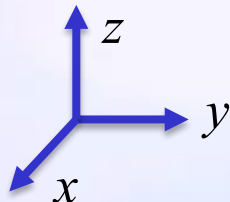
$$k^2 = \omega^2\mu\varepsilon$$

波动方程 vs 传输线方程

3

电磁波

三维波动方程



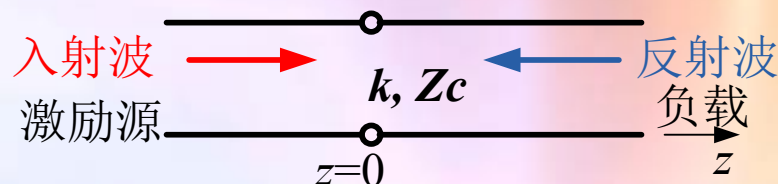
$$(\nabla^2 + k^2) \begin{Bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{Bmatrix} = 0$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) \begin{Bmatrix} \mathbf{E}(x, y, z) \\ \mathbf{H}(x, y, z) \end{Bmatrix} = 0$$

$$k = \omega \sqrt{\mu \epsilon}$$

传输线方程

一维波动方程



$$\left(\frac{d^2}{dz^2} + k^2 \right) U(z) = 0$$

$$k = \omega \sqrt{L' C'}$$



$$U(z) = U^i e^{-jkz} + U^r e^{jkz}$$

波动方程的求解 (1) - 标量波动方程

4

矢量波方程 $(\nabla^2 + k^2) \begin{Bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{Bmatrix} = 0$ 可简化到解 $(\nabla^2 + k^2)\Phi(x, y, z) = 0$

设 $\mathbf{E}(x, y, z) = E_x(x, y, z)\mathbf{x}_0 + E_y(x, y, z)\mathbf{y}_0 + E_z(x, y, z)\mathbf{z}_0$

$\mathbf{H}(x, y, z) = H_x(x, y, z)\mathbf{x}_0 + H_y(x, y, z)\mathbf{y}_0 + H_z(x, y, z)\mathbf{z}_0$

代入波方程便得

$$(\nabla^2 + k^2) \begin{Bmatrix} \left[E_x(x, y, z)\mathbf{x}_0 + E_y(x, y, z)\mathbf{y}_0 + E_z(x, y, z)\mathbf{z}_0 \right] \\ \left[H_x(x, y, z)\mathbf{x}_0 + H_y(x, y, z)\mathbf{y}_0 + H_z(x, y, z)\mathbf{z}_0 \right] \end{Bmatrix} = 0$$

要使上式成立，只有等式左边每个分量都等于零，即

$$(\nabla^2 + k^2) \begin{Bmatrix} E_x(x, y, z) \\ E_y(x, y, z) \\ E_z(x, y, z) \end{Bmatrix} = 0 \quad (\nabla^2 + k^2) \begin{Bmatrix} H_x(x, y, z) \\ H_y(x, y, z) \\ H_z(x, y, z) \end{Bmatrix} = 0$$

所以对波方程的求解归结为解标量波方程

$$(\nabla^2 + k^2)\Phi(x, y, z) = 0$$

波动方程的求解 (2) 分离变量法

5

$$(\nabla^2 + k^2)\Phi(x, y, z) = 0 \quad \text{设 } \Phi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z) \text{ 得}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2\right)[X(x)Y(y)Z(z)] = 0$$

等式两边除以 $X(x)Y(y)Z(z)$ ，得到

$$\frac{\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2}}{X(x)} + \frac{\frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2}}{Y(y)} + \frac{\frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2}}{Z(z)} + k^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2}}{X(x)} + \frac{\frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2}}{Y(y)} + \frac{\frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2}}{Z(z)} = -k^2$$

等式左边第一、二、三项分别只是 x 、 y 、 z 的函数，要使它们加起来为常数 $-k^2$ ，只能是每一项都等于某一待定常数 $-k_x^2, -k_y^2, -k_z^2$ 。

原来的三维波动方程分解为三个一维波动方程 – 分离变量法的好处

$$\frac{d^2 X(x)}{dx^2} + k_x^2 X(x) = 0 \quad \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} + k_y^2 Y(y) = 0 \quad \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} + k_z^2 Z(z) = 0$$

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2 = \omega^2 \mu \varepsilon$$

波动方程的求解 (2) 分离变量法

6

$$\frac{d^2 X(x)}{dx^2} + k_x^2 X(x) = 0 \quad \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} + k_y^2 Y(y) = 0 \quad \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} + k_z^2 Z(z) = 0$$

边界条件：假定源在有限区域，边界趋于无穷远，因此不存在反射波。

$\frac{d^2 X(x)}{dx^2} + k_x^2 X(x) = 0$ 的通解为 $C_1 e^{-jk_x x} + C_2 e^{jk_x x}$
 $e^{-jk_x x}$ 表示沿 x 方向传播到无穷远的波。另一个解 $e^{jk_x x}$ 表示逆 x 方向由无穷远传播来的波，根据边界条件，这个解可以不予考虑。以上三个方程的解为：

$$X(x) = C_x e^{-jk_x x} \quad Y(y) = C_y e^{-jk_y y} \quad Z(z) = C_z e^{-jk_z z}$$

C_x, C_y, C_z ：由源决定的系数。

$$\Phi(x, y, z) = C_x C_y C_z e^{-j(k_x x + k_y y + k_z z)} = C e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$$

沿着 $\mathbf{k}$ 方向传播的波

$\mathbf{k}$ 称为 **波矢**，其绝对值 k 称为 **传播常数、波数**

$$\mathbf{k} = k_x \mathbf{x}_0 + k_y \mathbf{y}_0 + k_z \mathbf{z}_0 \quad \mathbf{r} = x \mathbf{x}_0 + y \mathbf{y}_0 + z \mathbf{z}_0$$

k 与频率的方程称为介质的 **色散方程**

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2 = \omega^2 \mu \varepsilon$$

波动方程的求解 (2) 分离变量法

7

电场 $\mathbf{E}$ 和磁场 $\mathbf{H}$ 在无源空间中每一分量的解为

$$\begin{cases} E_x(x, y, z) = E_{0x} e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \\ E_y(x, y, z) = E_{0y} e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \\ E_z(x, y, z) = E_{0z} e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \end{cases} \quad \begin{cases} H_x(x, y, z) = H_{0x} e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \\ H_y(x, y, z) = H_{0y} e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \\ H_z(x, y, z) = H_{0z} e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \end{cases} \quad \begin{aligned} \Phi(x, y, z) &= C e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \\ \mathbf{k} &= k_x \mathbf{x}_0 + k_y \mathbf{y}_0 + k_z \mathbf{z}_0 \\ \mathbf{r} &= x \mathbf{x}_0 + y \mathbf{y}_0 + z \mathbf{z}_0 \end{aligned}$$

进一步得到

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(x, y, z) = \mathbf{x}_0 E_{0x} e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} + \mathbf{y}_0 E_{0y} e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} + \mathbf{z}_0 E_{0z} e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = \mathbf{E}_0 e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$$

$\mathbf{E}_0 = E_{0x} \mathbf{x}_0 + E_{0y} \mathbf{y}_0 + E_{0z} \mathbf{z}_0$ 为待定系数，由源决定，与 $\mathbf{r}$ 无关

同理 $\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{H}(x, y, z) = \mathbf{H}_0 e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$

$\mathbf{H}_0 = H_{0x} \mathbf{x}_0 + H_{0y} \mathbf{y}_0 + H_{0z} \mathbf{z}_0$ 为待定系数，由源决定，与 $\mathbf{r}$ 无关

计及时间因子 $e^{j\omega t}$ 后，其时域解为

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \left[\mathbf{H}_0 e^{j(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \right] \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \left[\mathbf{E}_0 e^{j(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \right]$$

从形式上看表示电场 $\mathbf{E}$ 和磁场 $\mathbf{H}$ 的解是一个常数矢量 $\mathbf{E}_0$ 、 $\mathbf{H}_0$ 与一个指数函数 $e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$ 的乘积。

波方程

$$\left(\nabla^2 + k^2\right) \begin{cases} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{cases} = 0$$

其解 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{H}$ 可表示成一个常数矢量 $\mathbf{E}_0$ 、 $\mathbf{H}_0$ 与一个指数函数 $e^{-jk \cdot \mathbf{r}}$ 的乘积。

$$\begin{cases} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 e^{-jk \cdot \mathbf{r}} \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{H}_0 e^{-jk \cdot \mathbf{r}} \end{cases}$$

式中

$$\begin{cases} \mathbf{E}_0 = E_{0x} \mathbf{x}_0 + E_{0y} \mathbf{y}_0 + E_{0z} \mathbf{z}_0 \\ \mathbf{H}_0 = H_{0x} \mathbf{x}_0 + H_{0y} \mathbf{y}_0 + H_{0z} \mathbf{z}_0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{为待定系数, 由源} \\ \text{决定, 与} \mathbf{r} \text{无关} \end{array}$$

$$\mathbf{k} = k_x \mathbf{x}_0 + k_y \mathbf{y}_0 + k_z \mathbf{z}_0 \quad \text{波矢}$$

$$\mathbf{r} = x \mathbf{x}_0 + y \mathbf{y}_0 + z \mathbf{z}_0$$

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2 = \omega^2 \mu \varepsilon \quad \text{色散方程}$$

可以验证

$$\left(\nabla^2 + k^2\right) \begin{cases} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{cases} = \left(-k^2 + k^2\right) \begin{cases} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{cases} = 0$$

$$\begin{cases} \mathbf{k} = k_x \mathbf{x}_0 + k_y \mathbf{y}_0 + k_z \mathbf{z}_0 \\ \mathbf{r} = x \mathbf{x}_0 + y \mathbf{y}_0 + z \mathbf{z}_0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \nabla (e^{-jk \cdot r}) = \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{x}_0 + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{y}_0 + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{z}_0 \right) e^{-j(k_x x + k_y y + k_z z)}$$

$$= -j(k_x \mathbf{x}_0 + k_y \mathbf{y}_0 + k_z \mathbf{z}_0) e^{-j(k_x x + k_y y + k_z z)}$$

$$= -j \mathbf{k} e^{-jk \cdot r}$$

利用 $\nabla \cdot (\Phi \mathbf{A}) = \mathbf{A} \cdot \nabla \Phi + \Phi \nabla \cdot \mathbf{A}$

$$\nabla \times (\Phi \mathbf{A}) = \nabla \Phi \times \mathbf{A} + \Phi \nabla \times \mathbf{A}$$

$$\begin{cases} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = E_0 e^{-jk \cdot r} \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}) = H_0 e^{-jk \cdot r} \end{cases}$$

得到 $\nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot (E_0 e^{-jk \cdot r}) = E_0 \cdot \nabla (e^{-jk \cdot r}) + e^{-jk \cdot r} \nabla \cdot E_0$

$$= -j \mathbf{k} \cdot (E_0 e^{-jk \cdot r}) = -j \mathbf{k} \cdot \mathbf{E}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = \nabla \times (E_0 e^{-jk \cdot r}) = \nabla (e^{-jk \cdot r}) \times E_0 + e^{-jk \cdot r} \nabla \times E_0$$

$$= -j \mathbf{k} \times E_0 e^{-jk \cdot r} = -j \mathbf{k} \times \mathbf{E}$$

$$\nabla \cdot \nabla \mathbf{E} = \nabla^2 (E_0 e^{-jk \cdot r}) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) (E_0 e^{-j(k_x x + k_y y + k_z z)}) = -k^2 \mathbf{E}$$

利用

$$\nabla \times (\nabla \times A) = \nabla (\nabla \cdot A) - \nabla^2 A$$

得到

$$\begin{aligned}\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} &= \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} \\ &= \nabla (-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}) + k^2 \mathbf{E} \\ &= \nabla [(-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0)e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}] + k^2 \mathbf{E} \\ &= (-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0)\nabla (e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}) + k^2 \mathbf{E} \\ &= (-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0)(-j\mathbf{k}e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}) + k^2 \mathbf{E} \\ &= k^2 \mathbf{E} - \mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{E})\end{aligned}$$

设 $\mathbf{k} = k_x \mathbf{x}_0 + k_y \mathbf{y}_0 + k_z \mathbf{z}_0$ $\mathbf{r} = x\mathbf{x}_0 + y\mathbf{y}_0 + z\mathbf{z}_0$

∇ 算子对 $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$ 的作用:

$$\nabla(e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}) = -j\mathbf{k}e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -j\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\mathbf{k} \times \mathbf{E}$$

后面推导公式的基础

$$\nabla \cdot \nabla \mathbf{E} = -k^2 \mathbf{E}$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = k^2 \mathbf{E} - \mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{E})$$

记忆方法: 将 ∇ 算子替换为 $-j\mathbf{k}$

计算结果与坐标系的选择无关, 可以取 $\mathbf{z}_0$ 平行于 $\mathbf{k}$, 则

$$\mathbf{k} = k\mathbf{z}_0, \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-jkz} \quad \mathbf{E} \text{ 只是 } z \text{ 的函数}$$

注意: 只有针对

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$$

所以

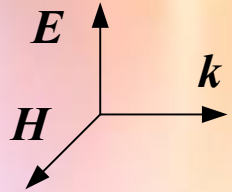
$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{x}_0 + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{y}_0 + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{z}_0 = \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{z}_0 = (-jk) \mathbf{z}_0 = -j\mathbf{k}$$

∇ 算子才替换为 $-j\mathbf{k}$

$E(r) = E_0 e^{-jk \cdot r}$ 与 $H(r) = H_0 e^{-jk \cdot r}$ 的物理含义

1. E 、 H 、 k 三者相互垂直，且构成右手螺旋关系

$$\begin{aligned} E(r) &= E_0 e^{-jk \cdot r} & \nabla \times E &= -j\omega\mu H & \Rightarrow & H = \frac{1}{\omega\mu} k \times E \\ H(r) &= H_0 e^{-jk \cdot r} & \nabla \times H &= j\omega\varepsilon E & \Rightarrow & E = -\frac{1}{\omega\varepsilon} k \times H \end{aligned}$$



横电磁波
(TEM)

2. 模 $|E|$ 与 $|H|$ 之比为一常数，称为波阻抗。

引入单位波矢 κ_0 使得 $\kappa_0 \cdot \kappa_0 = 1$, $k = k\kappa_0 = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}\kappa_0$ 则得

$$\begin{aligned} H &= Y\kappa_0 \times E & Y &= \frac{k}{\omega\mu} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} & Z &= \frac{k}{\omega\varepsilon} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \\ E &= -Z\kappa_0 \times H \end{aligned}$$

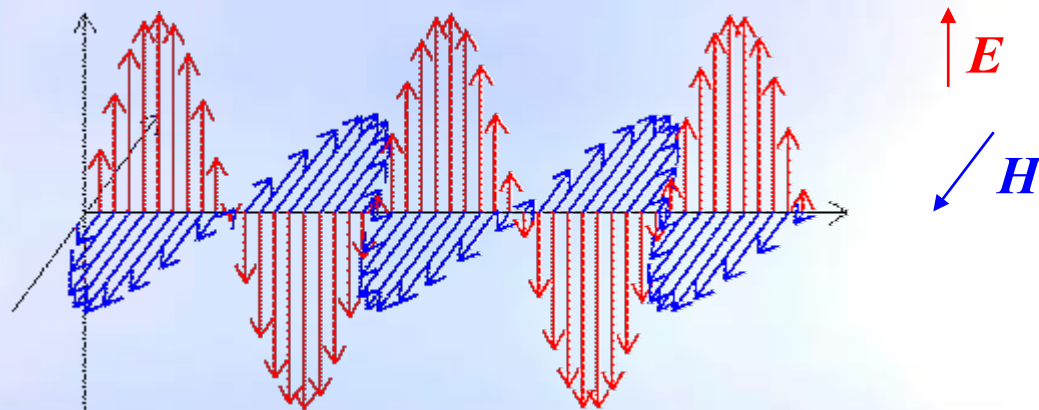
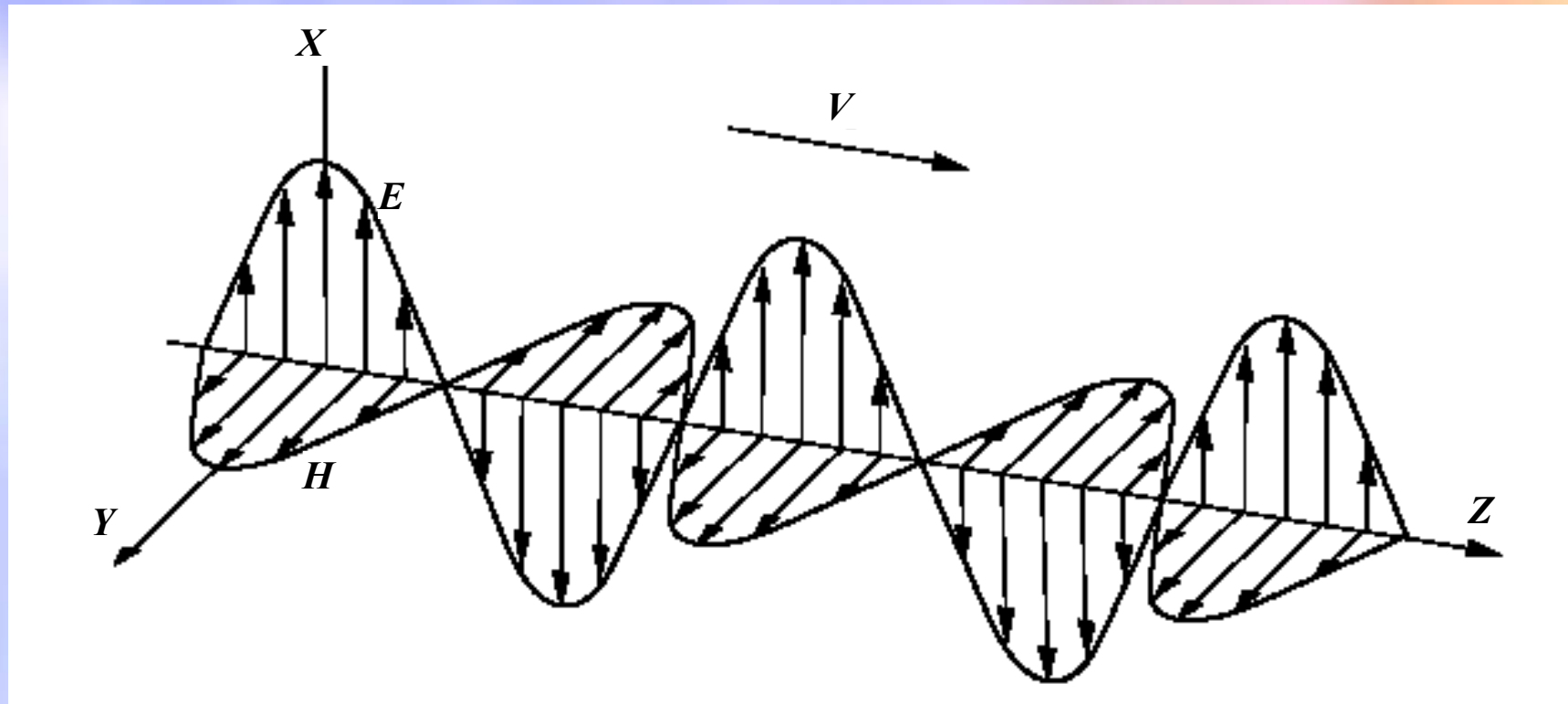
Z 、 Y 称为均匀介质中平面波的**本征阻抗**或本征导纳，表示模 $|E|$ 与 $|H|$ 之比。

本征阻抗也叫**波阻抗**。

对于自由空间，波阻抗习惯上用 η_0 表示 $\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi \approx 377\Omega$

E 、 H 、 k 三者相互垂直并构成右手螺旋关系

13



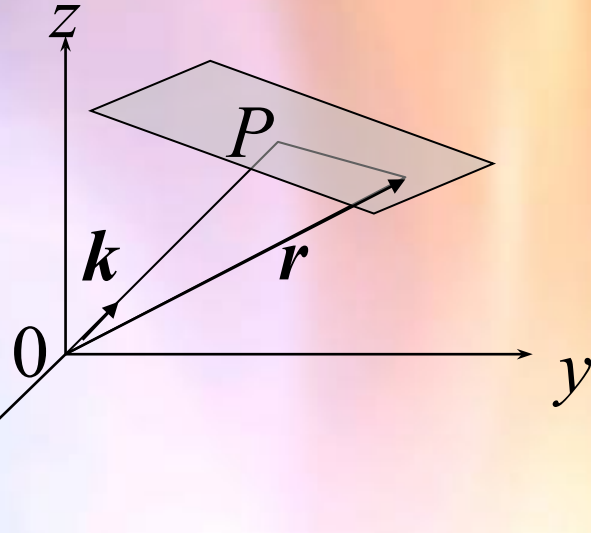
$E(\mathbf{r}) = E_0 e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$ 与 $H(\mathbf{r}) = H_0 e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$ 的物理含义

3. 在与 $\mathbf{k}$ 垂直的平面内，波的相位到处都相等。

$$\begin{cases} E(\mathbf{r}) = E_0 e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \\ H(\mathbf{r}) = H_0 e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \end{cases} \quad \text{被称为平面波}$$

对 $E(\mathbf{r}) = E_0 e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$ 乘 $e^{j\omega t}$ 取实部得到

$$E(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \left[E_0 e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} e^{j\omega t} \right] = E_0 \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$$



相位是 $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$ 。在与 $\mathbf{k}$ 垂直的平面内， $\mathbf{r}$ 在 $\mathbf{k}$ 上的投影 $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$ 相等，即相位相等

4. 波长与相速

为方便，选择一个特定的坐标系使得 $E_0 = E_0 \mathbf{x}_0$, $H_0 = H_0 \mathbf{y}_0$, $\mathbf{k} = k \mathbf{z}_0$

在这个特定坐标系中，电场、磁场、波矢各只有一个分量。

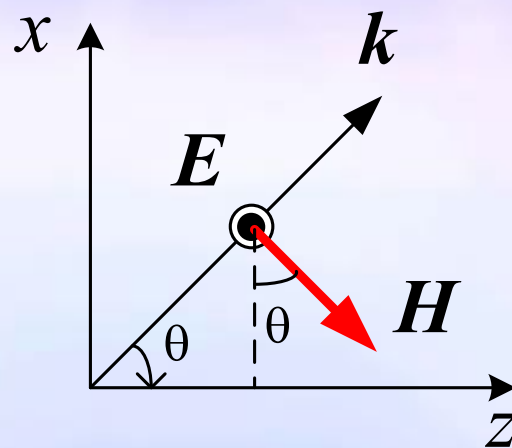
于是平面波解成为

$$E(\mathbf{r}, t) = \mathbf{x}_0 E_0 \cos(\omega t - kz)$$

故得

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}$$

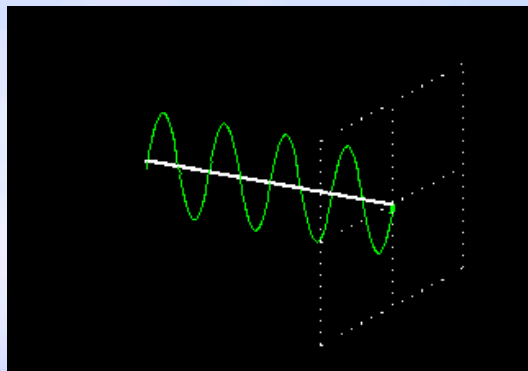
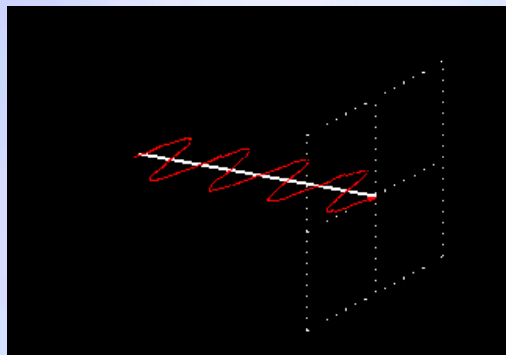
$$v_p = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{\omega \sqrt{\mu \epsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}}$$



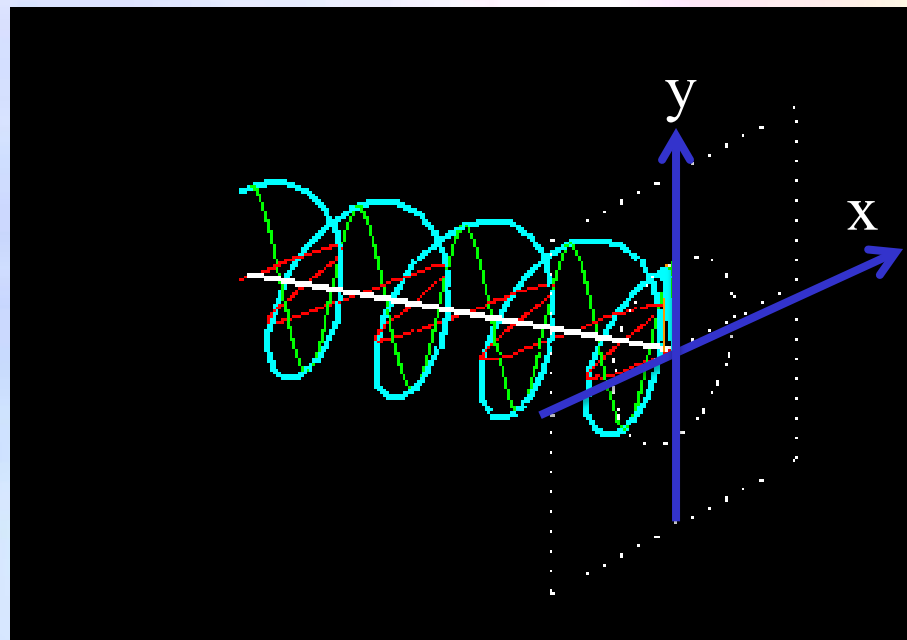
波的极化可以用固定点的电场矢量末端点在与波矢 k 垂直的平面内投影随时间运动的轨迹来描述。

1. 如果电场矢量末端点运动轨迹是一条直线，这种波称为线极化波。
2. 如果末端点运动轨迹是一个圆，称为圆极化波。
3. 如果末端点运动轨迹是一个椭圆，称为椭圆极化波。

线极化



圆极化



如何判定波的极化?

选择特定坐标系使得 z_0 平行于 k 。电场与 k 垂直，所以只有 E_x 、 E_y 两个分量，可表示为

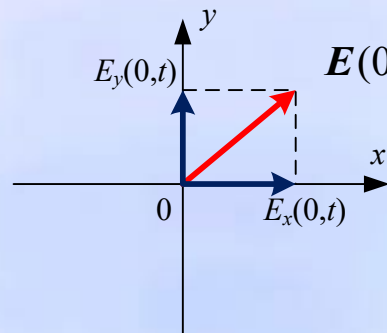
$$\mathbf{E}(z) = \mathbf{x}_0 E_x(z) + \mathbf{y}_0 E_y(z) = \mathbf{x}_0 E_{xm} e^{-j(kz - \varphi_a)} + \mathbf{y}_0 E_{ym} e^{-j(kz - \varphi_b)}$$

根据时谐矢量的复矢量定义，可得

$$E_x(z, t) = \text{Re} \left[E_{xm} e^{-j(kz - \varphi_a)} e^{j\omega t} \right] = E_{xm} \cos(\omega t - kz + \varphi_a)$$

$$E_y(z, t) = \text{Re} \left[E_{ym} e^{-j(kz - \varphi_b)} e^{j\omega t} \right] = E_{ym} \cos(\omega t - kz + \varphi_b)$$

可以在任意一个垂直于 k 的平面观察波的极化，为了方便取 $z = 0$



$$\mathbf{E}(0, t) = \mathbf{x}_0 E_{xm} \cos(\omega t + \varphi_a) + \mathbf{y}_0 E_{ym} \cos(\omega t + \varphi_b)$$

定义一个复矢量 $Ae^{j\varphi} = \frac{E_y(z=0)}{E_x(z=0)} = \frac{E_{ym}}{E_{xm}} e^{j(\varphi_b - \varphi_a)} \quad \varphi = \varphi_b - \varphi_a$

$Ae^{j\varphi}$ 的值决定了波的不同极化

$$\mathbf{E}(0,t) = \mathbf{x}_0 E_x(0,t) + \mathbf{y}_0 E_y(0,t) = \mathbf{x}_0 E_{xm} \cos(\omega t + \varphi_a) + \mathbf{y}_0 E_{ym} \cos(\omega t + \varphi_b)$$

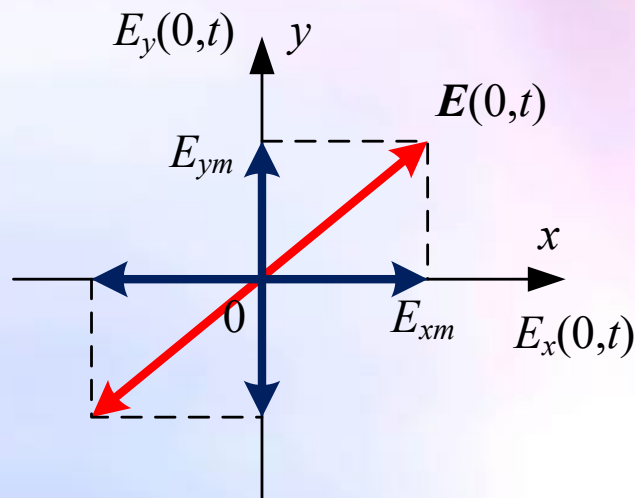
$$\varphi = \varphi_b - \varphi_a$$

线极化波的条件：

$$\varphi = \varphi_b - \varphi_a = 0, \pi$$

那么 $E_x(0,t)$, $E_y(0,t)$ 满足的方程为

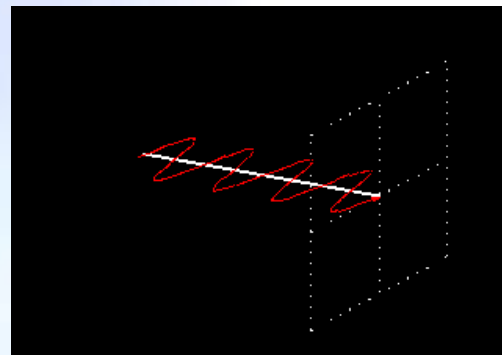
$$E_y(0,t) = \pm \left(\frac{E_{ym}}{E_{xm}} \right) E_x(0,t)$$



$\varphi=0$ 取正号， $\varphi=\pi$ 取负号。

这是斜率为 $(\pm \frac{E_{ym}}{E_{xm}})$ 的直线，故是线极化波。

$$A e^{j\varphi} = \pm \frac{E_{ym}}{E_{xm}} = \text{实数}$$



圆极化

$$\mathbf{E}(0,t) = \mathbf{x}_0 E_x(0,t) + \mathbf{y}_0 E_y(0,t) = \mathbf{x}_0 E_{xm} \cos(\omega t + \varphi_a) + \mathbf{y}_0 E_{ym} \cos(\omega t + \varphi_b)$$

$$A e^{j\varphi} = \frac{E_{ym}}{E_{xm}} e^{j(\varphi_b - \varphi_a)}$$

圆极化波的条件:

$$\varphi = \varphi_b - \varphi_a = \pm \frac{\pi}{2}, \text{ 且 } \frac{E_{ym}}{E_{xm}} = 1$$

先考虑 $\varphi = \pi/2$, $A=1$ 得到

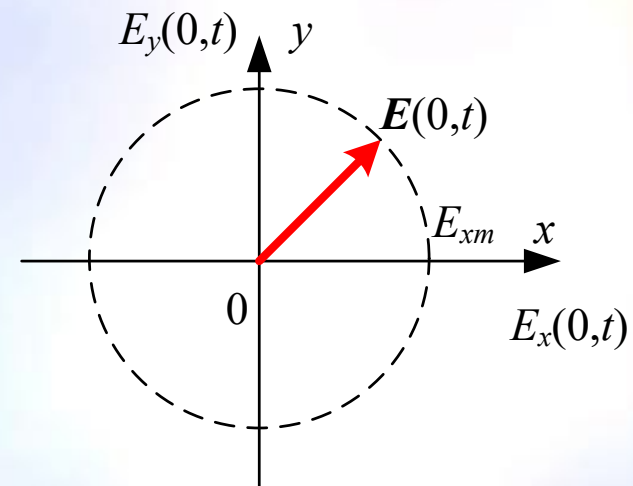
$$E_x(0,t) = E_{xm} \cos(\omega t + \varphi_a) \quad E_y(0,t) = -E_{xm} \sin(\omega t + \varphi_a)$$

消去 t , 得到 $E_x^2(0,t) + E_y^2(0,t) = E_{xm}^2$

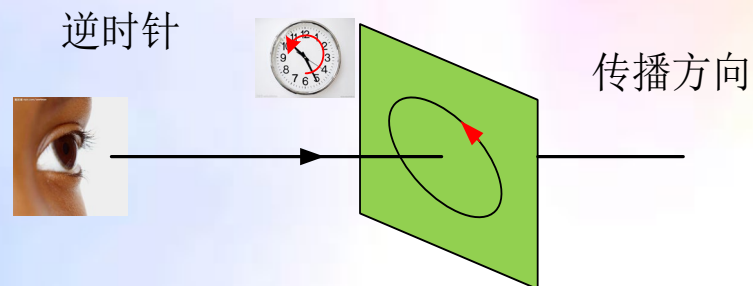
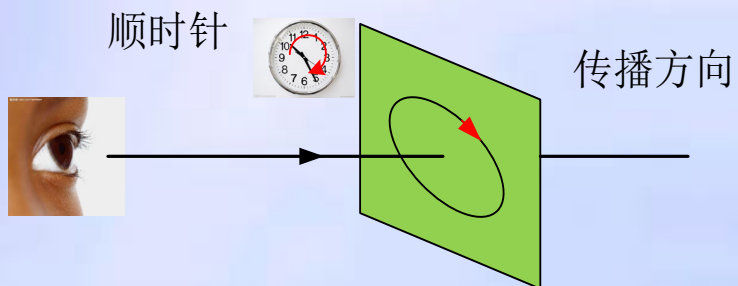
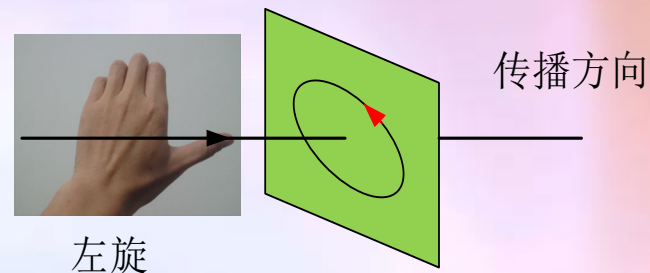
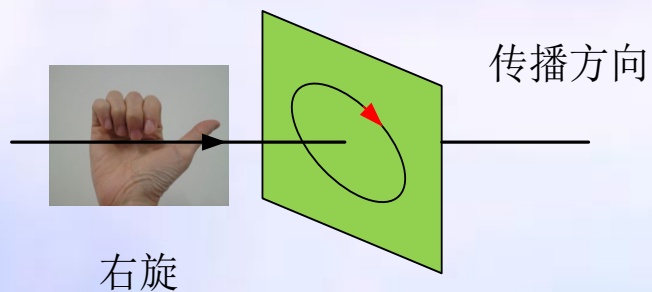
其图解在 $E_x - E_y$ 平面是一个圆, 所以是圆极化, 圆的半径等于 E_{xm} 。

$$A e^{j\varphi} = j$$

考虑 $\varphi = -\pi/2$, $A=1$ 得到 $A e^{j\varphi} = -j$



右旋与左旋



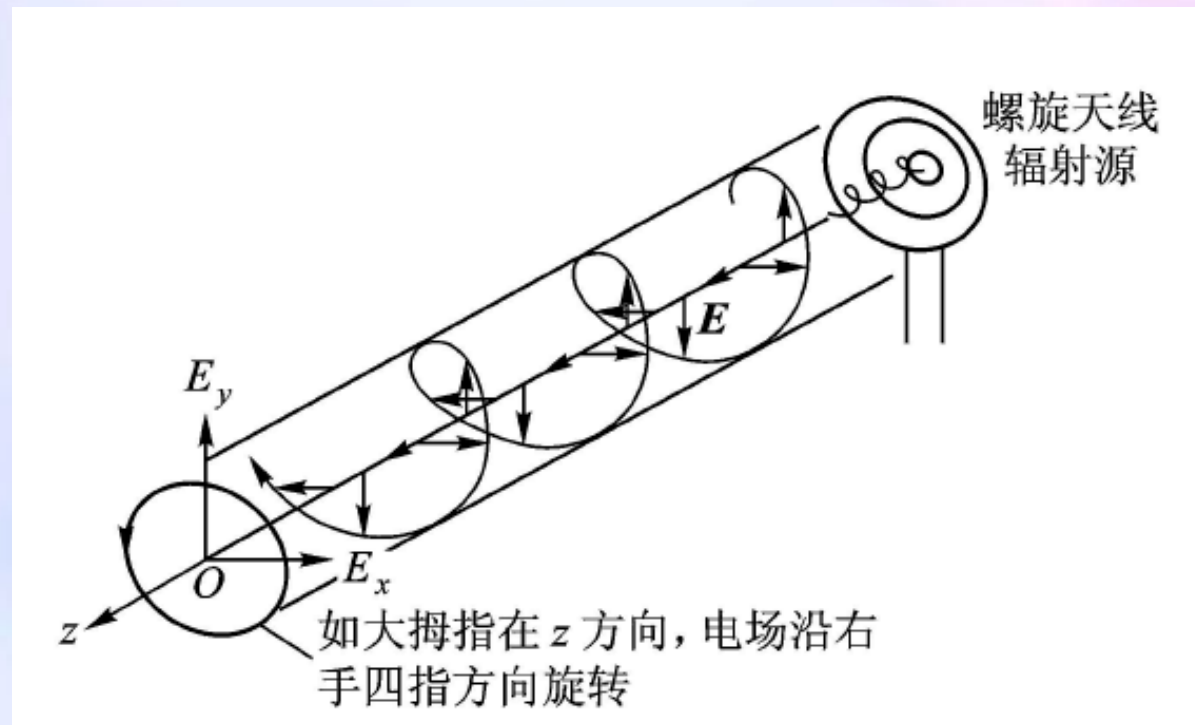
注意：右旋与左旋，“顺时针”和“逆时针”必须顺着波的传播方向观察

圆极化波

对于沿z方向传播的波

当 $\varphi=+\pi/2$, $A=1$ 时, 左旋圆极化波; $Ae^{j\varphi} = j$

当 $\varphi=-\pi/2$, $A=1$ 时, 右旋圆极化波。 $Ae^{j\varphi} = -j$



圆极化（右旋）

$$\mathbf{E}(0,t) = \mathbf{x}_0 E_x(0,t) + \mathbf{y}_0 E_y(0,t) = \mathbf{x}_0 E_{xm} \cos(\omega t + \varphi_a) + \mathbf{y}_0 E_{ym} \cos(\omega t + \varphi_b)$$

$$A e^{j\varphi} = \frac{E_{ym}}{E_{xm}} e^{j(\varphi_b - \varphi_a)}$$

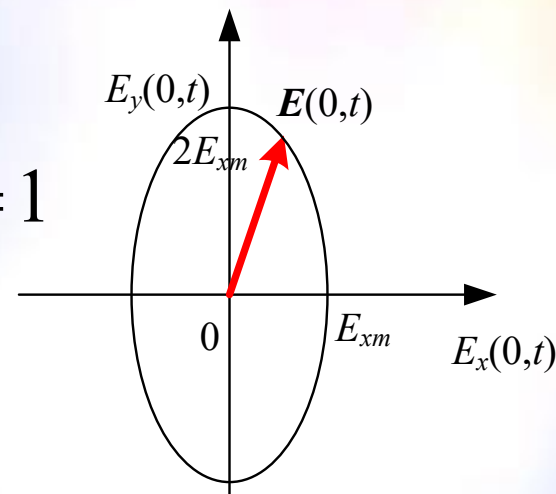
考虑 $\varphi = -\pi/2$, $A = E_{ym} / E_{xm} = 2$

$$\begin{cases} E_x(0,t) = E_{xm} \cos(\omega t + \varphi_a) \\ E_y(0,t) = 2E_{xm} \sin(\omega t + \varphi_a) \end{cases}$$

消去 t , 得到

$$\left[\frac{E_x(0,t)}{E_{xm}} \right]^2 + \left[\frac{E_y(0,t)}{2E_{xm}} \right]^2 = 1$$

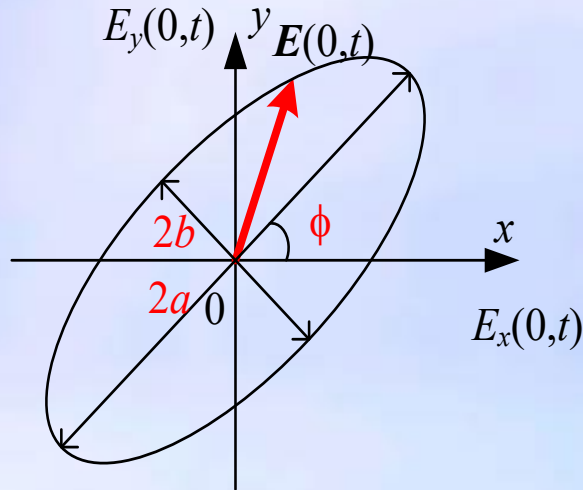
所以是椭圆极化的。



椭圆极化

- 所有波的极化都可以定义为椭圆极化，线极化和圆极化是椭圆极化的两个特例。
- 实际应用中，一般把除去线极化和圆极化的情况定义为椭圆极化。
- 一个椭圆极化波可以分解为2个圆极化波（作业）。

$$\mathbf{E}(0,t) = \mathbf{x}_0 E_{xm} \cos(\omega t + \varphi_a) + \mathbf{y}_0 E_{ym} \cos(\omega t + \varphi_b)$$



$$\varphi = \varphi_b - \varphi_a$$

$$a^2 + b^2 = E_{xm}^2 + E_{ym}^2$$

$$\pm ab = E_{xm} E_{ym} \sin \varphi$$

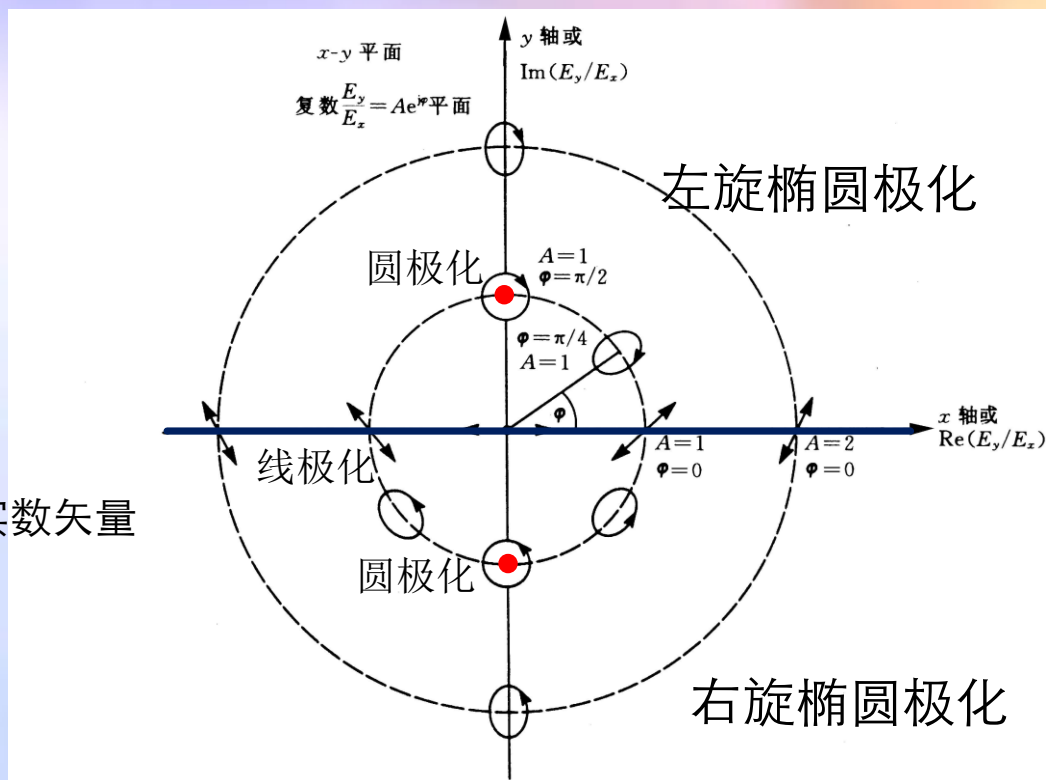
$$\tan(2\phi) = \frac{2E_{xm} E_{ym}}{E_{xm}^2 - E_{ym}^2} \cos \varphi$$

假定复矢量表示的电场 E 为

$$\mathbf{E} = (\mathbf{x}_0 E_x + \mathbf{y}_0 E_y) e^{-jkz}$$

$$A e^{j\varphi} = \frac{E_y}{E_x}$$

1. 对于线极化波, E_y/E_x 在该复平面对应的点就是实轴, $\varphi=0$ 或 π 。 $\mathbf{E} = (\mathbf{x}_0 \pm A\mathbf{y}_0) E_x e^{-jkz}$ 实数矢量
2. 对于圆极化, 在该复平面对应两个点: $\pm j$, 即 $A=1$, $\varphi=\pm\pi/2$ 。 $\mathbf{E} = (\mathbf{x}_0 \pm j\mathbf{y}_0) E_x e^{-jkz}$
3. 如果 E_y/E_x 落在上半平面, 都是左旋椭圆极化的, 落在下半平面都是右旋椭圆极化的。“上左下右”。
注意, 此时波沿 z 方向传播。



极化应用举例

无线电波与电视信号的接收

具有相同极化的发射天线、接收天线才能传输最大的功率。调幅电台辐射的电磁波其电场垂直于地面平行于天线塔。所以收音机天线就要安置得与电场方向平行，即与地面垂直接收效果才最好。但是对于电视广播，电场 E 与地面平行，所以电视机接收天线就要与地面平行，且对准电视发射台方向。很多调频广播电台，波是圆极化的，接收天线就可任意放置，只要对准电视信号发来的方向。

应用正交极化的通信系统

为了增加特定频率范围内的通信容量，某些卫星通信系统利用正交极化的两个波束，使通信容量比单极化通信系统增加一倍。

复习要点

- 由麦克斯韦方程可得到 $\mathbf{E}$ 与 $\mathbf{H}$ 去耦的波动方程 $(\nabla^2 + k^2) \begin{Bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{Bmatrix} = 0$

在无源简单介质中，其解为
$$\begin{cases} \mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \\ \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \end{cases}$$

- 这个解叫平面波、TEM波：

■ $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{H}$ 、 $\mathbf{k}$ 三者相互垂直构成右手螺旋关系 – TEM波；

■ $|\mathbf{E}|$ 与 $|\mathbf{H}|$ 之比为波阻抗 $\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$ $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ $v_p = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$

■ 波矢 $\mathbf{k}$ 的方向就是波传播的方向；在与 $\mathbf{k}$ 垂直的平面内相位到处相等-平面波。

- 波的极化可以用固定点的电场矢量末端点在与波矢 $\mathbf{k}$ 垂直的平面内的投影随时间运动的轨迹来描述：线极化、圆极化、椭圆极化。圆极化、椭圆极化还有左旋与右旋之分。

复习范围：4.1~4.3